Cours : Algèbre linéaire

Antoine Boivin

25 novembre 2025

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1 Groupes et corps

Définition 1.1.1. Un groupe est la donnée d'un couple $(G, \cdot)$ où E est un ensemble et $\cdot : (x, y) \in G \times G \mapsto x \cdot y \in G$ est une fonction (appelée loi de composition interne) vérifiant les propriétés suivantes :
— $\forall x, y, z \in G, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ [la loi $\cdot$ est associative]
— $\exists e \in G, \forall x \in G, x \cdot e = e \cdot x = x$ [la loi $\cdot$ a un élément neutre e]
— $\forall x \in G, \exists y \in G, x \cdot y = y \cdot x = e$ [tout élément a un inverse pour la loi $\cdot$]
Un groupe $(G, \cdot)$ est dit commutatif ou abélien si, de plus, pour tous $x, y \in G$, $xy = yx$.

Remarque 1.1.2. On dira aussi qu'on munit l'ensemble G de la loi $\cdot$.

Remarque 1.1.3. L'élément neutre est unique. Il en est de même de l'inverse de n'importe quel élément x.

Notation 1.1.4. Lorsqu'on écrira la loi du groupe par $+$ (ce que l'on fera régulièrement dans ce cours), on écrira $-x$ à place de x^{-1} et 0 (ou 0_G) à la place de e.

Exemple 1.1.5.
— $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \overline{+})$ sont des groupes abéliens pour les lois usuelles
— $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus \{0\}, \overline{\times})$ (avec p premier) sont des groupes abéliens pour les lois usuelles.
— $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \times)$ n'est pas un groupe (2 n'a pas d'inverse)
— Le couple $(\mathrm{Bij}(X), \circ)$ des bijections d'un ensemble X muni de la composition est un groupe non-commutatif.

Remarque 1.1.6. Si $(G, \cdot)$ est un groupe (abélien) d'élément neutre e_G et $\varphi : G \to H$ est une bijection alors l'ensemble H muni de la loi

$$x \cdot_\varphi y := \varphi\left(\varphi^{-1}(x) \cdot \varphi^{-1}(y)\right)$$

est un groupe (abélien) dont l'élément neutre est $e_H := \varphi(e_G)$. En effet,
— pour tout $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2)$ et $y_3 = \varphi(x_3)$ dans H,

$$\begin{aligned} y_1 \cdot_\varphi (y_2 \cdot_\varphi y_3) = y_1 \cdot_\varphi \varphi(x_2 \cdot x_3) = \varphi(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) &\overset{\cdot \text{ assoc}}{=} \varphi((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \\ &= \varphi((x_1 \cdot x_2)) \cdot_\varphi y_3 = (y_1 \cdot y_2) \cdot y_3. \end{aligned}$$

— pour tout $y = \varphi(x) \in H$,

$$y \cdot_\varphi e_H = \varphi(x) \cdot_\varphi \varphi(e_G) = \varphi(x \cdot e_G) = \varphi(x) = y = \varphi(e_G \cdot x) = \varphi(e_G) \cdot_\varphi \varphi(x) = e_H \cdot_\varphi y.$$

— l'inverse de $y = \varphi(x) \in H$ est $y' \coloneqq \varphi(x^{-1})$. En effet,

$$y \cdot_\varphi y' = \varphi(x) \cdot_\varphi \varphi(x^{-1}) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(e_G) = e_H = \varphi(x^{-1} \cdot x) = \varphi(x^{-1}) \cdot_\varphi \varphi(x) = y' \cdot y.$$

— Si G est commutatif alors H aussi : pour tout $y_1 = \varphi(x_1), y_2 \in \varphi(x_2) \in H$,

$$y_1 \cdot y_2 = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) = \varphi(x_1 \cdot x_2) \overset{\cdot \text{ commut}}{=} \varphi(x_2 \cdot x_1) = \varphi(x_2) \cdot_\varphi \varphi(x_1) = y_2 \cdot_\varphi y_1.$$

Définition 1.1.7. Soit $(G, \cdot_G)$ un groupe. Un sous-groupe de G est la donnée d'un groupe $(H, \cdot_H)$ tel que :
- — $H \subset G$;
- — $\cdot_H = \cdot_{G|H \times H}$.

