

Analyse numérique

Contrôle continu 1

Durée : 1h30.

Toute réponse doit être justifiée.

Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques sont interdits. Une feuille de taille A4 recto de notes est autorisée.

Exercice 1. Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$.

1. Montrer que $x + z - y \in]x, z[$.

En particulier, $x + z - y \in I$.

2. Énoncer l'inégalité des pentes.

3. Montrer que $f(x + z - y) \leq f(x) + f(z) - f(y)$.

On pourra reformuler cette inégalité en une inégalité entre pentes que l'on prouvera à l'aide des inégalités des pentes. Pour ce faire, on pourra distinguer selon la position de $x + z - y$ par rapport à y .

Solution :

1. Puisque $x < y < z$, on a $z - y > 0$, et donc $x + z - y > x$. De même, $x - y < 0$ donc $x + z - y < z$, d'où $x + z - y \in]x, z[\subset I$.

2. Soit J un intervalle de \mathbb{R} et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction g est convexe si et seulement si pour tous $a, b, c \in J$ tels que $a < b < c$,

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leq \frac{g(c) - g(a)}{c - a} \leq \frac{g(c) - g(b)}{c - b}.$$

3. L'inégalité à prouver est équivalente à $f(x + z - y) - f(x) \leq f(z) - f(y)$. En divisant par $z - y > 0$ et en remarquant que $x + y - z - x = z - y$, on obtient qu'elle est équivalente à l'inégalité de pentes :

$$\frac{f(x + z - y) - f(x)}{(x + z - y) - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \quad (1)$$

Puisque $x < x + z - y < z$ (d'après la question 1), l'inégalité des pentes avec x , $x + z - y$ et z montre que

$$\frac{f(x + z - y) - f(x)}{x + z - y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(x + z - y)}{z - (x + z - y)}. \quad (2)$$

Avec $x < y < z$, on obtient de même

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \quad (3)$$

En prenant la première inégalité de (2) et la seconde de (3), il vient

$$\frac{f(x + z - y) - f(x)}{z - y} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

On a donc bien la reformulation (1) de l'inégalité demandée.

Remarque : d'autres preuves étaient possibles. Par exemple, on pouvait appliquer l'inégalité des pentes avec $x, y, x + z - y$ puis avec $y, x + z - y, z$. On était alors amené à distinguer selon si $x + z - y$ est inférieur, égal ou supérieur à y .

Exercice 2. Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$.
 $x \longmapsto x \ln(x)$

1. Montrer que f est une bijection.

Soit $a > 0$. On cherche à calculer une approximation de $f^{-1}(a)$, c'est-à-dire à résoudre numériquement l'équation

$$f(x) - a = 0. \tag{E}$$

2. Écrire explicitement l'itération de la méthode de Newton-Raphson associée à l'équation (E), sous la forme $x_{n+1} = h(x_n)$.
3. Montrer que si $x_0 > f^{-1}(a)$, la suite définie par x_0 et $x_{n+1} = h(x_n)$ donnée par la méthode de Newton-Raphson converge vers $f^{-1}(a)$.
4. Proposer un tel x_0 , qu'on exprimera en fonction de a .
On n'exprimera évidemment pas x_0 en faisant appel à $f^{-1}(a)$, que l'on souhaite calculer.
5. Que se passe-t-il si $x_0 \in [1, f^{-1}(a)]$?

Solution :

1.
 - Injektivité : La fonction f est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables (elle est même de classe \mathcal{C}^∞) et pour tout $x \geq 1$, $f'(x) = \ln(x) + \frac{x}{x} = \ln(x) + 1 \geq 1$. Par conséquent, f est strictement croissante, donc injective.
 - Surjectivité : Soit $y \in [0, +\infty[$. On a $f(1) = 0 \leq y$. De plus, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc il existe $b \geq 1$ tel que $f(b) \geq y$. Enfin, f est continue. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [1, b]$ tel que $f(x) = y$.
2. On applique la méthode de Newton-Raphson à la fonction $g := f - a$. La fonction $g' = f'$ ne s'annule pas (on a vu en question 1 qu'elle est strictement positive). L'itération de la méthode de Newton-Raphson est

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n) - a}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n \ln(x_n) - a}{1 + \ln(x_n)} = \frac{x_n + a}{1 + \ln(x_n)}.$$

