Arithmétique des polynômes

Contrôle continu

Durée : 1h30.
Toute réponse doit être justifiée.
Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1.

1. Soit A un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ de racines simples $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et de coefficient dominant λ. Rappeler les formules de Viète (c'est-à-dire les relations coefficients-racines) pour ce polynôme.

2. Soient A, B_1, B_2 trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\deg(A) < \deg(B_1B_2)$ et tels que B_1 et B_2 sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe une paire de polynômes (A_1, A_2) telle que $\deg(A_1) < \deg(B_1)$, $\deg(A_2) < \deg(B_2)$ et

$$\frac{A}{B_1B_2} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2}.$$

Exercice 2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 3 tels que P soit divisible par $X+1$ et P' soit divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 3. Soient $P = X^5 + X^4 + 2X^3 - 2X^2 - 2X - 4$ et $Q = X^7 - 2X^4 - X^3 + 2$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$.

1. Calculer le PGCD de P et Q.

2. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ du polynôme P.

Exercice 4. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{3X^2 - X - 11}{X^3 - 3X^2 + 4X - 12}$$

Exercice 5. Résoudre le système de congruences suivant :

$$\begin{cases} P \equiv X^2 + X + 1 & [X^3 - X^2] \\ P \equiv 5X - 2 & [X^2 - 3X + 2] \end{cases}$$

Exercice 6. Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ (non tous deux nuls) et soient $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = \mathrm{PGCD}(A, B)$. Montrer que U et V sont premiers entre eux.