L1 MPC-MI-DL ; L2 PPPE
2023-2024

Arithmétique des polynômes

Examen de seconde chance

Durée : 1h30.
Toute réponse doit être justifiée.
Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1.
1. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non-nul. Soit R le reste de la division euclidienne de A par B. Montrer que les diviseurs communs de A et B sont exactement les diviseurs communs de B et R.
2. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Donner la définition (et non une façon de le calculer) du PGCD de A et B.

Exercice 2. Soient $P = X^6 - X^4 - X^2 + 1$ et $Q = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$.
1. Déterminer le PGCD de P et Q.
2. En déduire les racines communes de P et Q ainsi que leur multiplicité (comme racine de P et comme racine de Q).
3. Donner la factorisation en facteurs irréductibles de P et Q dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle suivante

$$\frac{4X^2 - 13X + 13}{X^4 + 4X^3 + 5X^2 + 8X + 6}.$$

Indication : Le dénominateur a deux racines « évidentes ».

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et soit $P_n = X^n + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$
1. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme P_n par le polynôme $(X-1)^2$.
2. Soit $k < n$. Calculer le coefficient dominant du reste de la division euclidienne de P_n par $(X-1)^k$.

Exercice 5.
1. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes tels que A^2 divise B^2. Montrer que A divise B.
2. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non-nuls. Montrer que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $A + B$ et AB sont premiers entre eux.
   Indication : On pourra montrer que si A et B sont premiers entre eux alors A et $A + B$ aussi.