3. La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 , on a déjà vu que sa dérivée est strictement positive et, pour tout $x \geq 1$, $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$. Par conséquent, quel que soit le point $x_0 > f^{-1}(a)$, le résultat de convergence globale de la méthode de Newton-Raphson montre que la suite (x_n) converge vers la solution de $f(x) - a = 0$, c'est-à-dire vers $f^{-1}(a)$.
4. On a $f(a + e) = (a + e) \ln(a + e) \geq a + e > a$, donc $a + e > f^{-1}(a)$. On peut donc proposer $x_0 = a + e$.
5. Si $x_0 = f^{-1}(a)$, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

Supposons désormais que $x_0 < f^{-1}(a)$, c'est-à-dire que $f(x_0) < a$. Comme f'' est strictement positive, $f - a$ est strictement convexe. Par conséquent, la courbe de $f - a$ est au-dessus de sa tangente en x_0 , dont on note T_{x_0} la fonction affine associée : on a

$$f(x) - a > T_{x_0}(x) \text{ pour tout } x \in [1, +\infty[\setminus\{x_0\}. \tag{4}$$

Par définition, x_1 est le point où cette tangente coupe l'axe des abscisses, autrement dit $T_{x_0}(x_1) = 0$. De plus, $x_1 > x_0$ car $T_{x_0}(x_0) = f(x_0) - a < 0$ et car T_{x_0} est strictement croissante ; en particulier, $x_0 \in [1, +\infty[\setminus\{x_0\}$. Par conséquent, (4) conduit à $f(x_1) - a > T_{x_0}(x_1) = 0$, c'est-à-dire

$$x_1 > f^{-1}(a).$$

Le théorème de convergence globale appliqué à la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ (en partant de l'indice 1 au lieu de 0) entraîne la convergence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $f^{-1}(a)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
 $x \longmapsto \arctan(x)$

1. Vérifier brièvement que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution x^* , que l'on précisera.
2. Écrire explicitement l'itération de la méthode de Newton-Raphson associée à l'équation $f(x) = 0$, sous la forme $x_{n+1} = h(x_n)$.

- Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} , convexe sur $]-\infty, 0]$ et concave sur $[0, +\infty[$. À partir de quel(s) point(s) $x_0 \in \mathbb{R}$ le résultat de convergence globale du cours assure-t-il la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la méthode de Newton-Raphson vers x^* ?
- Étudier les variations de la fonction h et en déduire son signe.
- (*) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$\begin{cases} |h(x)| < |x| & \text{si } 0 < |x| < r \\ |h(x)| = |x| & \text{si } |x| = r \\ |h(x)| > |x| & \text{si } |x| > r \end{cases}.$$

On n'a pas besoin de trouver explicitement r pour faire les questions suivantes

- Représenter la courbe de f et tracer trois tangentes à la courbe de f illustrant les trois cas de la question précédente.
- Montrer que si $|x_0| > r$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
- Montrer que si $|x_0| < r$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x^* .
- Que se passe-t-il si $|x_0| = r$?
- Écrire un script Python qui calcule une valeur approchée à 10^{-5} près de r en utilisant la méthode de la dichotomie.

Solution :

- 0 est solution car $\arctan(0) = 0$ et c'est la seule car f est strictement croissante.
- f' ne s'annule pas sur \mathbb{R} car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x^2} \neq 0$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - (1+x^2) \arctan(x). \end{aligned}$$

- La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, d'où la stricte croissance. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, donc f'' est strictement positive sur $]-\infty, 0[$, nulle en 0 et strictement négative sur $]0, +\infty[$, d'où la convexité sur $]-\infty, 0]$ et la concavité sur $[0, +\infty[$.

Rappelons le théorème de convergence globale. Sur un intervalle $[a, b]$ contenant x^* sur lequel f est de classe \mathcal{C}^2 , croissante et vérifie $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$ (cas croissant convexe), le résultat de convergence globale assure que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x^* si on prend $x_0 \in [a, b]$ tel que $x_0 > x^*$, c'est-à-dire $x_0 > 0$. Ici, ce n'est pas possible : d'après l'étude de la dérivée seconde de f , un tel intervalle est nécessairement inclus dans $]-\infty, 0]$, ce qui empêche de choisir $x_0 > 0$.