On rencontrera souvent la formulation suivante : pour $(G, \cdot)$ un groupe et H un sous-ensemble de G, est-ce que $(H, \cdot_{|H \times H})$ est un sous-groupe de $(G, \cdot)$?

Proposition 1.1.8. *Soient* $(G, \cdot)$ *un groupe et* H *un sous-ensemble de* G*. Alors* $(H, \cdot_{|H\times H})$ *est un sous-groupe de* $(G, \cdot)$ *si*
- — $H \neq \emptyset$;
- — $\forall x, y \in H, xy^{-1} \in H$.

Remarque 1.1.9. Pour la notation additive, cette condition devient $\forall x, y \in H, x - y \in H$

Notation 1.1.10. Par abus de langage, on dira, quand le contexte est clair, que H est un sous-groupe de G (ou $(G, \cdot)$).

Définition 1.1.11. Un corps (commutatif) est un triplet $(\mathbb{K}, +, \times)$ où $\mathbb{K}$ est un ensemble et $+, \times : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ sont deux lois de composition interne vérifiant les propriétés suivantes :
- — $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien.
- — $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe abélien
- — $\forall x, y, z \in \mathbb{K}, x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ [$\times$ est distributive par rapport à $+$]

Exemple 1.1.12.
- — $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \overline{+}, \overline{\times})$ (avec p premier) sont des corps pour les lois usuelles
- — Si $\mathbb{K}$ est un corps alors l'ensemble des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$ muni de la somme et du produit usuels est aussi un corps.

Définition 1.1.13. Soit $(\mathbb{L}, +, \times)$ un corps. On dit que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ (ou $(\mathbb{L}, +, \times)$) si
- — $\mathbb{K}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{L}, +)$;
- — $\mathbb{K}^*$ est un sous-groupe de $(\mathbb{L}^*, \times)$;

Notation 1.1.14. Dans la suite, quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera les opérations d'un corps $+$ et $\times$.

1.2 Espaces vectoriels

Définition 1.2.1. Un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) est un ensemble E muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x \in E$ satisfaisant les axiomes suivants :
— $(E, +)$ est un groupe abélien,
— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E,\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,
— $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
— $\forall x \in E,\ 1x = x$ (avec 1 neutre de la multiplication dans $\mathbb{K}$).
On appelle les éléments de E des vecteurs, et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.

Notation 1.2.2. Dans la suite, quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on écrira « $\mathbb{K}$-espace vectoriel E » ou même « espace vectoriel E » à la place de $(E, +, \times)$.

Proposition 1.2.3. *Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *et* $x, y \in E$, *on a :*

1. $\lambda x = 0 \iff (\lambda = 0$ *ou* $x = 0)$,
2. $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$,
3. $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.

Démonstration. 1) Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ alors pour tout $x \in E$,

$$0_{\mathbb{K}}x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}})x = 0_{\mathbb{K}}x + 0_{\mathbb{K}}x$$

et on a donc $0_{\mathbb{K}}x = 0_E$. De la même façon, si $x = 0_E$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda 0_E = \lambda(0_E + 0_E) = \lambda 0_E + \lambda 0_E$$

et on a donc $\lambda 0_E = 0_E$.
Réciproquement, si $\lambda x = 0$ alors soit $\lambda = 0$ soit

$$x = 1x = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}0_E = 0_E.$$

2) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x \in E$. Alors

$$\lambda x = ((\lambda - \mu) + \mu)x = (\lambda - \mu)x + \mu x.$$

On obtient le résultat en ajoutant $-\mu x$.
3) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$. Alors

$$\lambda x = \lambda((x - y) + y) = \lambda(x - y) + \lambda y.$$

On obtient le résultat en ajoutant $-\lambda y$. □

Corollaire 1.2.4. *Pour tout* $x \in E$, $-x = -1 \cdot x$.

