Cours : Algèbre élémentaire

Antoine Boivin

1 Trigonométrie

1.1 Fonctions trigonométriques

1.1.1 Définitions sur $]-\pi, \pi]$

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé standard.

Définition 1.1.1. Le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ est l'ensemble des points à distance 1 de l'origine i.e.

$$\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

On munit du cercle d'une "orientation" (i.e. un "sens pour le parcourir") dite "trigonométrique" ou "anti-horaire".

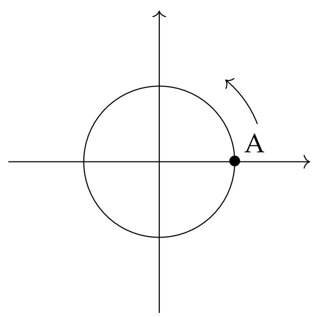


FIGURE 1 – Le cercle trigonométrique

Notons A le point de coordonnée $(1, 0)$.

Proposition 1.1.2. *Tout point du cercle P détermine et est déterminé par un "angle orienté" (secteur angulaire) $\widehat{AOP}$ décrit par l'arc de plus petit longueur allant de A à P (Si P a pour coordonnée $(-1, 0)$, on privilégie l'arc parcourant le cercle dans le sens trigonométrique).*

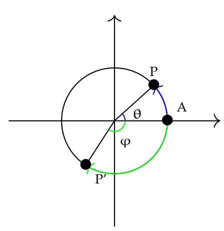


FIGURE 2 – Deux exemples d'angles orientés : $\theta > 0$ et $\varphi < 0$

Définition 1.1.3. La mesure principale de l'angle orienté $\widehat{AOP}$ est la longueur (avec signe[1]) de l'arc le décrivant.

Remarque 1.1.4.
— Par la convention, la mesure de l'angle orienté $\widehat{AOA'}$, où A' est le point de coordonnée $(-1, 0)$ est π.
— La mesure principale d'un angle appartient à $]-\pi, \pi]$.
— Tout $\theta \in]-\pi, \pi]$ est la mesure d'un angle orienté.

Définition 1.1.5. Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$. Notons P le point du cercle trigonométrique correspondant à l'angle θ. Alors $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point P et $\sin(\theta)$ est son abscisse.

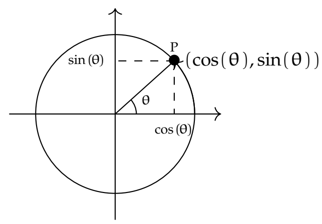


FIGURE 3 – Définition de cos et sin

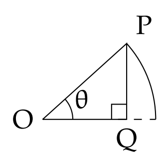
Proposition 1.1.6. *Cela correspond à la définition introduite en géométrie du triangle i.e. si* $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *alors*

$$\sin(\theta) = \frac{\textit{longueur du côté opposé}}{\textit{longueur de l'hypothénuse}}$$

et

$$\cos(\theta) = \frac{\textit{longueur du côté adjacent}}{\textit{longueur de l'hypothénuse}}$$

Démonstration. Considérons le morceau de la figure 3 suivant :



Alors $OP = 1$ (par définition du cercle trigonométrique), $OQ = \cos(\theta)$ et $PQ = \sin(\theta)$ (par construction). On en déduit alors les formules. $\square$

1.1.2 Extension sur $\mathbb{R}$

Lemme 1.1.7. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, *il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\theta_0 := \theta - 2k\pi \in]-\pi, \pi]$.

Démonstration. Soit $\theta \in \mathbb{R}, \theta \geq 0$. Notons n la partie entière[2] de $\frac{\theta}{2\pi}$. Alors $0 \leq \frac{\theta}{2\pi} - n < 1$ et donc $0 \leq \theta - 2\pi n < 2\pi$. Si $\theta - 2\pi n \leq \pi$ alors on pose $k := n$ et sinon on pose $k := n + 1$.

Si $\theta \leq 0$ alors $-\theta \geq 0$. Par le raisonnement précédent, on peut prendre $m \in \mathbb{Z}$ tel que $-\theta - 2m\pi \in]-\pi, \pi]$. Ainsi $\theta - (-2m\pi) \in [-\pi, \pi[$. On pose $k := m$ si $\theta - (-2m\pi) > -\pi$ et $k := m + 1$ sinon. $\square$

1. positif s'il parcourt le cercle dans le sens trigonométrique et négatif sinon
2. qui existe par les propriétés de $\mathbb{R}$

Remarque 1.1.8. Il n'existe qu'un seul élément de $]-\pi, \pi]$ vérifiant cette propriété.

Définition 1.1.9. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Notons par θ_0 l'unique élément de $]-\pi, \pi]$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$, $\theta = \theta_0 + 2k\pi$. Alors on définit

$$\begin{cases} \cos(\theta) := \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta) := \sin(\theta_0) \end{cases}$$

Cela définit ainsi deux fonctions $\cos, \sin \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 1.1.10. *Les fonctions* cos *et* sin *sont* 2π*-périodiques.*

Démonstration. Soit $\theta = \theta_0 + 2k\pi \in \mathbb{R}$. Alors $\theta + 2\pi = \theta_0 + 2(k+1)\pi \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\cos(\theta) = \cos(\theta_0) = \cos(\theta + 2\pi)$$

et

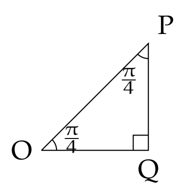
$$\sin(\theta) = \sin(\theta_0) = \sin(\theta + 2\pi)$$

□

Proposition 1.1.11.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(\theta)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(\theta)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Démonstration. Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$:



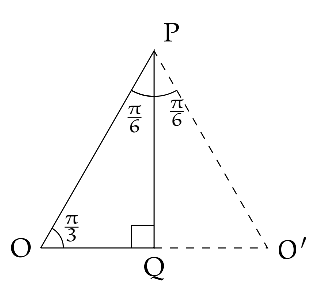
Comme la somme des angles d'un triangle est π alors si un triangle rectangle a un angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ or l'autre est aussi de mesure $\frac{\pi}{4}$. On en déduit que OPQ est un triangle isocèle et donc $PQ = OQ$. Par conséquent, par le théorème de Pythagore,

$$OP = \sqrt{OQ^2 + PQ^2} = \sqrt{2OQ^2} = OQ\sqrt{2} = OP\sqrt{2}.$$

On en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{OP}{OP\sqrt{2}} = \frac{OQ}{OQ\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{6}$:



En prenant le symétrique de O par rapport à PQ, on obtient un triangle $OO'P$ dont tous les angles sont de mesure $\frac{\pi}{6}$. C'est donc un triangle équilatéral et $OP = O'P = OO'$. De plus, on sait que $OQ = QO' = \frac{OO'}{2}$ (par construction de O') et donc, par Pythagore,

$$PQ = \sqrt{OP^2 - OQ^2} = \sqrt{OP^2 - \frac{1}{4}OP^2} = OP\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit donc que

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{OQ}{OP} = \frac{\frac{OP}{2}}{OP} = \frac{1}{2},$$

et

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{PQ}{OP} = \frac{OP\frac{\sqrt{3}}{2}}{OP} = \sqrt{3}2.$$

□

1.1.3 Propriétés

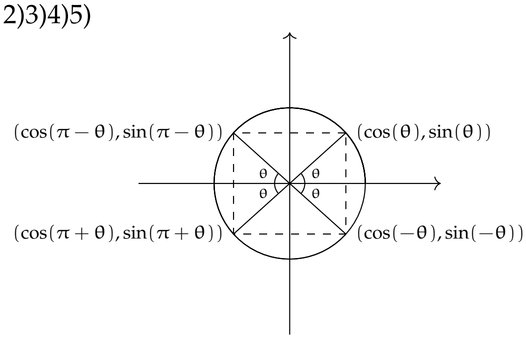
Proposition 1.1.12. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *Alors*

1. $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$;
2. $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ *[*cos *est paire] ;*
3. $\sin(\theta) = -\sin(-\theta)$ *[*sin *est impaire] ;*
4. $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$ *et* $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$;
5. $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$ *et* $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$.

Démonstration. Par périodicité de cos et sin, il suffit de le montrer pour $\theta \in]-\pi, \pi]$.

1) Par construction, si $\theta \in]-\pi, \pi]$ alors $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ car $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ est sur le cercle trigonométrique.

2)3)4)5)



□

Proposition 1.1.13. — *La fonction* cos *s'annule uniquement en* $\pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

— *La fonction* sin *s'annule uniquement en* $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1.1.14.

— *La fonction* cos *est croissante sur* $[-\pi, 0]$ *et décroissante sur* $[0, \pi]$.

— *La fonction* sin *est croissante sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *et décroissante sur* $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Démonstration. On le démontrera avec les identités remarques des fonctions trigonométriques. □

Proposition 1.1.15. *Les fonctions* cos *et* sin *sont continues sur tout* $\mathbb{R}$.

Démonstration. On le démontrera avec les identités remarques des fonctions trigonométriques. □

1.1.4 Tangente

Définition 1.1.16. La fonction tangente, notée tan, est la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

Proposition 1.1.17. — *La fonction* tan *est* π*-périodique.*
— *La fonction* tan *est impaire.*
— *La fonction* tan *s'annule en* $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. 1) Comme sin et cos sont 2π-périodiques alors $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ l'est aussi. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x).$$

Ainsi, tan est π-périodique.
2) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Alors

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

3) La fonction tan s'annule aux mêmes points que son numérateur sin. □

1.1.5 Identités remarquables

Proposition 1.1.18. *Pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

Corollaire 1.1.19. *Pour tout* $\beta \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos(\beta)$ *et* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin(\beta)$

Démonstration. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(-\beta) = \cos(-\beta) + 0\sin(-\beta) = \cos(\beta)$$

et

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) = \sin(\beta).$$

□

Proposition 1.1.20. *Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors*
— $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
— $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.
— $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$.
Si, de plus, $\alpha, \beta, \alpha + \beta \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
— $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Démonstration. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(-\beta) + \cos(\alpha)\sin(-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta),$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos(\beta) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(\beta) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

et

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(-\beta)-\sin(\alpha)\sin(-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Supposons $\alpha,\beta,\alpha+\beta\notin\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. Alors

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}\\&=\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\right)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)\left(1-\frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}\right)}\\&=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.21. *Soit* $\alpha\in\mathbb{R}$*,*
- $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)=2\cos^2(\alpha)-1=1-2\sin^2(\alpha)$ *;*
- $\sin(2\alpha)=2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$ *;*

Si $\alpha,2\alpha\notin\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ *alors*
- $\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

Démonstration. On applique les formules de la proposition précédente avec $\alpha=\beta$ et pour les égalités de $\cos(2\alpha)$, on utilise la formule $\cos^2+\sin^2\equiv1$. □

Corollaire 1.1.22. *Soit* $\alpha\in\mathbb{R}$*. Alors*

$$\sin^2(\alpha)=\frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))\ \textit{et}\ \cos^2(\alpha)=\frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$$

Corollaire 1.1.23. *Soient* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*. Alors*
- $\sin(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$ *;*
- $\cos(\alpha)\cos(\beta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$ *;*
- $\sin(\alpha)\sin(\beta)=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ *;*
- $\sin(\alpha)+\sin(\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ *;*
- $\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ *;*
- $\sin(\alpha)-\sin(\beta)=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ *;*
- $\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$*.*

Démonstration. Les trois premières égalités se démontrent en développant le terme de droite. Les quatre suivantes se déduisent de celles-ci. □

