

# Fonctions à deux variables

## Contrôle continu

*Durée : 2h00.*

*Toute réponse doit être justifiée.*

*Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.*

*Les appareils électroniques et tout document sont interdits.*

### Exercice 1.

1. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte.
2. Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $a \in U$ . Montrer que si  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $a$  alors les dérivées partielles de  $f$  en  $a$  existent.

*Solution :* 1) Soient  $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille d'ouverts de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  est vide alors c'est un ouvert. Supposons maintenant que ce n'est pas le cas.

Soit  $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ , c'est-à-dire  $x \in U_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme les  $U_i$  sont ouverts alors pour tout  $i$ , il existe  $\varepsilon_i > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$ . Fixons de tels  $\varepsilon_i$ . Posons  $\varepsilon := \min(\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n)$ . Alors, pour tout  $i$ ,

$$B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$$

et donc  $B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$ .

- 2) Supposons que  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $a$ . Soit  $\varepsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  et

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, a + h \in U \Rightarrow f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

Alors pour  $h \neq 0$  avec  $a + he_i \in U$

$$\frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} = \frac{d_a f(he_i) + |h| \varepsilon(h)}{h} = d_a f(e_i) + \frac{|h|}{h} \varepsilon(h)$$

Comme  $\frac{|h|}{h}$  est bornée et  $\varepsilon(h)$  converge vers 0 alors  $\frac{|h|}{h} \varepsilon(h) \rightarrow 0$  et donc

$$\frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} \rightarrow d_a f(e_i).$$

**Exercice 2.** Soient  $S, T \subset \mathbb{R}^2$ . Montrer que

1.  $\overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$  ;
2.  $\widehat{\overline{S \cap T}} = \mathring{S} \cap \mathring{T}$ .

*Solution :* 1) Comme  $S \cap T \subset S$  et  $S \cap T \subset T$  alors  $\overline{S \cap T} \subset \overline{S}$  et  $\overline{S \cap T} \subset \overline{T}$  et donc  $\overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$

2) Comme  $S \cap T \subset S$  et  $S \cap T \subset T$  alors  $\widehat{\overline{S \cap T}} \subset \mathring{S}$  et  $\widehat{\overline{S \cap T}} \subset \mathring{T}$  et donc  $\widehat{\overline{S \cap T}} \subset \mathring{S} \cap \mathring{T}$ .

Comme  $\mathring{S}$  et  $\mathring{T}$  sont deux ouverts alors  $\mathring{S} \cap \mathring{T}$  aussi. Cet ouvert est contenu dans  $S \cap T$ . Comme  $\widehat{\overline{S \cap T}}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $S \cap T$  alors  $\mathring{S} \cap \mathring{T} \cup \widehat{\overline{S \cap T}}$ .

**Exercice 3.** Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. (a) Soient  $(u, v)$  une base de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(a_n), (b_n)$  deux suites de  $\mathbb{R}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $a_n u + b_n v$  converge vers  $au + bv$  si, et seulement si,  $a_n$  converge vers  $a$  et  $b_n$  converge vers  $b$ .
- (b) Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes de  $\mathbb{R}^2$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  et  $v_n$  sont colinéaires. Montrer que  $u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  et  $v := \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$  sont colinéaires.

*Indication : Après avoir traité le cas où  $u = 0$  ou  $v = 0$ , on pourra supposer par l'absurde que  $(u, v)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  puis tout écrire dans cette base.*

2. Soit  $A$  un ouvert fermé non-vidé de  $\mathbb{R}^2$ . On supposera par l'absurde que  $A \neq \mathbb{R}^2$ . Soient  $x \in A$  et  $y \in A^c$ .
  - (a) Donner une paramétrisation continue  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  du segment reliant  $x$  à  $y$  telle que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ .
  - (b) Justifier que  $\gamma^{-1}(A)$  admet une borne supérieure, que l'on notera  $M$ .
  - (c) Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer que  $\begin{cases} B(\gamma(M), \varepsilon) \cap A \neq \emptyset; \\ B(\gamma(M), \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset. \end{cases}$   
*Rappelons qu'un majorant  $M$  d'une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est la borne supérieure de  $X$  si, et seulement si,  $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in X, y > M - \varepsilon$ .*
  - (d) En déduire une contradiction.

3. Soient  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $B$  une partie quelconque de  $\mathbb{R}^2$ .

- (a) Montrer que  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .
- (b) Montrer que  $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ . *Indication : On pourra utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence.*
- (c) En déduire que  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ .
- (d) L'égalité est-elle toujours vérifiée si  $A$  n'est plus supposé ouvert ?

