

Arithmétique des polynômes

Contrôle continu

Durée : 1h30.

Toute réponse doit être justifiée.

Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1 (Question de cours).

1. Soient $A, B, C \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que si A divise BC et que A et B sont premiers entre eux alors A divise C .
2. Soient $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 6 et $\lambda \in \mathbb{C}$. Supposons que λ soit une racine de Q d'ordre au moins 4. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient $P = X^6 + aX^4 + bX^3 + c$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ et $j := e^{2i\pi/3}$.

1. Déterminer a, b et c pour que 1 soit racine double de P et que j soit racine de P .
2. Montrer alors que $P \in \mathbb{R}[X]$ et que j est racine double.
3. Décomposer P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. Résoudre l'équation suivante

$$(X^3 - 5X^2 + 2X - 10)U + (X^3 - 4X^2 - 3X - 10)V = X^2 - 25$$

d'inconnues $U, V \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 4. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{1}{(X+1)^2(X^2+1)}$$

Exercice 5. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que

$$\{x \in \mathbb{C} \mid (P \wedge P')(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{C} \mid x \text{ est une racine multiple de } P\}.$$

2. Soit x une racine de P d'ordre $r \geq 2$. Déterminer l'ordre de x pour P' et pour $P \wedge P'$.
3. En déduire que P a $\deg(P) - \deg(P \wedge P')$ racines distinctes.

Exercice 6. Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C} \mapsto \exp(z) \in \mathbb{C}$ ne sont pas des fonctions polynomiales.