Corollaire 1.1.24. *Si* $x,y\in[-\pi,0]$*, alors* $y\geq x\Rightarrow\cos(y)\geq\cos(x)$ *et si* $x,y\in[0,\pi]$ *alors* $y\geq x\Rightarrow\cos(y)\leq\cos(x)$*.*

Démonstration. Soient $x,y\in[-\pi,0]$ tels que $y\geq x$. Alors

$$\cos(y)-\cos(x)=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

Comme $-\pi \leq \frac{x+y}{2} \leq 0$ et $0 \leq \frac{y-x}{2} \leq \pi$ alors $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 0$ et $\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \geq 0$ et donc $\cos(y) - \cos(x) \geq 0$. Soient $x, y \in [0, \pi]$ tels que $y \geq x$. Alors $x - \pi, y - \pi \in [-\pi, 0]$ et $y - \pi \geq x - \pi$ et donc

$$\cos(y) - \cos(x) = -\cos(y - \pi) + \cos(x - \pi) = -(\cos(y - \pi) - \cos(x - \pi)) \leq 0.$$

□

Corollaire 1.1.25. *Si* $x, y \in [-\pi/2, \pi/2]$, *alors* $y \geq x \Rightarrow \sin(y) \geq \sin(x)$ *et si* $x, y \in [\pi/2, 3\pi/2]$ *alors* $y \geq x \Rightarrow \sin(y) \leq \sin(x)$.

Démonstration. Soient $x, y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tels que $y \geq x$. Alors

$$\sin(y) - \sin(x) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

Comme $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x+y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \frac{y-x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 0$ et $\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \geq 0$ et donc $\sin(y) - \sin(x) \geq 0$.

Soient $x, y \in [\pi/2, 3\pi/2]$ tels que $y \geq x$. Alors $x - \pi, y - \pi \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $y - \pi \geq x - \pi$ et donc

$$\sin(y) - \sin(x) = -\sin(y - \pi) + \sin(x - \pi) = -(\sin(y - \pi) - \sin(x - \pi)) \leq 0.$$

□

Cela démontra la proposition 1.1.14.

Lemme 1.1.26. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leq |t|$.

Proposition 1.1.27.
— $\lim_{t \to 0} \sin(t) = 0$;
— $\lim_{t \to 0} \cos(t) = 1$;

Démonstration. Dans 1.1.26, on a vu que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$-t \leq \sin(t) \leq t.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{t \to 0} \sin(t) = 0$. Au voisinage de 0 (e.g. sur $[-\pi/4, \pi/4]$), $\cos(x)$ est positive et donc

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(t)}$$

Par composition des limites, $\lim_{t \to 0} \cos(t) = \sqrt{1 - 0^2} = 1$. □

Corollaire 1.1.28. *Soit* $a \in \mathbb{R}$.
— $\lim_{t \to a} \sin(t) = \sin(a)$;
— $\lim_{t \to a} \cos(t) = \cos(a)$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sin(t) - \sin(a) = 2\sin\left(\frac{a-t}{2}\right)\cos\left(\frac{a+t}{2}\right)$$

Si $t \to a$ alors $t - a \to 0$ et donc $\sin\left(\frac{a-t}{2}\right) \to 0$ (par 1.1.27).
De plus, comme $t \mapsto \cos\left(\frac{a+t}{2}\right)$ est bornée et

$$\lim_{t \to a} \sin(t) - \sin(a) = 0.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos(t) - \cos(a) = -2\sin\left(\frac{a+t}{2}\right)\sin\left(\frac{a-t}{2}\right)$$

Si $t \to a$ alors $t - a \to 0$ et donc $\sin\left(\frac{a-t}{2}\right) \to 0$ (par 1.1.27).
De plus, comme $t \mapsto \sin\left(\frac{a+t}{2}\right)$ est bornée et

$$\lim_{t \to a} \cos(t) - \cos(a) = 0.$$

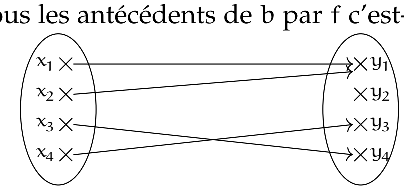
$\square$

Cela montre la proposition 1.1.15.

1.2 Équations trigonométriques

1.2.1 Contexte général

Soit $f : X \to Y$ une fonction et $b \in Y$. « Résoudre l'équation $f(x) = b$ » signifie trouver tous les antécédents de b par f c'est-à-dire trouver tous les $x \in X$ qui ont pour image b.



Ici, l'ensemble des solutions de $f(x) = y_1$ est $\{x_1, x_2\}$, ce lui de $f(x) = y_2$ est l'ensemble vide $\emptyset$, celui de $f(x) = y_3$ est $\{x_4\}$ et celui de $f(x) = y_4$ est $\{x_3\}$.

Dans ce cours, on va regarder $f = \cos, \sin, \tan$ et $f = \alpha\cos + \beta\sin$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1.2.2 $f = \sin$

Lemme 1.2.1. *Si* $|b| > 1$ *alors* $\sin(x) = b$ *n'a pas de solution.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. $\square$

Lemme 1.2.2. *Si* $-1 \leq b \leq 1$ *alors il existe un unique point* $x_b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *tel que* $\sin(x_b) = b$.

Démonstration. Comme sin est une fonction continue et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $x_b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x_b) = b$. De plus, sin étant strictement croissante sur cet intervalle, un tel x_b est unique. $\square$

Comme $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ alors $\pi - x_b$ est aussi une solution de $\sin(x) = b$. Ainsi,

— si $-1 \leq b < 1$ alors $f(x) = b$ a deux solutions sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

— si $b = 1$ alors $f(x) = b$ a une unique solution $\frac{\pi}{2}$ sur cet intervalle.

De plus, par 2π-périodicité, si x est solution alors $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ est aussi une solution.

