Arithmétique des polynômes

Contrôle continu

Durée : 1h30.
Toute réponse doit être justifiée.
Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1. Énoncer le théorème de Gauß (pas d'Alembert-Gauß !) et en donner une démonstration.

Exercice 2. Soient $P = 2X^4 - 4X^3 - 2X^2 - 8X + 24$ et $Q = X^4 + X^3 + 3X^2 + X + 6$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

1. Calculer leur PGCD.
2. En déduire leur décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Calculer leur PPCM.

Exercice 3. Résoudre l'équation diophantienne

$$(X^3 - 1)U + (X^2 + 1)V = 2X^2$$

d'inconnues U, V deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4. Déterminer les racines du polynôme $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant qu'elles sont en progression arithmétique.

Exercice 5. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Supposons que $P(a) > 0$, et pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $P^{(k)}(a) \geq 0$. Montrer que P n'a pas de racine sur l'intervalle $[a, +\infty[$.