L1 MPCIE
2021–2022

Colles Géométrie

---

1 Questions de cours

1. Définitions droite (équations cartésienne/paramétrique)
2. Droites parallèles, droites perpendiculaires
3. Cinquième postulat d'Euclide (+démo)
4. Premier postulat d'Euclide (+démo)
5. Formule de Cauchy-Schwarz
6. Montrer que le déterminant de deux vecteurs du plan est nul si, et seulement si, les vecteurs sont colinéaires.

2 Exercices *

Exercice 1 – Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $4x - 3y = 12$. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}$. Faire de même pour la droite d'équation $2x = 5$.

Exercice 2 – Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $7x + 8y = 3$. Donner l'équation d'une droite parallèle (resp. perpendiculaire) à $\mathcal{D}$.

Exercice 3 – Soient $A = (2, 3)$ et $B = (-3, 7)$ deux points du plan affine. Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique de la droite (AB).

Exercice 4 – Soit $P = (1, 4)$ un point et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x + 4y = 7$. Trouver la droite parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par P.

Exercice 5 – Soient $\vec{u} = (1, -3)$ et $\vec{v} = (3, 7)$ deux vecteurs. Calculer le produit scalaire $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ et le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 6 – Soient $A = (1, 3)$ et $B = (6, -5)$ deux points du plan affine euclidien. Calculer la distance AB.

Exercice 7 – Soient $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $4x - 3y = 12$ et $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $x + 2y = 3$. Montrer que ces deux droites sont sécantes et calculer l'intersection

Exercice 8 – Soit $\mathcal{D}$ la droite dirigée par $\vec{u} = (-1, 1)$ et passant par $A = (3, 4)$. Donner la paramétrisation de la droite $\mathcal{D}'$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par $(-1, -1)$.

Exercice 9 – Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x - 4y + 2 = 0$. Donner l'équation des droites $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ parallèles à $\mathcal{D}$ à distance $1/5$ de $\mathcal{D}$.

Exercice 10 – Trouver l'équation d'une droite $\mathcal{D}$ tangente au cercle unité (de centre $(0, 0)$ de rayon 1) passant par $(4, 5)$.

3 Exercices **

Exercice 11 – On considère les droites $\mathcal{D}$ passant par $A = (-1, 1)$ et dirigée par $\vec{u} = (-1, 2)$, et $\mathcal{D}'$ passant par $A' = (1, 2)$ et dirigée par $\vec{u}' = (1, 3)$.

1. Déterminer des représentations paramétriques de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On utilisera le paramètre s pour la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et le paramètre t pour la représentation paramétrique de $\mathcal{D}'$.
2. Soit $P_s = (x(s), y(s))$ un point de $\mathcal{D}$ et soit $Q_t = (x'(t), y'(t))$ un point de $\mathcal{D}'$. Donner les coordonnées du milieu de $[P_sQ_t]$;
3. Démontrer qu'il n'existe qu'un point P_s de $\mathcal{D}$ et qu'un point Q_t de $\mathcal{D}'$ tels que le milieu de $[P_sQ_t]$ soit le point $B = (-1, 5)$.

Exercice 12 – Soit $s \in \mathbb{R}$. Soient $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $2sx + 3y = 4$ et $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $x + y = 1$. Déterminer (quand il existe) le point d'intersection de ses deux droites.

Exercice 13 – Soient $\mathcal{D}_1 : (\lambda - 3)x - (3\lambda + 1)y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : (\lambda - 1)x + (2\lambda + 3)y + 4 = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer le(s) $\lambda \in \mathbb{R}$ pour le(s)quel(s) $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles (resp. perpendiculaires).

Exercice 14 – Soient Γ le graphe de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + x \in \mathbb{R}$, $A = (3, 11)$ et $P_t = (t, t^2 + t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{T}_t$ la tangente de Γ en P_t. Écrire l'équation de la droite $\mathcal{T}_t$ et trouver le(s) t tel(s) que $(AP_t) = \mathcal{T}_t$

Exercice 15 – Soient $A = (1, 3)$, $B_s = (s, 7)$ (avec $s \in \mathbb{R}$ fixé).

1. Déterminer C_s l'unique point de la droite (AB_s), distinct de B_s, tel que $AB_s = AC_s$;
2. Déterminer une équation pour la droite $\mathcal{D}_s$ perpendiculaire à (AB_s) passant par A ;
3. Notons E_s l'unique point de la droite $\mathcal{D}_s$, distinct de D_s, tel que $AD_s = AE_s$. Montrer que $[B_sD_sC_sE_s]$ est un losange et déterminer pour quel(s) $s \in \mathbb{R}$ ce losange est un carré ;

Exercice 16 – Soient $A = (1, 4)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x - y + 3 = 0$.

1. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ de paramètre t;
2. Soit $P_t = (x(t), y(t))$ un point de $\mathcal{D}$. Donner la distance AP_t ;
3. Pour quel t, cette distance est-elle minimale ? Donner une interprétation géométrique.

4 Exercices ***

Exercice 17 – Le but de cet exercice est de montrer la formule suivante :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|u\|\|v\| \cos(\widehat{u, v}) \tag{1}$$

1) Soit $\vec{u} = (1, 0)$ et $\vec{v}$ de norme 1. Montrer que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \cos(\widehat{u, v})$$

2) Montrer que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ est invariant par rotation i.e. si on note $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application $(x, y) \mapsto (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y) \in \mathbb{R}^2$ alors on veut monter que

$$\langle R_\theta \vec{u}, R_\theta \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

En déduire que pour toute paire de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de norme 1, on a

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \cos(\widehat{u, v})$$

3) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle \lambda \vec{u}, \mu \vec{v} \rangle = \lambda\mu \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

En déduire (1).

Exercice 18 – Le but de cet exercice est de montrer la formule suivante :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \|u\|\|v\|\sin(\widehat{u,v}) \tag{2}$$

1) Soit $\vec{u} = (1,0)$ et $\vec{v}$ de norme 1. Montrer que

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \sin(\widehat{u,v})$$

2) Montrer que $\det(\vec{u},\vec{v})$ est invariant par rotation i.e. si on note $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application $(x,y) \mapsto (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y) \in \mathbb{R}^2$ alors on veut monter que

$$\langle R_\theta \vec{u}, R_\theta \vec{v}\rangle = \langle \vec{u},\vec{v}\rangle$$

En déduire que pour toute paire de vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ de norme 1, on a

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \sin(\widehat{u,v})$$

3) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$,

$$\det(\lambda\vec{u}, \mu\vec{v}) = \lambda\mu \det(\vec{u},\vec{v})$$

En déduire (2).