L1 MPC-MI-DL ; L2 PPPE
2022-2023

Arithmétique des polynômes

Examen de seconde chance

Durée : 1h30.
Toute réponse doit être justifiée.
Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1. Énoncer le théorème des restes chinois et en donner une démonstration.

Exercice 2. Résoudre l'équation diophantienne

$$(X^2+X+1)U+(X^4+1)V=X$$

d'inconnues U, V deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. Soit $P=X^4+\frac{1}{4}X^2-\frac{3}{4}X+\frac{1}{4}$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que $\frac{1}{2}$ est une racine multiple de P.
2. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 4.

1. Montrer que $-\frac{1}{2}$ est l'unique racine réelle du polynôme $(X+1)^3+X^3$.
2. En déduire que $-\frac{1}{2}$ est l'unique racine réelle du polynôme $(X+1)^6-X^6$.
3. Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit $P\in\mathbb{R}[X]$ défini par $P=(X+1)^7-X^7-a$. Déterminer a pour que P admette une racine réelle multiple.

Exercice 5.

1. Soit $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$ un polynôme de degré $n\geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Démontrer que si P admet une racine dans $\mathbb{Z}$, alors celle-ci divise a_0.
2. Les polynômes $X^3-X^2-109X-11$ et $X^{10}+X^5+1$ ont-ils des racines dans $\mathbb{Z}$?