Théorème 1.2.3. *Soit* $b \in \mathbb{R}$. *L'ensemble des solutions de* $\sin(x) = b$ *est :*

— $\emptyset$ *si* $|b| > 1$ *;*

— $\{x_b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x_b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ *où* x_b *est l'unique solution compris dans* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *pour* $-1 < b < 1$ *;*

— $\left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *pour* $b = \pm 1$.

1.2.3 $f = \cos$

Lemme 1.2.4. *Si* $|b| > 1$ *alors* $\cos(x) = b$ *n'a pas de solution.*

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. □

Lemme 1.2.5. *Si* $-1 \leq b \leq 1$ *alors il existe un unique point* $x_b \in [0, \pi]$ *tel que* $\cos(x_b) = b$.

Démonstration. Comme cos est une fonction continue et $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $x_b \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x_b) = b$. De plus, cos étant strictement décroissante sur cet intervalle, un tel x_b est unique. □

Comme $\cos(x) = \cos(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ alors $-x_b$ est aussi une solution de $\cos(x) = b$. Ainsi,

Théorème 1.2.6. *Soit* $b \in \mathbb{R}$. *L'ensemble des solutions de* $\cos(x) = b$ *est :*
- $\emptyset$ *si* $|b| > 1$;
- $\{x_b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x_b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ *où* x_b *est l'unique solution compris dans* $[0, \pi]$ *pour* $-1 < b < 1$;
- $\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ *pour* $b = 1$.
- $\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ *pour* $b = -1$.

1.2.4 $f = \tan$

Lemme 1.2.7. *Soit* $b \in \mathbb{R}$. *Il existe un unique* $x_b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que* $\tan(x_b) = b$.

Démonstration. Comme tan est une fonction continue et $\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires (généralisé), il existe un $x_b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(x_b) = b$. De plus, tan étant strictement croissante sur cet intervalle, un tel x_b est unique.

□

Théorème 1.2.8. *Soit* $b \in \mathbb{R}$. *L'ensemble des solutions de* $\tan(x) = b$ *est* $\{x_b + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

1.2.5 $f = \alpha \cos + \beta \sin$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Lemme 1.2.9. *Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(x - \theta).$$

Démonstration. Si $\alpha = 0 = \beta$ alors l'égalité est vérifiée.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos(x) + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin(x) \right)$$

Le point $\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \right)$ étant sur le cercle unité, il existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \cos(x) + \beta \sin(x) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\cos(\theta) \cos(x) + \sin(\theta) \sin(x)\right) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(x - \theta)$$

□

Théorème 1.2.10. *L'ensemble des solutions de* $\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)=b$ *est :*
- $\emptyset$ *si* $|b|>\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ *;*
- $\{\theta+x_{\frac{b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\theta-x_{\frac{b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ *où* $x_{\frac{b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}$ *désigne une solution de* $\cos(x)=\frac{b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

2 Nombres complexes

2.1 Généralités sur les nombres complexes

On considère l'ensemble $\mathbb{R}^2 := \{(a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$. On le munit de deux lois :

$$(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d)$$

et

$$(a,b)(c,d) := (ac-bd, ad+bc)$$

Proposition 2.1.1. *Pour tout* $u,v,w\in\mathbb{R}^2$,

1. $(0,0)+u=(0,0)+u=u$ *[*$0:=(0,0)$ *est l'élément neutre de* $+$*]*
2. $u+(v+w)=(u+v)+w$ *[*$+$ *est associative] ;*
3. $u+v=v+u$ *[*$+$ *est commutative] ;*
4. $u\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w$ *[*$\cdot$ *est distributive par rapport à* $+$*] ;*
5. $(1,0)\cdot u=u\cdot(1,0)=u$ *[*$1:=(1,0)$ *est l'élément neutre de* $\cdot$*] ;*
6. $uv=vu$.

Démonstration. Exercice □

Remarque 2.1.2.
- $(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$ et $(a,0)\cdot(b,0)=(ab,0)$. L'ensemble $\{(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}$ est stable pour $+$ et $\times$ et ces deux lois coïncident avec celle de $\mathbb{R}$. On identifiera cette ensemble avec $\mathbb{R}$ en identifiant $(a,0)$ avec a.
- $(0,1)^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$. On obtient un nombre dont le carré est -1. On le notera i ; on a $i^2=-1$.
- $(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+bi$. Avec cette écriture, les opérations deviennent :

  $$(a+bi)+(c+di)=(a+b)+(c+d)i$$

  et

  $$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

  c'est-à-dire ce que l'on obtient en développant et en prenant $i^2=-1$.

Notation 2.1.3. On notera $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des lois $+$ et $\cdot$ et on notera ses éléments $a+bi$ (avec $a,b\in\mathbb{R}$) qu'on appelera nombre complexe.

Définition 2.1.4. L'écriture $a+bi$ d'un nombre complexe est la forme algébrique et (a,b) est appelé affixe de ce nombre complexe.

Remarque 2.1.5. On a l'équivalence : $a+bi=c+di \iff a=c$ et $b=d$.

Proposition 2.1.6. *Soit* $z=a+bi\in\mathbb{C}^*$. *Il existe un (unique)* z' *tel que* $zz'=1$.

Démonstration. Si $a \neq 0$ alors pour tout $z' = c + di \in \mathbb{C}$, on a les équivalences suivantes

$$zz' = 1 \Leftrightarrow (a+bi)(c+di)1 = 1 \Leftrightarrow (ac-bd)+(ad+bc) = 1+0i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac-bd = 1 \\ ad+bc = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac+b\frac{bc}{a} = 1 \\ d = -\frac{bc}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right) = 1 \\ d = -\frac{bc}{a} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{a}{a^2+b^2} \\ d = -\frac{bc}{a} = -\frac{b}{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow z' = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

□

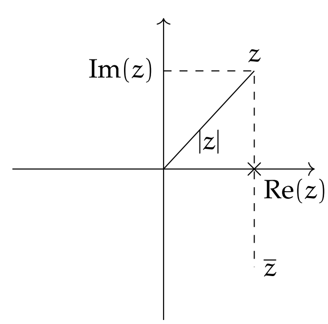
Notation 2.1.7. On notera $\frac{1}{z}$ l'inverse ainsi obtenu.

