

Analyse numérique

Contrôle de seconde chance

Durée : 2h30.

Toute réponse doit être justifiée.

Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques sont interdits. Une feuille de taille A4 de notes est autorisée.

Le sujet comporte 4 pages.

On pourra utiliser le théorème suivant sans démonstration :

Théorème (du point fixe). Soient I un intervalle fermé et $f: I \rightarrow I$ une fonction contractante (c'est-à-dire q -lipschitzienne avec $q \in [0, 1[$). Alors f admet un unique point fixe. Autrement dit,

$$\exists! x^* \in I, f(x^*) = x^*.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite définie par $\begin{cases} x_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ converge vers ce point fixe.

Exercice 1. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $g: I \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x^* \in I$ un point fixe de g . Soit $x_0 \in I$. On considère la suite définie par récurrence par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n).$$

Dans toute cette partie, pour tout $h > 0$, on notera I_h le segment $[x^* - h, x^* + h]$.

1. On suppose que $|g'(x^*)| < 1$.
 - (a) Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que $|g'(x)| < 1$ pour tout $x \in I_h$.
 - (b) En déduire que, pour un tel h , l'intervalle I_h est stable par g .
 - (c) En déduire que, pour un tel h , on a : pour tout $x_0 \in I_h$,
 - $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in I_h$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$.

On dit alors que x^* est un *point attractif* de g .

2. On suppose maintenant $|g'(x^*)| > 1$. Montrer qu'il existe $h > 0$ avec $I_h \subset I$ tel que

$$\forall x_0 \in I_h \setminus \{x^*\}, |g(x_0) - x^*| > |x_0 - x^*|.$$

On s'éloigne du point fixe x^* si le point de départ n'est pas x^* . Dans ce cas on dit que le point fixe est *répulsif*.

3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) := x^3 - 4x + 1.$$

On se propose de résoudre numériquement l'équation

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

- (a) Montrer que l'équation (1) admet 3 racines réelles notées a_1 , a_2 et a_3 avec

$$-\frac{5}{2} < a_1 < -2, \quad 0 < a_2 < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} < a_3 < 2.$$

- (b) On réécrit (1) sous la forme $x = \varphi(x)$ avec

$$\varphi: x \mapsto \frac{1}{4}(x^3 + 1).$$

Montrer que a_2 est le seul point fixe attractif de φ . Conclure.

- (c) Montrer que pour $x > \frac{1}{4}$ l'équation (1) est équivalente à $x = \varphi^+(x)$, où

$$\varphi^+: x \mapsto \sqrt{4 - \frac{1}{x}}.$$

Montrer alors que a_3 est un point fixe attractif de φ^+ .

- (d) Montrer que pour $x < 0$ l'équation (1) est équivalente à $x = \varphi^-(x)$, où

$$\varphi^-: x \mapsto -\sqrt{4 - \frac{1}{x}}.$$

Montrer alors que a_1 est un point fixe attractif de φ^- .

Exercice 2. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\int_0^1 f(t) \, dt = f(0) + \frac{f'(c)}{2}.$$

On pourra introduire la fonction $F: x \mapsto \int_0^x f(t) \, dt$ et utiliser une formule de Taylor.

2. On considère la méthode d'approximation suivante :

$$\int_0^1 f(t) \, dt \approx f(0) + \frac{f'(\alpha)}{2}$$

avec $\alpha \in]0, 1[$. On notera $I(f) := f(0) + \frac{f'(\alpha)}{2}$.

- (a) Montrer que cette méthode est d'ordre au moins 1 pour tout α .
 (b) Déterminer α pour que l'ordre de la méthode soit au moins 2 ? Est-elle d'ordre 3 ?
 3. On prend la méthode associée au α de la question précédente. On suppose la fonction f de classe $\mathcal{C}^3$.
 (a) Montrer qu'il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que

$$\int_0^1 f(t) \, dt = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(0) + \frac{1}{24}f'''(\xi).$$

- (b) En déduire que

$$\left| \int_0^1 f(t) \, dt - I(f) \right| \leq \frac{5}{72} \sup_{t \in [0, 1]} |f'''(t)|.$$

Indication : On pourra utiliser une formule de Taylor pour f' en α .

Exercice 3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ lipschitzienne de constante $L > 0$. On va considérer l'équation différentielle $y' = f(y)$.

1. Montrer qu'il existe une constante $h_0 > 0$, telle que pour tout $h \in]-h_0, h_0[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, alors l'équation

$$x = y + hf(x)$$

admet une unique solution, notée $x_{y,h}$.

On pourra voir cette équation comme un problème de point fixe.

On fixe un tel h_0 et on considère la fonction $G: (y, h) \in \mathbb{R} \times]-h_0, h_0[\mapsto x_{y,h} \in \mathbb{R}$.

