

Suites et Séries numériques

Contrôle de seconde chance

Durée : 2h30.

Toute réponse doit être justifiée.

Le correcteur tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la présentation.

Les appareils électroniques et tout document sont interdits.

Exercice 1.

1. Énoncer le théorème des gendarmes puis le montrer.
2. Donner la définition (et non une caractérisation !) qu'une suite (u_n) est équivalente à une autre suite (v_n) .
3. Énoncer le théorème de comparaison série-intégrale.

Exercice 2.

1. Les nombres suivants sont-ils rationnels ? $\sqrt{32} + \sqrt{18}$, $\frac{\ln(17)}{\ln(4)}$.
2. Écrire le développement décimal des fractions suivantes : $\frac{4}{91}$, $\frac{1449}{1875}$.
3. Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres rationnels suivants : $0.\underline{4}2$, $0,03\underline{1}7$

Exercice 3. On utilisera dans cet exercice uniquement les définitions du cours.

1. Démontrer que la suite de terme général $u_n = \frac{2+n}{n^2-3}$ converge vers 0
2. Démontrer que la suite de terme général $u_n = n^4 - 7$ converge vers $+\infty$.

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} = au_n^2. \end{cases}$$

Notons $k := |au_0|$.

1. Montrer que $k = \left| \frac{u_1}{u_0} \right|$.
2. On va supposer que $k < 1$.
 - (a) Montrer que (u_n) est décroissante.
 - (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq ku_n.$$

- (c) En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 5.

1. Calculer (si cela est défini) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + a} dx$ pour $a \geq 1$.
2. En déduire la nature de $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{x^2 + a}$ pour $a \geq 1$.

Exercice 6. Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum \frac{n^2 + 1}{n^2 + 4}, \quad \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \left(1 - \cos \left(\frac{1}{n} \right) \right), \quad \sum_{n \geq 1} \ln(n+1) e^{-\sqrt{n^2-1}}, \quad \sum \frac{e^n (n^2 + 4)}{\sqrt{2^{4n} + 2}}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}$$