Remarque 2.1.8. Avec toutes ces propriétés, on dit que $\mathbb{C}$ est un corps commutatif (comme $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$).

Notation 2.1.9. Si $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$, on notera $\frac{a}{b}$ le produit $a\frac{1}{b}$.

Définition 2.1.10. Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$ un nombre complexe. On appelle
- conjugué de z, noté $\overline{z}$, le complexe $a - bi$;
- partie réelle de z, noté $\mathrm{Re}(z)$, le réel a ;
- partie imaginaire de z, noté $\mathrm{Im}(z)$, le réel b ;
- module de z, noté $|z|$, le réel $\sqrt{a^2+b^2}$.

Remarque 2.1.11. Géométriquement, on a les interprétations suivantes :
- la partie réelle de z correspond à l'abscisse de l'affixe de z ;
- la partie imaginaire de z correspond à l'ordonnée de l'affixe de z ;
- le module de z correspond à la distance à 0 de l'affixe de z ;
- le conjugué de z correspond au symétrique par rapport à l'axe des abscisses de l'affixe de z



Ainsi, l'ensemble des affixes des complexes de module r est le cercle de rayon r.

Proposition 2.1.12. *Soit* $z \in \mathbb{C}$. *Alors*
- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$;
- $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$;
- $z\overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$;
- $|\overline{z}| = |z|$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $z = a + bi$. Alors
- $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$;
- $z - \overline{z} = a + bi - a + bi = 2bi = 2i\mathrm{Im}(z)$;
- $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$;

— $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

□

Corollaire 2.1.13. *Soient* $z \in \mathbb{C}$. *Alors* $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ *et* $||z|| = |z|$.

Démonstration. On a les équivalences suivantes :
$z = \overline{z} \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow 2i\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$.

On a :

$$||z|| = \left|\sqrt{a^2 + b^2}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

□

Remarque 2.1.14. Ainsi, le module d'un réel est sa valeur absolue.

Corollaire 2.1.15. *Soit* $z \in \mathbb{C}^*$. *Alors* $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ *et si* $a \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$ *alors* $\frac{a}{b} = \frac{a\overline{b}}{|b|^2}$.

Démonstration. Comme $z\overline{z} = |z|^2$ et que $z \in \mathbb{C}^*$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Et donc si $b \neq 0$ alors

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b} = a\frac{\overline{b}}{|b|^2}.$$

□

Proposition 2.1.16. *Soient* $z, w \in \mathbb{C}$. *Alors*

— $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

— $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;

— $|zw| = |z||w|$.

Démonstration. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + bi$ et $w = c + di$. Alors

— $\overline{z + w} = \overline{a + bi + c + di} = a + c - (b - d)i = a - bi + c - di = \overline{z} + \overline{w}$;

— $\overline{zw} = \overline{ac - bd + (ad + bc)i} = ac - bd - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z}\,\overline{w}$.

— $|zw| = \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{zw\overline{zw}} = |zw|$.

□

Avertissement 2.1.17.

— $\mathrm{Re}(zw) \neq \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w)$ (prendre $z = w = i$);

— $\mathrm{Im}(zw) \neq \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)$ (prendre $z = 1$ et $w = i$).

Lemme 2.1.18. *Soient* $z, w \in \mathbb{C}$. *Alors*

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2.$$

Démonstration. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + bi$ et $w = c + di$. Alors

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= |(a + c) + (b + d)i|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2(ac + bd) \end{aligned}$$

On conclut avec l'égalité :

$$ac + bd = \mathrm{Re}((a + bi)(c - di)) = \mathrm{Re}(z\overline{w})$$

□

Théorème 2.1.19 (Inégalité triangulaire)**.** *Soient* $z, w \in \mathbb{C}$. *Alors*

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

avec égalité si, et seulement si, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0}$, $\lambda z = \mu w$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que

$$\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} \leq \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = |z|.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2\end{aligned}$$

Comme la racine carré est décroissante, on en déduit que $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Si $\lambda = 0 = \mu$ alors $z = w = 0$ et donc la formule est vérifiée.
Si $\lambda z = \mu w$ avec $\lambda, \mu \geq 0$ et non simultanément nuls, alors, quitte à intervertir z et w, on peut supposer w non nul (et donc $\lambda \neq 0$) et $\lambda = 1$ en divisant μ par λ et donc $z = \mu w$. D'où

$$\mathrm{Re}(z\overline{w}) = \mathrm{Re}(\mu w\overline{w}) = \mu|w|^2 = |\mu w||w| = |z||w|.$$

Réciproquement, si $\mathrm{Re}(z\overline{w}) = |z||w| \geq 0$ alors, comme

$$0 = |z\overline{w}|^2 - \mathrm{Re}(z\overline{w})^2 = \mathrm{Im}(z\overline{w})^2$$

alors $z\overline{w} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et si on note ce nombre λ, on obtient

$$\lambda w = z\overline{w}w = z\underbrace{|w|^2}_{\geq 0}.$$

□

Corollaire 2.1.20. *Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Alors*

$$||z| - |w|| \leq |z - w|$$

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w| \quad \text{et } |w| = |w - z + z| \leq |w - z| + |z|.$$

On en déduit donc que

$$\begin{cases} |z| - |w| \leq |z - w| \\ |w| - |z| \leq |z - w| \end{cases}$$

et donc

$$||z| - |w|| = \max(|z| - |w|, |w| - |z|) \leq |z - w|.$$

□

Lemme 2.1.21. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $\frac{z}{|z|}$ est de module 1.*

Démonstration. On a :

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{||z||} = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

□

L'affixe de $\frac{z}{|z|}$ est donc sur le cercle unité i.e. il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que

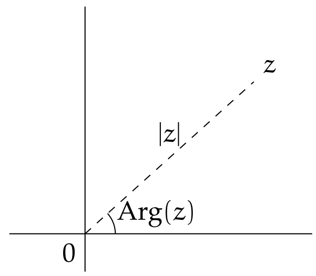
$$\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

(i.e. la forme algébrique de $(\cos(\theta), \sin(\theta))$).

