

Algèbre linéaire

Contrôle continu de seconde chance

Durée : 2h30.

Toute réponse doit être justifiée.

Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Dans cet examen, on considérera uniquement des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

Exercice 1.

1. Donner la définition d'une famille libre d'un espace vectoriel E .
2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . Montrer que f est injective si, et seulement si, f est un isomorphisme.

Exercice 2. Les ensembles suivants forment-ils un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ?

1. $A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (2x + 3y - 5z)^2 + (x - y + z)^2 = 0\}$;
2. $B := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(2) = P(5)\}$
3. $C := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, a < b, \forall x \in [a, b], f(x) = 0\}$.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) := (2y - z, 3x - 2y, -2x + 2y + z).$$

Notons M la matrice représentative de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, qui sera notée $\mathcal{B}$.

1. Donner la matrice M .
2. Calculer le rang de cette matrice.
3. Calculer le noyau de $f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On notera v_1 le générateur dont la première coordonnée vaut 4.
4. En déduire la dimension de l'image de $f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
5. Notons $v_2 := (1, 1, 1)$ et $v_3 := (2, -3, 2)$. Montrer que $\mathcal{C} := (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Donner la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{C}$. On la notera D .
7. Calculer les matrices de passage $\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ et $\text{Pass}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$.
8. Écrire la formule reliant M, D et P .
9. Calculer l'inverse de M .

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que les ensembles

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top = M\}$$

et

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top = -M\}$$

sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. On considère la fonction $\varphi: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \varphi(P) := (P', P(0))$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. En déduire que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un espace vectoriel de dimension finie.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'image V de la restriction $\varphi|_{\mathbb{R}_{\leq n}[X]}$ sur l'espace des polynômes de degré au plus n .
4. Montrer que $\varphi|_{\mathbb{R}_{\leq n}[X]}$ est un isomorphisme $\mathbb{R}_{\leq n}[X] \rightarrow V$.

Exercice 6. Soient E un espace vectoriel, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de E .

1. Montrer que f et g sont des projecteurs de même noyau si, et seulement si, $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.
2. Montrer que f et g sont des projecteurs de même image si, et seulement si, $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.

On rappelle que si p est un projecteur de E alors $E = \ker(p) \oplus \operatorname{im}(p)$.