*Solution :* 1)a) Supposons que  $x_n := a_n u + b_n v$  converge vers  $au + bv$ . Les applications linéaires  $p_u: xu + yv \mapsto x$ ,  $p_v: xu + yv \mapsto y$  sont des fonctions continues et donc par le critère séquentiel de continuité,

$$a_n = p_u(x_n) \longrightarrow p_u(au + bv) = a$$

et

$$b_n = p_v(x_n) \longrightarrow p_v(au + bv) = b.$$

Réciproquement, supposons que  $a_n$  converge vers  $a$  et  $b_n$  converge vers  $b$ . Alors

$$\|(a_n u + b_n v) - (au + bv)\| = \|(a_n - a)u + (b_n - b)v\| \leq |a_n - a| \|u\| + |b_n - b| \|v\| \longrightarrow 0$$

b) Si  $u = 0$  ou  $v = 0$  alors  $u$  et  $v$  sont colinéaires. Supposons que  $u$  et  $v$  sont linéairement indépendants et donc  $(u, v)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ . On peut écrire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = \alpha_n u + \beta_n v$$

et

$$v_n = \gamma_n u + \delta_n v$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma, \delta_n \in \mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $u_n$  et  $v_n$  sont colinéaires, on a :

$$\alpha_n \delta_n = \beta_n \gamma_n \tag{1}$$

Comme  $u_n \longrightarrow u$  et  $v_n \longrightarrow v$  alors par la question précédente, on a  $\alpha_n \rightarrow 1$ ,  $\beta_n \rightarrow 0$ ,  $\gamma_n \rightarrow 0$  et  $\delta_n \rightarrow 1$ . Ce qui nous permet d'obtenir une contradiction car le passage à la limite de (1) ferait que  $1 = 0$ .

2)a) La fonction  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\forall t \in [0, 1], \gamma(t) := (1 - t)x + ty.$$

convient.

2)b) Comme  $\gamma^{-1}(A)$  est une partie non-vidé de  $\mathbb{R}$ , car contenant 0, majoré par 1 alors  $\gamma^{-1}(A)$  a une borne supérieure.

c) Soit  $\varepsilon > 0$ . Fixons  $\delta > 0$  tel que

$$\forall x \in [0, 1], |x - M| < \delta \Rightarrow \|\gamma(x) - \gamma(M)\| < \varepsilon.$$

(on peut le faire grâce à la continuité de  $\gamma$ ).

Grâce à la caractérisation de la borne supérieure, on obtient un  $t \in \gamma^{-1}(A)$  tel que

$$t > M - \delta$$

On en déduit donc que  $|t - M| < \delta$  (car  $M > t$ ). Par définition de  $\delta$ , on a

$$\|\gamma(t) - \gamma(M)\| < \varepsilon$$

et  $\gamma(t) \in A$ . On en déduit que  $\gamma(t) \in B(\gamma(M), \varepsilon) \cap A$ , qui est donc non-vide.

De plus,  $M + \delta/2 \notin \gamma^{-1}(A)$  et

$$\gamma(M + \delta/2) \in B(\gamma(M), \varepsilon)$$

on en déduit donc que  $\gamma(M + \delta/2) \in B(\gamma(M), \varepsilon) \cap A^c$

d) Si  $\gamma(M) \in A$  alors  $\forall \varepsilon > 0, B(\gamma(M), \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$  contredit le fait que  $A$  soit ouvert et si  $\gamma(M) \notin A$  alors  $\forall \varepsilon > 0, B(\gamma(M), \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  contredit le fait que  $A^c$  soit ouvert (et donc que  $A$  soit fermé).

3)a) Comme  $A \cap B \subset A \cap \overline{B}$  alors  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A \cap \overline{B}}$ .

b) Soient  $x \in A \cap \overline{B}$ . Fixons une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $B$  tels que  $x_n \rightarrow x$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(x, \varepsilon) \subset A$ . Comme  $x_n \rightarrow x$ , on peut fixer  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Ainsi, la suite  $(x_n)_{n \geq N}$  est une suite de  $B(x, \varepsilon) \cap B \subset A \cap B$ , convergeant vers  $x$ . On en déduit que  $x \in \overline{A \cap B}$ .

c) On déduit de la question précédente que

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap B}.$$

Et grâce à la question a), on en déduit l'égalité désirée.

d) Prenons  $A := B_f(0, 1)$  et  $B := B((2, 0), 1)$  alors  $A \cap B = \emptyset$  et donc  $\overline{A \cap B} = \emptyset$ . De plus,  $\overline{B} = B_f((2, 0), 1)$  et donc  $\overline{A \cap \overline{B}} = A \cap \overline{B} = \{1\} \times [-1, 1]$ .