Théorème 2.1.22. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que*

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Définition 2.1.23. Cette écriture est appelée forme trigonométrique et θ est l'argument de z, noté $\operatorname{Arg}(z)$.



Corollaire 2.1.24. *Soient $z, w \in \mathbb{C}^*$. Alors*

$$z = w \Leftrightarrow |z| = |w| \text{ et } \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(w).$$

Démonstration. L'implication est claire. Réciproquement, si $|z| = |w|$ et $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(w)$ alors

$$z = |z|(\cos(\operatorname{Arg}(z)) + i\sin(\operatorname{Arg}(z))) = |w|(\cos(\operatorname{Arg}(w)) + i\sin(\operatorname{Arg}(w))) = w.$$

□

Remarque 2.1.25. Par 2π-périodicité de cos et sin, on peut remplacer la condition d'égalité de l'argument par celle de la congruence modulo 2π.

Proposition 2.1.26. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors*
- *Si* $\operatorname{Re}(z) > 0$ *alors* $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)$
- *Si* $\operatorname{Re}(z) = 0$ *alors* $\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } \operatorname{Im}(z) > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Im}(z) < 0 \end{cases}$
- *Si* $\operatorname{Re}(z) < 0$ *alors* $\operatorname{Arg}(z) \equiv \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi \; [2\pi]$

Démonstration. Si $\operatorname{Re}(z) > 0$ alors $\operatorname{Arg}(z) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et comme

$$\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{|z|\sin(\operatorname{Arg}(z))}{|z|\cos(\operatorname{Arg}(z))} = \tan(\operatorname{Arg}(z))$$

on en déduit que

$$\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)$$

Si $\operatorname{Re}(z) = 0$ alors $z = bi$ avec $b \in \mathbb{R}^*$. Si $b > 0$ alors $z = be^{i\frac{\pi}{2}}$ et si $b < 0$ alors $z = |b|(-i) = |b|e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Si $\operatorname{Re}(z) < 0$ alors $\operatorname{Re}(-z) > 0$ et donc

$$\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Im}(-z)}{\operatorname{Re}(-z)}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)$$

Comme $z = (-z)e^{i\pi}$, on en déduit le résultat voulu. □

Proposition 2.1.27. *Soient $z, w \in \mathbb{C}^*$. Alors*

$$\operatorname{Arg}(zw) \equiv \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)\ [2\pi]$$

En particulier, si $a \in \mathbb{R}^*$ alors

$$\operatorname{Arg}(az) = \begin{cases} \operatorname{Arg}(z) \text{ si } a > 0 \\ \operatorname{Arg}(z) \pm \pi \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Démonstration. Notons θ l'argument de z et φ l'argument de w. On a alors :

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))|w|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\ &= |z||w|(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) + i(\cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi)) \\ &= |z||w|(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)) \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\operatorname{Arg}(zw) \equiv \theta + \varphi \equiv \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)\ [2\pi].$$

La deuxième partie vient du fait que

$$\operatorname{Arg}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ \pi & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

□

Corollaire 2.1.28. *Soient $z, w \in \mathbb{C}^*$. Alors*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \operatorname{Arg}(z^n) \equiv n\operatorname{Arg}(z)\ [2\pi]$;
2. $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Arg}(z)$ *et* $\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) \equiv \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(w)[2\pi]$.

Démonstration. 1) On montre cet énoncé par récurrence :

— si $n = 0$ alors $\operatorname{Arg}(z^0) = \operatorname{Arg}(1) = 0 = 0\operatorname{Arg}(z)$

— soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la proposition vraie au rang n. Alors

$$\operatorname{Arg}(z^{n+1}) = \operatorname{Arg}(z^n z) \equiv \operatorname{Arg}(z^n) + \operatorname{Arg}(z) \overset{HR}{\equiv} n\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(z) = (n+1)\operatorname{Arg}(z).$$

2) Cela vient du fait que $-\operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$ et

$$0 = \operatorname{Arg}(1) = \operatorname{Arg}\left(z\frac{1}{z}\right) \equiv \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right)$$

On a alors

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) \equiv \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{w}\right) = \operatorname{Arg}(z) - \operatorname{Arg}(w)$$

□

Corollaire 2.1.29 (Formule de Moivre)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx).$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$|(\cos(x) + i\sin(x))^n| = |(\cos(x) + i\sin(x))|^n = 1^n = 1 = |(\cos(nx) + i\sin(nx))|$$

et

$$\operatorname{Arg}(\cos(x) + i\sin(x))^n) \equiv n\operatorname{Arg}(\cos(x) + i\sin(x))) \equiv nx \equiv \operatorname{Arg}(\cos(nx) + i\sin(nx)).$$

On en déduit donc l'égalité voulue par unicité de la forme trigonométrique. □

Définition 2.1.30 (Formule d'Euler)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. L'exponentielle de $i\theta$ est définie par :

$$e^{i\theta} = \exp(i\theta) \coloneqq \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Remarque 2.1.31. Dans ce cours, c'est une définition mais c'est un théorème que l'on démontre avec les développements en série entière de $\cos, \sin$ et $\exp$.