De la même manière, dans le cas croissant concave, il faudrait prendre $x_0 < x^* = 0$. Ce n'est pas possible car tout intervalle sur lequel f est concave est inclus dans $[0, +\infty[$, ce qui empêche de choisir $x_0 < 0$.

Remarquons que dans le cas où $x_0 = 0$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, et converge donc vers 0, c'est-à-dire vers x^* . C'est le seul cas où on peut dire *a priori* que la suite converge vers x^* .

- La fonction h est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h'(x) = 1 - \left(2x \arctan(x) + \frac{1+x^2}{1+x^2} \right) = -2x \arctan(x) \leq 0$$

car $\arctan(x)$ est du signe de x . Donc h est décroissante. De plus, $h(0) = 0$. Donc h est positive sur $]-\infty, 0]$ et négative sur $[0, +\infty[$.

- Commençons par remarquer que, h étant impaire, la fonction $x \mapsto |h(x)| - |x|$ est paire, si bien qu'il suffit de prouver le résultat pour $x > 0$. Mais on a vu à la question précédente que h est négative sur $[0, +\infty[$, si bien que pour tout $x \geq 0$, $|h(x)| = -h(x)$. Par conséquent, il suffit de prouver qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\begin{cases} x + h(x) > 0 & \text{si } 0 < x < r \\ x + h(x) = 0 & \text{si } x = r \\ x + h(x) < 0 & \text{si } x > r \end{cases}.$$

On étudie les variations¹ de la fonction $\varphi : x \geq 0 \mapsto x + h(x)$, i.e.,

$$\varphi : x \geq 0 \mapsto 2x - (1 + x^2) \arctan(x).$$

Cette fonction est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \geq 0$,

$$\varphi'(x) = h'(x) + 1 = 1 - 2x \arctan(x)$$

et

$$\varphi''(x) = -2 \arctan(x) - 2x \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi, $\varphi''(0) = 0$ et pour tout $x > 0$, $\varphi''(x) < 0$. Par conséquent, φ' est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Mais $\varphi'(0) = 1 > 0$ et $\varphi'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ (car $\varphi'(x) \sim -\pi x$ en $+\infty$), donc il existe $b > 0$ tel que $\varphi'(b) < 0$.

Comme φ' est continue, le théorème des valeurs intermédiaires indique qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\varphi'(\alpha) = 0$. Comme φ' est strictement décroissante, on a $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, \alpha[$ et $\varphi'(x) < 0$ pour tout $x > \alpha$.

Ainsi, φ est strictement croissante sur $[0, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$. Mais $\varphi(0) = 0$, donc φ est strictement positive sur $]0, \alpha]$. Sur $[\alpha, +\infty[$, φ est continue, $\varphi(\alpha) > 0$, et $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ (car $\varphi(x) \sim -\frac{\pi}{2}x^2$ en $+\infty$), donc il existe $\beta > \alpha$ tel que $\varphi(\beta) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $r \in]\alpha, \beta[$ tel que $\varphi(r) = 0$. Comme φ est strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$, on a $\varphi(x) > 0$ si $x \in [\alpha, r[$ et $\varphi(x) < 0$ si $x > r$. En résumé, on a prouvé que

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0 & \text{si } x \in]0, \alpha] \cup [\alpha, r[\\ \varphi(x) = 0 & \text{si } x = r \\ \varphi(x) < 0 & \text{si } x > r \end{cases},$$

ce qu'on voulait démontrer.

6.

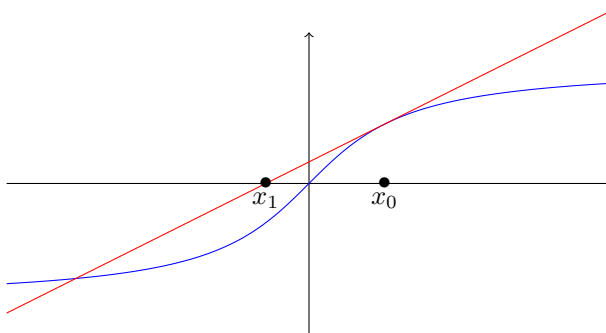


Figure 1: Cas 1 : si $|x_0| < r$, l'itération de la méthode de Newton-Raphson rapproche de 0.

