L3 PPPE
2024-2025

Suites et Séries numériques

Contrôle de seconde chance

Durée : 2h30.
Toute réponse doit être justifiée.
Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.
Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1.

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que u_n converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et v_n converge $\ell' \in \mathbb{R}$. Montrer que $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.
2. Donner la définition (et non une caractérisation !) qu'une suite (u_n) est négligeable devant une autre suite (v_n).
3. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\sum u_n$ est convergente et
   - pour $n \in \{7, \dots, 10\}$, $v_n = n^2 u_n$;
   - pour les autres $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n$.

   Que peut-on dire de la nature de $\sum v_n$?
4. Énoncer le critère de d'Alembert pour les séries numériques.

Exercice 2.

1. Les nombres suivants sont-ils rationnels ? $\sqrt{12}$, $\frac{\ln(256)}{\ln(4)}$.
2. Écrire le développement décimal des fractions suivantes : $\frac{30}{77}$, $\frac{468}{3125}$.
3. Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres rationnels suivants : $0.\underline{17}$, $0,02\underline{7}$

Exercice 3. On utilisera dans cet exercice uniquement les définitions du cours.

1. Démontrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n^2-4}{n^2+3}$ converge vers 1
2. Démontrer que la suite de terme général $u_n = n^3 + 7$ converge vers $+\infty$.

Exercice 4. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

ont la même limite

Exercice 5.

1. Donner les trois racines de $X^3 + 2X^2 - X - 2$. *On pourra les noter ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 et continuer sans avoir fait la question (avec $\ell_3 > \ell_2 > \ell_1$).*
   Soit (A_n) la suite définie par $A_0 = A_1 = 0$ et $A_2 = 1$ et telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+3} = -2A_{n+2} + A_{n+1} + 2A_n \tag{*}$$
2. Déterminer les trois suites géométriques (a_n), (b_n) et (c_n) de valeur initiale $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ vérifiant la relation de récurrence (*).

   On supposera dans la suite que la raison de (c_n) est supérieure à celle de (b_n) qui est supérieure à celle de (a_n).
3. Déterminer l'unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que
   $$\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 + \gamma c_0 = A_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = A_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = A_2 \end{cases}$$
   On pourra soustraire la troisième ligne à la première. On pourra admettre le résultat pour faire les questions suivantes.
4. En déduire, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$P_n = \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n.$$
5. Trouver un équivalent simple de (P_n).

Exercice 6.

1. Calculer (si cela est défini) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)} \mathrm{d}x$.
2. En déduire la nature de $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$.

Exercice 7. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \ \sum_{n\geq 1} 3\ln(n) n e^{-\sqrt{n}}, \ \sum \frac{2^n\sqrt{n^{17}+4}}{42n^{10}+1}, \ \sum \frac{(-1)^n}{4n^2 - 28n + 45}$$