Lemme 2.1.32. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \overline{e^{i\theta}}.$$

Démonstration. On a :

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta).$$

□

Proposition 2.1.33. *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration. On a :

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta)$$

et

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) - \cos(\theta) + i\sin(\theta)}{2i} = \sin(\theta)$$

□

Définition 2.1.34. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. La formule exponentielle de z est :

$$z = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)}$$

Proposition 2.1.35. *Soient* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$$

et

$$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n.$$

Démonstration. C'est une réécriture des formules sur les arguments. □

2.1.1 Binôme de Newton

Définition 2.1.36. Soient $k, n \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (prononcé « k parmi n ») est défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

où $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Proposition 2.1.37. *Soient* $2 \leq k \leq n$. *Alors* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration. On a :

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{(n-k)}\right)$$
$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

□

Remarque 2.1.38. A partir de cette formule et des égalités $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut retrouver tous les coefficients binomiaux :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Théorème 2.1.39 (Binôme de Newton)**.** *Soient* $a, b \in \mathbb{C}$. *Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence sur n :

— pour $n = 0$, $(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{0-k}$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n. Alors

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \overset{HR}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$
$$\overset{\text{chgt de var}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$
$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n-k+1} + b^{n+1}$$
$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

□

Exemple 2.1.40. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos^4(2\theta) = \left[\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right]^4 = \frac{e^{16i\theta} + 4e^{4i\theta} + 6 + 4e^{-4i\theta} + e^{-16i\theta}}{16}$$
$$= \frac{1}{8}\cos(16\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta) + \frac{3}{8}.$$

2.2 Géométrie des nombres complexes

Définition 2.2.1. Une similitude de $\mathbb{C}$ est une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme $f\colon z \mapsto az + b$ avec $a \neq 0$.

Définition 2.2.2. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une similitude. C'est

- une homothétie de rapport a et de centre ω si $a \in \mathbb{R}^*$ et $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = a(z - \omega) + \omega$;
- une translation de vecteur de translation b si $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = z + b$;
- une rotation de centre ω et d'angle θ si $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

Remarque 2.2.3. Une rotation d'angle $2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) est l'identité.

Proposition 2.2.4. *Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une rotation d'angle différente de l'identité et de centre ω. Alors ω est l'unique point fixe de f i.e. $f(\omega) = \omega$.*

Démonstration. Comme $f \neq \mathrm{id}$ alors son angle de rotation peut être choisi dans $\theta \in]-\pi, \pi] \setminus \{0\}$. Le complexe ω est un point fixe de f :

$$f(\omega) = e^{i\theta}(\omega - \omega) + \omega = \omega.$$

Réciproquement, si x est un point fixe de f alors

$$x = e^{i\theta}(x - \omega) + \omega$$

et donc

$$0 = (e^{i\theta} - 1)(x - \omega)$$

Par hypothèse, sur θ, $e^{i\theta} - 1 \neq 0$ et donc $x = \omega$. □

Proposition 2.2.5. *Une similitude avec un point fixe est la composée d'une rotation et d'une homothétie.*

Démonstration. Soit $f : z \in \mathbb{C} \mapsto az + b \in \mathbb{C}$ (avec $a = |a|e^{i\theta}$). Soit ω un point fixe de f i.e. $a\omega + b = \omega$. Alors

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b = az - a\omega + \omega = a(z - \omega) + \omega &= re^{i\theta}(z - \omega) + \omega \\ &= |a|\left(\left(e^{i\theta}(z - \omega) + \omega\right) - \omega\right) + \omega \\ &= h_{|a|,\omega} \circ r_{\theta,\omega}(z)\end{aligned}$$

où $h_{|a|,\omega}$ est l'homothétie de centre ω et de rapport $|a|$ et $r_{\theta,\omega}$ est la rotation de centre ω et de l'angle θ. □

Remarque 2.2.6. On remarque que l'existence d'un point fixe est équivalente au fait que $a \neq 1$. Le point fixe est alors $\frac{b}{1-a}$.

Proposition 2.2.7. *L'homothétie de rapport a multiplie toutes les distances par $|a|$.*

Démonstration. Notons $h_{a,\omega}$ l'homothétie de centre ω et de rapport a. La distance entre deux points de $\mathbb{R}^2$ est le module des nombres complexes correspondants :

$$\begin{aligned}\forall z, w \in \mathbb{C}, \mathrm{dist}(h_{a,\omega}(z), h_{a,\omega}(w)) = |h_{a,\omega}(z) - h_{a,\omega}(w)| &= |a(z - \omega) + \omega - a(w - \omega) - \omega| \\ &= |a(z - w)| = |a||z - w| = |a|\mathrm{dist}(z, w).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.8. *Les rotations $r_\theta : z \mapsto e^{i\theta}z$ de centre 0 préservent les distances et en particulier les modules : $\forall z \in \mathbb{C}, |r_\theta(z)| = |z|$.*

Démonstration. Soient $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(r_\theta(z), r_\theta(w)) &= |r_\theta(z) - r_\theta(w)| = |e^{i\theta}z - e^{i\theta}w| \\ &= |e^{i\theta}(z-w)| = |e^{i\theta}||z-w| = |z-w| = \operatorname{dist}(z,w).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.9. *Soient* A *et* B *deux points du plan, d'affixe respective* z_A *et* z_B. *Alors*

1. *L'ensemble* $\{M \in \mathbb{R}^2$ *d'affixe* $z \mid |z - z_A| = |z - z_B|\}$ *est la médiatrice de* $[AB]$ *;*
2. *Si* $r > 0$ *alors l'ensemble* $\{M \in \mathbb{R}^2$ *d'affixe* $z \mid |z - z_A| = r\}$ *est le cercle de centre* A *et de rayon* r.

Démonstration. 1) L'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z \mid |z - z_A| = |z - z_B|\}$ est l'ensemble des points qui sont à la même distance de A et de B, c'est-à-dire est la médiatrice du segment $[A, B]$.