2. Que vaut $G(y, 0)$?
3. Montrer que pour $h < \frac{1}{L}$, la fonction $y \mapsto G(y, h)$ est lipschitzienne.
4. On admet que G est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer les dérivées partielles $\partial_y G$ et $\partial_h G$ en $h = 0$.
On pourra dériver l'égalité respectée par G .
5. Soit $\theta \in [0, 1]$. On étudie le schéma défini comme suit :

$$x_{n+1} = x_n + h[(1 - \theta)f(x_n) + \theta f(x_{n+1})] \quad (E_\theta)$$

avec $h > 0$.

- (a) Quelles méthodes obtient-on pour $\theta = 0$ et $\theta = 1$?
- (b) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $h := \frac{1}{n}$. Prenons $f := x \in \mathbb{R} \mapsto Lx \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
 - i. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que x_n soit bien défini.
 - ii. Calculer x_n en fonction de L, θ, n et x_0 .
 - iii. En déduire la limite (si elle existe) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- (c) Montrer qu'il existe $h(\theta) > 0$, tel que si $h \in]0, h(\theta)[$, alors le schéma (E_θ) est bien défini. Sous cette condition, écrire le schéma sous la forme

$$x_{n+1} = x_n + hF(x_n, h).$$

On exprimera F en fonction de G .

- (d) En déduire que l'on peut choisir $h(\theta)$ pour que la schéma (E_θ) soit stable.
- (e) Calculer $\partial_h F(x, 0)$.
- (f)
 - i. Montrer que pour $\theta \in [0, 1]$, l'ordre de consistance de la méthode est au moins 1. En déduire la convergence de la méthode pour h bien choisi.
 - ii. Montrer que l'ordre de consistance de la méthode est au moins 2 si, et seulement si, $\theta = \frac{1}{2}$.

Exercice 4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Donner le polynôme P de degré inférieur à n tel que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, P(x_i) = f(x_i).$$

- (b) Déterminer le polynôme P de degré strictement inférieur à 4 tel que

$$P(0) = 9, P(1) = 21, P'(1) = 18, P''(1) = 14.$$

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré strictement inférieur à $\beta := \sum_{i=1}^n (\alpha_i + 1)$ tel que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall j \in \{0, \dots, \alpha_i\}, P^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i).$$

On pourra introduire une application linéaire de façon analogue aux démonstrations du cours.

3. (a) Justifier qu'il existe une unique famille $(R_i, 0 \leq i \leq n+1, p_j, 0 \leq j \leq n)$ telle que

$$\begin{cases} R_0 = P \\ \forall i \in \{0, \dots, n\}, R_i = p_i + (X - x_i)^{\alpha_i+1} R_{i+1} \\ \forall i \in \{0, \dots, n\}, \deg(p_i) \leq \alpha_i \\ R_{n+1} = 0. \end{cases}$$

- (b) Montrer que

$$P = p_0 + \sum_{i=1}^n p_i \prod_{r=0}^{i-1} (X - x_r)^{\alpha_r+1}.$$

- (c) Montrer que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall j \in \{0, \dots, \alpha_i\}, p_i^{(j)}(x_i) = R_i^{(j)}(x_i).$$

(d) Déterminer, en fonction des R_i et de leurs dérivées, les coefficients (a_{ik}) tels que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, p_i = \sum_{k=0}^{\alpha_i} a_{ik} (X - x_i)^k.$$

(e) Déterminer p_0 en fonction de f et de ses dérivées puis expliquer comment calculer les autres p_i .

(f) Le but de cette question est de coder en `python` le calcul de P en fonction de f et des dérivées. On considérera les polynômes comme une liste de nombres : la liste $[a_0, \dots, a_n]$ correspondra au polynôme $\sum_{k=0}^n a_k X^k$. On pourra utiliser sans les coder

- la somme de deux polynômes que l'on écrira `P+Q`,
 - le produit de deux polynômes que l'on écrira `P*Q`,
 - la puissance de polynômes par un entier que l'on écrira `pow(P,n)`,
 - le degré de polynôme que l'on écrira `deg(P)`,
 - et l'évaluation d'un polynôme en un nombre que l'on écrira `eval(P,x)`.
- i. Écrire une fonction prenant en argument deux polynômes P et Q ($\neq 0$) et renvoie le quotient et le reste de P par Q .
 - ii. Écrire une fonction prenant en argument un polynôme P et un entier naturel n ($\leq \deg(P)$) et renvoie le polynôme P dérivé n fois.
 - iii. Écrire une fonction prenant en argument un polynôme P et un nombre x et qui renvoie les coordonnées de P dans la base $(1, X - x, (X - x)^2, \dots, (X - x)^n, \dots)$ (comme dans la question d)).
 - iv. (*) Écrire une fonction prenant en argument une fonction et toutes ses dérivées, $x_0, \dots, x_n$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ et qui renvoie le polynôme associé à ces données dans la question 2.

4. On suppose $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_n$. Soit $x \in [a, b]$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ telle que

$$f(x) = P(x) + \prod_{i=0}^n (x - x_i)^{\alpha_i + 1} \frac{f^{(\beta)}(\xi)}{\beta!}.$$