

Analyse numérique

Contrôle continu 1

Durée : 1h30.

Toute réponse doit être justifiée.

Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques sont interdits. Une feuille de taille A4 recto de notes est autorisée.

Exercice 1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$.

1. Montrer que $x + z - y \in]x, z[$.

En particulier, $x + z - y \in I$.

2. Énoncer l'inégalité des pentes.

3. Montrer que $f(x + z - y) \leq f(x) + f(z) - f(y)$.

On pourra reformuler cette inégalité en une inégalité entre pentes que l'on prouvera à l'aide des inégalités des pentes. Pour ce faire, on pourra distinguer selon la position de $x + z - y$ par rapport à y .

Exercice 2. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$.
$$x \mapsto x \ln(x)$$

1. Montrer que f est une bijection.

Soit $a > 0$. On cherche à calculer une approximation de $f^{-1}(a)$, c'est-à-dire à résoudre numériquement l'équation

$$f(x) - a = 0. \tag{E}$$

2. Écrire explicitement l'itération de la méthode de Newton-Raphson associée à l'équation (E), sous la forme $x_{n+1} = h(x_n)$.

3. Montrer que si $x_0 > f^{-1}(a)$, la suite définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ donnée par la méthode de Newton-Raphson converge vers $f^{-1}(a)$.

4. Proposer un tel x_0 , qu'on exprimera en fonction de a .

On n'exprimera évidemment pas x_0 en faisant appel à $f^{-1}(a)$, que l'on souhaite calculer.

5. Que se passe-t-il si $x_0 \in [1, f^{-1}(a)]$?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
$$x \mapsto \arctan(x)$$

1. Vérifier brièvement que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution x^* , que l'on précisera.

2. Écrire explicitement l'itération de la méthode de Newton-Raphson associée à l'équation $f(x) = 0$, sous la forme $x_{n+1} = h(x_n)$.

3. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, convexe sur $]-\infty, 0]$ et concave sur $[0, +\infty[$. À partir de quel(s) point(s) $x_0 \in \mathbb{R}$ le résultat de convergence globale du cours assure-t-il la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la méthode de Newton-Raphson vers x^* ?

4. Étudier les variations de la fonction h et en déduire son signe.

5. (*) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$\begin{cases} |h(x)| < |x| & \text{si } 0 < |x| < r \\ |h(x)| = |x| & \text{si } |x| = r \\ |h(x)| > |x| & \text{si } |x| > r \end{cases}.$$

On n'a pas besoin de trouver explicitement r pour faire les questions suivantes

6. Représenter la courbe de f et tracer trois tangentes à la courbe de f illustrant les trois cas de la question précédente.
7. Montrer que si $|x_0| > r$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
8. Montrer que si $|x_0| < r$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x^* .
9. Que se passe-t-il si $|x_0| = r$?
10. Écrire un script Python qui calcule une valeur approchée à 10^{-5} près de r en utilisant la méthode de la dichotomie.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\alpha| > 1$. Le but de cet exercice est d'étudier la convergence uniforme des polynômes interpolateurs de Lagrange pour la fonction $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [-1, 1], f(x) := \frac{1}{x - \alpha}.$$

Soient $x_1, \dots, x_n$ des points distincts de $[-1, 1]$. Soit P_n le polynôme interpolateur de f aux nœuds $x_1, \dots, x_n$.

1. Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \left| \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right| \leq 2^n.$$

2. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$.
(b) Calculer les dérivées successives de f .
(c) En déduire que

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{(|\alpha| - 1)^{n+1}}.$$

- (d) En déduire que

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{2^n}{(|\alpha| - 1)^{n+1}}.$$

puis donner une condition suffisante sur α de convergence uniforme de P_n vers f (i.e. $\sup_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow 0$).