2) L'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z \mid |z - z_A| = r\}$ est l'ensemble des points à distance de r de A, c'est donc le cercle de centre A et de rayon r.

□

Proposition 2.2.10. *Soient* A, B *et* C *trois points deux à deux distincts d'affixe* z_A, z_B *et* z_C. *Alors*

1. $\left(\widehat{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{AB}}\right) \equiv \operatorname{Arg}(z_B - z_A)\ [2\pi]$ *;*
2. $\left(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}}\right) \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$ *;*

Démonstration. 1) Soit M le point d'affixe $z_B - z_A$. Alors $\vec{AB} = \vec{OM}$ (O est l'origine) et donc par définition de l'argument, on obtient :

$$\left(\widehat{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{AB}}\right) = \left(\widehat{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{OM}}\right) \equiv \operatorname{Arg}(z_B - z_A).$$

2) On a :

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}}\right) &\equiv \left(\widehat{\vec{AC}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}\right) + \left(\widehat{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{AB}}\right) \\ &\equiv -\left(\widehat{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{AC}}\right) + \left(\widehat{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{AB}}\right) \\ &\equiv -\operatorname{Arg}(z_C - z_A) + \operatorname{Arg}(z_B - z_A) \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2.11. *Soient* A, B *et* C *trois points deux à deux distincts d'affixe* z_A, z_B *et* z_C. *Alors*

1. $(AB)/\!/(AC) \Leftrightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0$ *;*
2. $(AB)\perp(AC) \Leftrightarrow \operatorname{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ *;*

Démonstration. Cela vient du résultat des précédents et des équivalences $(AB)/\!/(AC) \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}}\right) = 0$ et $(AB)\perp(AC) \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}}\right) = \frac{\pi}{2}$ □

2.3 Résolution d'équations

Théorème 2.3.1. *Soient* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *avec* $a \neq 0$. *L'ensemble des solutions de l'équation* $az^2 + bz + c = 0$ *est*

1. $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ *si* $\Delta := b^2 - 4ac = 0$;
2. $\left\{\frac{-b+\delta}{2a}, \frac{-b-\delta}{2a}\right\}$ *si* $\Delta \neq 0$ *avec* $\Delta = \delta^2$

Démonstration. Soient $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) &= a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.2. Le calcul de δ est fait dans le TD.

Définition 2.3.3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Les racines $n$ièmes de l'unité sont les complexes z tels que $z^n = 1$.

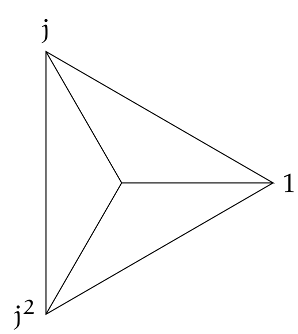
Proposition 2.3.4. *Soit* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Les racines* n*ièmes de l'unité sont* $e^{2i\pi\frac{k}{n}}$ *avec* $k \in 0, \ldots, n-1$.

Démonstration. Soit $z = re^{i\theta}$ une racine de l'unité. Alors $1 = z^n = r^n e^{in\theta}$ et donc $r^n = 1$ et $n\theta \equiv 0[2\pi]$. On en déduit donc que $r = 1$ et $\theta \equiv 0\left[\frac{2\pi}{n}\right]$. Comme $e^{2i\pi\frac{n}{n}} = e^0 = 1$ alors $z = e^{2i\pi\frac{k}{n}}$ pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
Réciproquement, si $z = e^{2i\pi\frac{k}{n}}$ avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ alors

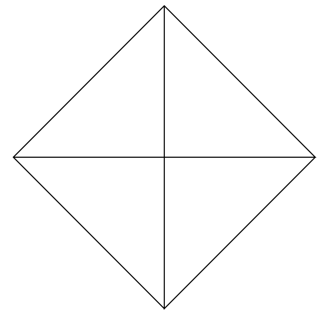
$$z^n = e^{2i\pi n\frac{k}{n}} = e^{2i\pi k} = 1.$$

□

Exemple 2.3.5. Cas $n = 3$: les racines troisièmes de l'unité sont $1, j := e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = \bar{j} = e^{-2i\pi/3}$.



Cas $n = 4$: les racines quatrièmes de l'unité sont $1, -1 = e^{i\pi}, i = e^{i\pi/2}, -i = e^{-i\pi/2}$:



Plus généralement, les racines $n$ièmes de l'unité sont les (affixes des) sommets d'un n-gone régulier.

Proposition 2.3.6. *Soient* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *et* $b = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. *L'ensemble des solutions de* $z^n = b$ *est*

$$\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n} + 2i\pi\frac{k}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

Démonstration. Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a :

$$\left(\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n} + 2i\pi\frac{k}{n}} \right)^n = \left(\sqrt[n]{r} \right)^n e^{in\frac{\theta}{n} + 2i\pi n\frac{k}{n}} = re^{i\theta + 2i\pi k} = re^{i\theta} = b.$$

Réciproquement, si z est une solution de $z^n = b$ alors $\frac{z}{\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}}$ est une racine de l'unité car :

$$\left(\frac{z}{\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}} \right)^n = \frac{z^n}{b} = 1$$

et donc est de la forme $e^{2i\pi\frac{k}{n}}$avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$. On a donc

$$z = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n} + 2i\pi\frac{k}{n}}.$$

□

Exemple 2.3.7. Les racines cubiques de $-1 = e^{i\pi}$ sont $-1, -j = e^{-i\pi/3}$ et $-j^2 = e^{i\pi/3}$.

Exemple 2.3.8. Les racines cubiques de $-1 = e^{i\pi}$ sont $e^{i\pi/4}, ie^{i\pi/4} = e^{3i\pi/4}, -e^{i\pi/4} = e^{-3i\pi/4}$ et $-ie^{i\pi/4} = e^{-i\pi/4}$.