**Exercice 4.** Soient  $g_0$  et  $g_1$  deux fonctions  $]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , on définit la fonction  $f : ]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2, f(x, y) := g_0\left(\frac{y}{x}\right) + xg_1\left(\frac{y}{x}\right).$$

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  puis que

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2, x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

*Solution :* La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  comme somme, produits et composition de fonctions  $\mathcal{C}^2$ . On a, pour  $(x, y) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y) &= -\frac{y}{x^2} g'_0\left(\frac{y}{x}\right) + g_1\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} g'_1\left(\frac{y}{x}\right) \\ \partial_y f(x, y) &= \frac{1}{x} g'_0\left(\frac{y}{x}\right) + g'_1\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_{xx}^2 f(x, y) &= \frac{2y}{x^3} g'_0\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} g''_0\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} g'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2} g'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3} g''_1\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{2y}{x^3} g'_0\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} g''_0\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^3} g''_1\left(\frac{y}{x}\right) \\ \partial_{xy}^2 f(x, y) &= -\frac{1}{x^2} g'_0\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3} g''_0\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2} g''_1\left(\frac{y}{x}\right) \\ \partial_{yy}^2 f(x, y) &= \frac{1}{x^2} g''_0\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} g''_1\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2, x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

**Exercice 5.** Soit  $U$  un ouvert non-vide de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On appelle laplacien de  $f$  la fonction  $\Delta f := \partial_{xx}^2 f + \partial_{yy}^2 f$ . On dit qu'une fonction  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  est harmonique si  $\Delta f = 0$ .

1. Donner deux exemples non-affines et linéairement indépendants (il n'est pas nécessairement de le justifier) de fonctions harmoniques.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions harmoniques est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ .
3. Montrer que le produit de deux fonctions harmoniques n'est pas nécessairement harmonique.
4. Soient  $f, g, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  trois fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que
  - $f$  est harmonique ;
  - $\partial_x g = \varepsilon \partial_y h$  et  $\partial_y g = -\varepsilon \partial_x h$  avec  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ .
  - (a) Montrer que  $g$  et  $h$  sont harmoniques.
  - (b) Montrer que, pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$ ,  $\langle \nabla_u g, \nabla_u h \rangle = 0$  et  $\|\nabla_u g\|_2 = \|\nabla_u h\|_2$ .
  - (c) Montrer que la fonction  $(x, y) \mapsto f(g(x, y), h(x, y))$  est une fonction harmonique.
  - (d) Montrer que  $gh$  est harmonique.
5. Soit  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction harmonique non uniformément nulle. Supposons qu'il existe  $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions  $\mathcal{C}^2$  telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = u(x)v(y). \quad (2)$$

- (a) Montrer que  $u$  et  $v$  ne sont pas uniformément nulles.

- (b) Montrer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que 
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, u''(x) + \lambda u(x) = 0 \\ \forall y \in \mathbb{R}, v''(y) - \lambda v(y) = 0. \end{cases}$$

*Indication : après avoir calculé le laplacien de  $f$ , on pourra introduire un point où  $u$  ou  $v$  ne s'annule pas.*

- (c) En déduire l'ensemble des fonctions harmoniques vérifiant une équation de la forme (2).

*Solution :* 1) Les fonctions  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mapsto C \ln(x^2 + y^2) + D$  avec  $C, D \in \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2}$  et  $(x, y) \mapsto e^x \cos(y)$  sont harmoniques.

2) La fonction  $f \mapsto \Delta f$  est une application linéaire  $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$  comme somme et composée d'applications linéaires. Les fonctions harmoniques sont les éléments du noyau de cette application linéaire et forment donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ .

3) La fonction  $x \mapsto x$  est harmonique mais son produit avec lui-même ne l'est pas.