Exemple 1.2.5. On munit $\mathbb{K}^n$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les lois suivantes $(x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \mapsto x + y \coloneqq (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ et $(\lambda, x = (x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \mapsto \lambda x \coloneqq (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{K}^n$:
— $(\mathbb{K}^n, +)$ est un groupe abélien : $+$ est associative car l'addition dans $\mathbb{K}$ l'est (par définition), l'élément neutre est $(0, \dots, 0)$ et l'inverse de $(x_1, \dots, x_n)$ est $(-x_1, \dots, x_n)$;

— Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)x &= ((\lambda+\mu)x_1, \dots, (\lambda+\mu)x_n) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \dots, \lambda x_n + \mu x_n) \\
&= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \dots, \mu x_n) = \lambda x + \mu x; \\
\lambda(x+y) &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) \\
&= \lambda x + \lambda y; \\
(\lambda\mu)x &= ((\lambda\mu)x_1, \dots, (\lambda\mu)x_n) = (\lambda(\mu x_1), \dots, \lambda(\mu x_n)) \\
&= \lambda(\mu x_1, \dots, \mu x_n) = \lambda(\mu x); \\
1x &= (1x_1, \dots, 1x_n) = (x_1, \dots, x_n) = x
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.6. Plus généralement, si $(E_1, +_1, \cdot_1), \dots, (E_n, +_n, \cdot_n)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels alors on peut munir $E_1 \times \ldots \times E_n$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel par les lois suivantes $((u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)) \in (E_1 \times \ldots \times E_n) \times (E_1 \times \ldots \times E_n) \mapsto (u_1 +_1 v_1, \dots, u_n +_n v_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ et $(\lambda, (u_1, \dots, u_n)) \in \mathbb{K} \times (E_1 \times \ldots \times E_n) \mapsto (\lambda \cdot_1 u_1, \dots, \lambda \cdot_n u_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$.

Exemple 1.2.7. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $(\mathbb{L}, +, \times)$ (par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) alors $\mathbb{L}$ a une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois suivantes $+$ et $(x, y) \in \mathbb{K} \times \mathbb{L} \mapsto x \cdot y$. Ces lois vérifient les axiomes d'espace vectoriel car elles vérifient les axiomes de corps. Plus généralement, on peut « restreindre » un $\mathbb{L}$-espace vectoriel en un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 1.2.8. On munit $\mathbb{K}^I = \mathscr{F}(I, \mathbb{K}) \coloneqq \{f : I \to \mathbb{K}\}$ (avec I un ensemble quelconque) d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les lois suivantes $(f, g) \in \mathbb{K}^I \times \mathbb{K}^I \mapsto f + g \colon x \mapsto f(x) + g(x)$ et $(\lambda, f) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^I \mapsto (\lambda f \colon x \mapsto \lambda f(x)) \in \mathbb{K}^I$:

— $(\mathbb{K}^I, +)$ est un groupe abélien : $+$ est associative car l'addition dans $\mathbb{K}$ l'est (par définition), l'élément neutre est $0 : x \mapsto 0$ et l'inverse de $f \in \mathbb{K}^I$ est $x \mapsto -f(x)$;

— Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathbb{K}^I$ et $x \in I$, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
[(\lambda+\mu)f]\,(x) &= (\lambda+\mu)f(x) = \lambda f(x) + \mu f(x); \\
[\lambda(f+g)](x) &= \lambda[(f+g)(x)] = \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x); \\
[(\lambda\mu)f](x) &= \lambda([\mu f](x)) = \lambda(\mu(f(x)) = (\lambda\mu)f(x); \\
[1f](x) &= 1(f(x)) = f(x).
\end{aligned}$$

On appellera aussi, selon le contexte, de telles fonctions « familles » d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I. On écrira alors $(f(i))_{i \in I}$ plutôt que f.

Cet exemple englobe plusieurs exemples d'espaces vectoriels :

— $\{0\} = \mathscr{F}(\emptyset, \mathbb{K})$

— $\mathbb{K}^n = \mathscr{F}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{K})$ (chaque coordonnée est donnée par la valeur de la fonction en l'indice considéré) ;

— $\mathbb{K}^\mathbb{N} = \{$suites d'éléments de $\mathbb{K}\}$

On verra aussi que cela permet de munir l'espace des matrices d'une structure d'espace vectoriel.

