

Arithmétique

Contrôle continu

Durée : 1h30.

Toute réponse doit être justifiée.

Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1. Énoncer le théorème de Gauss.

Exercice 2. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{k=1}^n k(n+1-k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

Exercice 3. Déterminer tous les couples d'entiers $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a + 2b$ vaut 2026 et tels que le quotient de la division euclidienne de a par b vaut 6 et a pour reste 122.

Exercice 4.

1. Déterminer le PGCD de 323 et 391 et en déduire une relation de Bézout entre ces deux nombres.
2. Déterminer leur PPCM comme un produit de puissances de nombres premiers.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante :

$$162x + 207y = 27$$

Exercice 6.

1. Écrire en base 8 le nombre qui s'écrit 10011010 en base 2.
2. Écrire en base 9 le nombre qui s'écrit 1123 en base 5.

Exercice 7. Résoudre le système de congruences $\begin{cases} 2x \equiv 9 \pmod{15} \\ 5x \equiv 3 \pmod{13} \end{cases}$ et donner la plus petite solution strictement positive.