4)a) On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_{xx}^2 g &= \partial_x(\varepsilon \partial_y h) = \varepsilon \partial_{xy} h, \\ \partial_{yy}^2 g &= \partial_y(-\varepsilon \partial_x h) = -\varepsilon \partial_{yx} h, \\ \partial_{xx}^2 h &= \partial_x(\varepsilon \partial_y g) = \varepsilon \partial_{xy} g, \\ \partial_{yy}^2 h &= \partial_y(-\varepsilon \partial_x g) = -\varepsilon \partial_{yx} g. \end{aligned}$$

Comme  $g$  et  $h$  sont  $\mathcal{C}^2$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \Delta g &= \varepsilon \partial_{xy} h - \varepsilon \partial_{yx} h = 0 \\ \Delta h &= \varepsilon \partial_{xy} g - \varepsilon \partial_{yx} g = 0. \end{aligned}$$

b) Par hypothèse sur  $g$  et  $h$ , on a :

$$\langle \nabla g, \nabla h \rangle = \partial_x g \partial_x h + \partial_y g \partial_y h = \varepsilon \partial_y h \partial_x h - \varepsilon \partial_x h \partial_y h = 0$$

et

$$\|\nabla g\|_2 = \sqrt{(\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2} = \sqrt{(\varepsilon \partial_y h)^2 + (-\varepsilon \partial_x h)^2} = \|\nabla h\|_2.$$

c) On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_x(f(g, h)) &= \partial_x g \partial_1 f(g, h) + \partial_x h \partial_2 f(g, h) \\ \partial_{xx}^2(f(g, h)) &= \partial_{xx} g \partial_1 f(g, h) + \partial_x g (\partial_x g \partial_{11} f(g, h) + \partial_x h \partial_{21} f(g, h)) + \partial_{xx} h \partial_2 f(g, h) + \partial_x h (\partial_x g \partial_{12} f(g, h) + \partial_x h \partial_{22} f(g, h)) \\ \partial_y(f(g, h)) &= \partial_y g \partial_1 f(g, h) + \partial_y h \partial_2 f(g, h) \\ \partial_{yy}^2(f(g, h)) &= \partial_{yy} g \partial_1 f(g, h) + \partial_y g (\partial_y g \partial_{11} f(g, h) + \partial_y h \partial_{21} f(g, h)) + \partial_{yy} h \partial_2 f(g, h) + \partial_y h (\partial_y g \partial_{12} f(g, h) + \partial_y h \partial_{22} f(g, h))\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\Delta(f(g, h)) = (\Delta g) \partial_1 f(g, h) + \|\nabla g\|_2^2 \partial_{11} f(g, h) + 2 \langle \nabla g, \nabla h \rangle \partial_{12} f(g, h) + (\Delta h) \partial_2 f(g, h) + \|\nabla h\|_2^2 \partial_{22} f(g, h)$$

Comme  $g$  et  $h$  sont harmoniques, on en déduit donc que

$$\Delta(f(g, h)) = \|\nabla g\|_2^2 (\partial_{11} f(g, h) + \partial_{22} f(g, h))$$

Ce qui permet de conclure puisque  $f$  est harmonique.

d) On a, grâce aux questions précédentes,

$$\Delta(gh) = g\Delta h + 2 \langle \Delta g, \Delta h \rangle + h\Delta g = 0.$$

5)a) On sait que si  $u$  ou  $v$  est uniformément nulle alors  $f$  l'est. On en déduit le résultat par contraposée.

b) On a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 = \Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y)$$

Soit  $y_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $v(x_0) \neq 0$  (qui existe par la question précédente). Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, u''(x) + \frac{v''(y_0)}{v(y_0)} u(x) = 0.$$

Posons  $\lambda := \frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$ . On a bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, u''(x) + \lambda u(x) = 0.$$

et

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = u(x)(-\lambda v(y) + v''(y)) = 0$$

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $u(x_0) \neq 0$  (qui existe par la question précédente). On peut évaluer en  $(x_0, y)$  puis simplifier par  $u(x_0)$  pour obtenir

$$\forall y \in \mathbb{R}, v''(y) - \lambda v(y) = 0.$$

c)

- Si  $\lambda > 0$  alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

avec  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  non-simultanément nuls

- Si  $\lambda = 0$  alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = C_1 x + C_2$$

avec  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  non-simultanément nuls

- Si  $\lambda < 0$  alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = C_1 \exp(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \exp(-\sqrt{-\lambda}x)$$

et l'inverse pour  $v$ .

Réciproquement, un tel  $f$  n'est pas uniformément nulle et pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\Delta f(x, y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = -\lambda x u(x)v(y) + u(x)\lambda v(y) = 0.$$

**Exercice 6.** Pour chacune des lettres grecques suivantes, donner son nom en français et préciser s'il s'agit d'une minuscule ou d'une majuscule :

1.  $A$

2.  $B$

3.  $K$

4.  $X$

*Solution :*

1. alpha majuscule

2. beta majuscule

3. kappa majuscule

4. chi majuscule