

Fonctions à deux variables

Contrôle continu

Durée : 2h00.

Toute réponse doit être justifiée.

Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1.

1. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte.
2. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $a \in U$. Montrer que si $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en a alors les dérivées partielles de f en a existent.

Exercice 2. Soient $S, T \subset \mathbb{R}^2$. Montrer que

1. $\overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$;
2. $\widehat{\overline{S \cap T}} = \widehat{\overline{S}} \cap \widehat{\overline{T}}$.

Exercice 3. Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. (a) Soient (u, v) une base de $\mathbb{R}^2$, $(a_n), (b_n)$ deux suites de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $a_n u + b_n v$ converge vers $au + bv$ si, et seulement si, a_n converge vers a et b_n converge vers b .
(b) Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de $\mathbb{R}^2$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont colinéaires. Montrer que $u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $v := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ sont colinéaires.
Indication : Après avoir traité le cas où $u = 0$ ou $v = 0$, on pourra supposer par l'absurde que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ puis tout écrire dans cette base.
2. Soit A un ouvert fermé non-vide de $\mathbb{R}^2$. On supposera par l'absurde que $A \neq \mathbb{R}^2$. Soient $x \in A$ et $y \in A^c$.
(a) Donner une paramétrisation continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ du segment reliant x à y telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
(b) Justifier que $\gamma^{-1}(A)$ admet une borne supérieure, que l'on notera M .
(c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\begin{cases} B(\gamma(M), \varepsilon) \cap A \neq \emptyset; \\ B(\gamma(M), \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset. \end{cases}$
Rappelons qu'un majorant M d'une partie X de $\mathbb{R}$ est la borne supérieure de X si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in X, y > M - \varepsilon$.
(d) En déduire une contradiction.
3. Soient A un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et B une partie quelconque de $\mathbb{R}^2$.
(a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
(b) Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. *Indication : On pourra utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence.*
(c) En déduire que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
(d) L'égalité est-elle toujours vérifiée si A n'est plus supposé ouvert ?

Exercice 4. Soient g_0 et g_1 deux fonctions $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on définit la fonction $f:]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, f(x, y) := g_0\left(\frac{y}{x}\right) + xg_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ puis que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Exercice 5. Soit U un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$. Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On appelle laplacien de f la fonction $\Delta f := \partial_{xx}^2 f + \partial_{yy}^2 f$. On dit qu'une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est harmonique si $\Delta f = 0$.

1. Donner deux exemples non-affines et linéairement indépendants (il n'est pas nécessairement de le justifier) de fonctions harmoniques.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions harmoniques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.
3. Montrer que le produit de deux fonctions harmoniques n'est pas nécessairement harmonique.
4. Soient $f, g, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ telles que
 - f est harmonique ;
 - $\partial_x g = \varepsilon \partial_y h$ et $\partial_y g = -\varepsilon \partial_x h$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$.
 - (a) Montrer que g et h sont harmoniques.
 - (b) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $\langle \nabla_u g, \nabla_u h \rangle = 0$ et $\|\nabla_u g\|_2 = \|\nabla_u h\|_2$.
 - (c) Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto f(g(x, y), h(x, y))$ est une fonction harmonique.
 - (d) Montrer que gh est harmonique.
5. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique non uniformément nulle. Supposons qu'il existe $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = u(x)v(y). \tag{1}$$

- (a) Montrer que u et v ne sont pas uniformément nulles.
- (b) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, u''(x) + \lambda u(x) = 0 \\ \forall y \in \mathbb{R}, v''(y) - \lambda v(y) = 0. \end{cases}$$

Indication : après avoir calculé le laplacien de f , on pourra introduire un point où u ou v ne s'annule pas.
- (c) En déduire l'ensemble des fonctions harmoniques vérifiant une équation de la forme (1).

Exercice 6. Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule :

- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 1. A | 2. B | 3. K | 4. X |
|--------|--------|--------|--------|