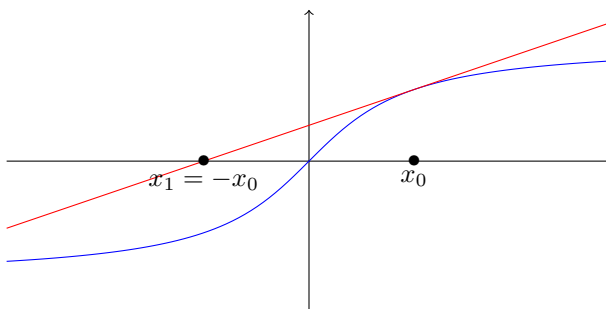


Figure 2: Cas 2 : si $|x_0| = r$, l'itération de la méthode de Newton-Raphson conserve la distance avec 0.

¹Tout ce qui suit est pénible à écrire, mais bien plus simple à comprendre en dressant un tableau de variations.

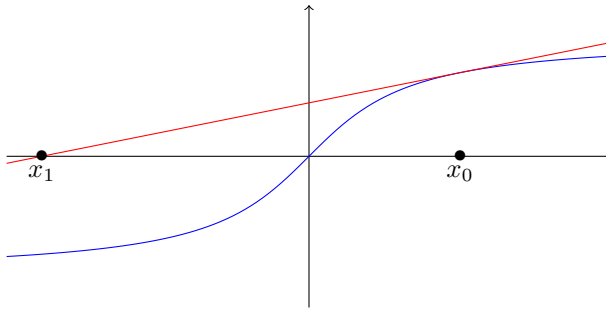


Figure 3: Cas 3 : si $|x_0| > r$, l'itération de la méthode de Newton-Raphson éloigne de 0.

7. Supposons que $|x_0| > r$. Alors une récurrence facile montre que la suite $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Supposons par l'absurde qu'elle soit bornée. Alors d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un certain $\ell \geq |x_0|$. Par imparité de h , on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1}| = |h(|x_n|)|$. Par continuité de h , $|x_{n+1}| = |h(|x_n|)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |h(\ell)| = -h(\ell)$, d'où, par unicité de la limite, $\ell = -h(\ell)$, c'est-à-dire :

$$\ell + h(\ell) = 0.$$

Mais la question précédente montre que l'équation $x + h(x) = 0$ ne possède aucune solution dans $]r, +\infty[$, donc aucune solution non plus dans $]x_0, +\infty[$, ce qui conduit à une absurdité.

8. Supposons que $|x_0| < r$. Alors une récurrence facile montre que la suite $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un certain $\ell \in [0, |x_0|[$. Comme on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1}| = |h(|x_n|)|$, la continuité de h entraîne que $|x_{n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |h(\ell)| = -h(\ell)$ et donc, par unicité de la limite, $\ell = -h(\ell)$. Mais d'après la question 5, l'équation $x + h(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0, r[$, donc pas non plus dans $]0, |x_0|]$, d'où $\ell = 0$. Ainsi, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = x^*$.

9. On a $h(r) = -r$ et $h(-r) = r$ (on le déduit de $|h(x)| = |x|$ lorsque $|x| = r$ et de l'étude du signe de h). Par conséquent, si $|x_0| = r$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alterne entre les valeurs r et $-r$.
10. Il suffit de résoudre l'équation $x + h(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$. On reprend l'algorithme vu en TP. La seule difficulté est de trouver des bornes qui conviennent pour l'utiliser. On note que

$$1 + h(1) = 2 - 2\frac{\pi}{4} > 0$$

et que, puisque $\arctan(3) > \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$,

$$3 + h(3) = 6 - 10\arctan(3) < 6 - 10\frac{\pi}{4} < 6 - 10\frac{3}{4} = -\frac{3}{2} < 0.$$

On peut donc prendre $a = 1$ et $b = 3$ comme bornes. Partant des bornes $a < b$, et en notant (x_n) la suite des milieux construite par la méthode de dichotomie, on a $|x_n - r| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$. Pour majorer l'erreur par ε , il suffit de prendre $n = \lceil \log_2(\frac{1}{\varepsilon}) + 1 \rceil$.

