L1 MPC-MI-DL ; L2 PPPE
2023-2024

Arithmétique des polynômes

Examen de seconde chance

Durée : 1h30.
Toute réponse doit être justifiée.
Les correcteurs tiendront compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1.

1. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ avec B non-nul. Soit R le reste de la division euclidienne de A par B. Montrer que les diviseurs communs de A et B sont exactement les diviseurs communs de B et R.
2. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Donner la définition (et non une façon de le calculer) du PGCD de A et B.

Solution : 1) On notera Q le quotient de A par B. Soit D un diviseur commun de A et de B. Alors D divise aussi BQ et donc $A - BQ = R$. C'est donc aussi un diviseur commun de A et B. Réciproquement, si D est un diviseur commun de B et R alors c'est aussi un diviseur de BQ et donc de $BQ + R = A$.

2) C'est l'unique polynôme D nul ou unitaire dont les diviseurs sont les diviseurs communs de A et B, c'est-à-dire tel que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P \mid D \Leftrightarrow P \mid A \text{ et } P \mid B$$

Exercice 2. Soient $P = X^6 - X^4 - X^2 + 1$ et $Q = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$.

1. Déterminer le PGCD de P et Q.
2. En déduire les racines communes de P et Q ainsi que leur multiplicité (comme racine de P et comme racine de Q).
3. Donner la factorisation en facteurs irréductibles de P et Q dans $\mathbb{R}[X]$.

Solution : 1) $\mathrm{PGCD}(X^6 - X^4 - X^2 + 1, X^4 + 2X^3 - 2X - 1) = X^3 + X^2 - X - 1 = (X+1)^2(X-1)$.

2) Grâce à l'égalité précédente, 1 est racine de P et Q d'ordre au moins 1 et -1 est une racine au moins double de P et Q. On a

$$\begin{cases} P'(1) = 0,\ Q'(1) = 8 \neq 0 \\ P''(1) = P''(-1) = 16 \neq 0, Q''(-1) = 0, Q'''(-1) = -12 \neq 0 \end{cases}$$

On en déduit donc que 1 est racine d'ordre 2 de P et d'ordre 1 de Q et 1 est racine d'ordre 2 de P et d'ordre 3 de Q.

3) On obtient $P = (X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)$ et $Q = (X-1)(X+1)^3$.

Exercice 3. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle suivante

$$\frac{4X^2-13X+13}{X^4+4X^3+5X^2+8X+6}.$$

Indication : Le dénominateur a deux racines « évidentes ».

Solution : On trouve que $X^4+4X^3+5X^2+8X+6=(X+1)(X+3)(X^2+2)$ puis en notant F la fraction rationnelle considérée :

$$\begin{aligned} F &= \frac{5}{X+1}-\frac{4}{X+3}-\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{2}}i}{X+i\sqrt{2}}-\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}i}{X-i\sqrt{2}} \\ &= \frac{5}{X+1}-\frac{4}{X+3}-\frac{X+3}{X^2+2} \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et soit $P_n = X^n + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

1. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme P_n par le polynôme $(X-1)^2$.
2. Soit $k < n$. Calculer le coefficient dominant du reste de la division euclidienne de P_n par $(X-1)^k$.

Solution : 1) Par définition du reste de la division euclidienne, le reste R de la division de P_n par $(X-1)^2$ est de degré strictement inférieur à 2 i.e. $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$. Si on note Q le quotient de cette division euclidienne, on obtient :

$$P_n = Q(X-1)^2 + aX + b$$

En évaluant en 1, on obtient $a+b = 1+1+1 = 3$. En dérivant puis en évaluant en 1, on obtient $a = P_n'(1) = n+1$. On obtient donc $b = 2-n$. On en déduit donc que le reste est $(n+1)X + (2-n)$.

2) Comme on a fait le cas $k=2$ dans la question précédente, on va supposer $k \geq 3$. Comme P_n est à coefficients rationnels, on peut écrire son développement de Taylor :

$$P_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{P_n^{(i)}(1)}{i!}(X-1)^i$$

On en déduit que le reste de la division euclidienne de P_n par $(X-1)^k$ est

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{P_n^{(i)}(1)}{i!}(X-1)^i$$

et son coefficient dominant est $\frac{P_n^{(k-1)}(1)}{(k-1)!}$. Comme $P_n^{(k-1)} = (X^n)^{(k)}$ (car $k \geq 3$) alors

$$\frac{P_n^{(k-1)}(1)}{(k-1)!} = \frac{(X^n)^{(k-1)}(1)}{(k-1)!} = \frac{\frac{n!}{(n-k+1)!}}{(k-1)!} = \binom{n}{k-1}.$$

Exercice 5.

1. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes tels que A^2 divise B^2. Montrer que A divise B.
2. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes non-nuls. Montrer que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $A+B$ et AB sont premiers entre eux.
   Indication : On pourra montrer que si A et B sont premiers entre eux alors A et $A+B$ aussi.

Solution : Soient $P_1, \dots, P_n$ les diviseurs irréductibles unitaires de A et B (on supposera que si $i \neq j$ alors $P_i \neq P_j$). Alors grâce à la décomposition en facteurs irréductibles, A et B s'écrivent de la façon suivante :

$$A = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i} \text{ et } B = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\beta_i}$$

avec $\alpha_i, \beta \geq 0$. Si A^2 divise B^2 alors pour tout i, $2\alpha_i \leq 2\beta_i$. On en déduit que pour tout i, $\alpha_i \leq \beta_i$ et donc A divise B.

2) Supposons que A et B sont premier entre eux. Par Bezout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AU + BV = 1$. On obtient alors

$$A(U - V) + (A + B)V = 1$$

On en déduit que A et $A + B$ sont premiers entre eux. On montre de la même façon que B et $A + B$ sont premiers entre eux. Comme A et B sont premiers entre eux alors AB et $A + B$ sont premiers entre eux. En effet, si D est un diviseur irréductible de AB et $A+B$ alors il divise soit A soit B (par irréductibilité) et comme ces deux polynômes sont premiers avec $A + B$, on en déduit que D est constant.

Réciproquement, si on suppose que AB et $A+B$ sont premiers entre eux alors comme $\mathrm{PGCD}(A, B)$ divise A et B alors $\mathrm{PGCD}(A, B)$ divise AB et $A + B$ et donc leur PGCD qui vaut 1. On en déduit que $\mathrm{PGCD}(A, B) = 1$ i.e. A et B sont premiers entre eux.