Voici un code possible pour calculer r à ε près.

```
import numpy as np

def f(x) :
    return 2*x - (1+x**2)*np.arctan(x)

def r(eps) :
    a = 1
    b = 3
    n = int(1 + np.log(1/eps)/np.log(2))
    for k in range(0, n) :
        x = (a+b)/2
        if f(x)*f(a) > 0 :
            a = x
```

```

else :
    b=x
return x

```

On trouve $r \simeq 1.39174$.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\alpha| > 1$. Le but de cet exercice est d'étudier la convergence uniforme des polynômes interpolateurs de Lagrange pour la fonction $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [-1, 1], f(x) := \frac{1}{x - \alpha}.$$

Soient x_1, \dots, x_n des points distincts de $[-1, 1]$. Soit P_n le polynôme interpolateur de f aux nœuds x_1, \dots, x_n .

1. Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \left| \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right| \leq 2^n.$$

2. (a) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[-1, 1]$.
 (b) Calculer les dérivées successives de f .
 (c) En déduire que

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{(|\alpha| - 1)^{n+1}}.$$

(d) En déduire que

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{2^n}{(|\alpha| - 1)^{n+1}}.$$

puis donner une condition suffisante sur α de convergence uniforme de P_n vers f (i.e. $\sup_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n(x)| \rightarrow 0$).

Solution :

1. Soit $x \in [-1, 1]$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$0 \leq |x - x_i| \leq |x| + |x_i| \leq 2.$$

Par conséquent, comme la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues et par positivité,

$$\left| \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right| = \prod_{i=1}^n |x - x_i| \leq \prod_{i=1}^n 2 = 2^n.$$

2. (a) Par définition de α , $x - \alpha$ ne s'annule pas si $x \in [-1, 1]$. On en déduit donc que f est \mathcal{C}^∞ comme quotient de fonctions \mathcal{C}^∞ (car ce sont des fonctions affines) dont le dénominateur ne s'annule pas.
 (b) Montrons, par récurrence, que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x - \alpha)^{k+1}}.$$

Initialisation : pour $k = 0$, on a, pour $x \in [-1, 1]$

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{(-1)^0 0!}{(x - \alpha)^{0+1}}.$$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété soit vraie au rang k .

Comme $f^{(k+1)}$ est la dérivée de $f^{(k)}$ et que $f^{(k)} : x \mapsto (-1)^k \frac{k!}{(x - \alpha)^{k+1}}$ par hypothèse de récurrence alors, pour $x \in [-1, 1]$

$$f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! \frac{-(k+1)}{(x - \alpha)^{k+2}} = (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(x - \alpha)^{k+2}}.$$

La propriété est donc vraie au rang $k + 1$.

Conclusion : Par le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{(x - \alpha)^{k+1}}.$$

(c) Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a, par l'inégalité triangulaire renversée :

$$|x - \alpha| \geq ||x| - |\alpha|| \stackrel{|\alpha| > 1 \geq |x|}{=} |\alpha| - |x| \stackrel{|x| \leq 1}{\geq} |\alpha| - 1 > 0.$$

On en déduit donc que pour $x \in [-1, 1]$,

$$|f^{(n)}(x)| = \left| (-1)^n \frac{n!}{(x - \alpha)^{n+1}} \right| = \frac{n!}{|x - \alpha|^{n+1}} \leq \underbrace{\frac{n!}{(|\alpha| - 1)^{n+1}}}_{\text{ne dépend pas de } x}$$

et donc,

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{(|\alpha| - 1)^{n+1}}.$$

(d) Comme f est de classe \mathcal{C}^n sur $[-1, 1]$ et

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{(|\alpha| - 1)^{n+1}},$$

on a, par le théorème 3.4 et le corollaire 3.6 des notes de cours,

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\frac{n!}{(|\alpha| - 1)^{n+1}}}{n!} \sup_{x \in [-1, 1]} \prod_{i=1}^n |x - x_i| = \frac{1}{(|\alpha| - 1)^{n+1}} \sup_{x \in [-1, 1]} \prod_{i=1}^n |x - x_i| \stackrel{1.}{\leq} \frac{1}{(|\alpha| - 1)^{n+1}} 2^n.$$

La suite $\left(\frac{1}{(|\alpha| - 1)^{n+1}} 2^n \right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{|\alpha| - 1}$ et converge vers 0 si, et seulement si, $\frac{2}{|\alpha| - 1} < 1$ i.e. $|\alpha| > 3$.