Remarque 1.2.9. On peut aussi, de la même façon, munir V^I (où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque 1.2.10. On fera attention au fait qu'une famille tient compte de l'ordre et des répétitions : $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$ et $(-1, 1)$ sont trois familles différentes. Cela sera important dans la suite quand on abordera les familles libres et les bases.

Exemple 1.2.11. Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un ensemble avec une bijection $\varphi : E \to F$. Alors le triplet $(F, +_\varphi, \cdot_\varphi)$, où $+_\varphi$ est défini dans la remarque 1.1.6 et $\cdot_\varphi$ est la fonction $\mathbb{K} \times F \to F$ définie par

$$\lambda \cdot_\varphi v := \varphi\left(\lambda \cdot \varphi^{-1}(v)\right)$$

est un espace vectoriel, défini par transport de structure sur F de la structure de E.
On sait que $(F, +_\varphi)$ est un groupe abélien (cf. 1.1.6). Montrons les autres axiomes :

— Soient $y_1 = \varphi(x_1), y_2 = \varphi(x_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned}\lambda \cdot_\varphi (y_1 +_\varphi y_2) &= \lambda \cdot_\varphi \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(\lambda(x_1 + x_2)) = \varphi(\lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot x_2) \\ &= \varphi(\lambda \cdot x_1) +_\varphi \varphi(\lambda \cdot x_2) = \lambda \cdot_\varphi y_1 +_\varphi \lambda \cdot_\varphi y_2\end{aligned}$$

— Soient $y = \varphi(x)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot_\varphi y &= \varphi((\lambda + \mu) \cdot x) = \varphi(\lambda \cdot x + \mu \cdot x) = \varphi(\lambda \cdot x) +_\varphi \varphi(\mu \cdot x) = \lambda \cdot_\varphi y + \mu \cdot_\varphi y \\ (\lambda\mu) \cdot_\varphi y &= \varphi((\lambda\mu) \cdot x) = \varphi(\lambda \cdot (\mu \cdot x)) = \lambda \cdot_\varphi \varphi(\mu \cdot x) = \lambda \cdot_\varphi (\mu \cdot_\varphi y).\end{aligned}$$

— Soient $y = \varphi(x)$. Alors

$$1 \cdot_\varphi y = \varphi(1 \cdot x) = \varphi(x) = y.$$

Exercices

Exercice 1. Soit $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (\lambda, (x, y)) \mapsto \lambda x$. Le triplet $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Exercice 2. Soit $\oplus : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, (x, y) \mapsto xy$ et $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, (\lambda, x) \mapsto x^\lambda$. Montrer que $(\mathbb{R}_{>0}, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 3. Montrer que la commutativité de la somme peut être déduite des autres axiomes d'espace vectoriel.

Exercice 4. Soit $(G, +)$ un groupe abélien.

1. Montrer que G peut être muni d'au plus une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. Montrer que pour que G puisse être muni d'une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions :
   — G est *sans torsion* (i.e. pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $x \in G$ tel que $x \neq 0$, on a $n \cdot x \neq 0$) ;
   — G est *divisible* (i.e. pour tout $x \in G$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe $y \in G$ tel que $x = ny$).

Exercice 5. Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Montrer que $E \times E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour l'addition

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$$

et pour la loi de composition externe $\mathbb{C} \times (E \times E) \to E \times E$ définie par

$$(a + bi) \cdot_{\mathbb{C}} (x, y) := (a \cdot x - b \cdot y,\ a \cdot y + b \cdot x).$$

Celui-ci est appelé complexifié de E.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.3.1. Soit E un espace vectoriel. Une partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel (de E) si :
- F est un sous-groupe de E,
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F,\ \lambda x \in F$.

Proposition 1.3.2. *Soit* $(E, +, \times)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* F *un sous-espace vectoriel de* E. *Alors* $(F, +_{|F\times F}^{|F} : F \times F \to F, \cdot_{|\mathbb{K}\times F}^{|F} : \mathbb{K} \times F \to F)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*

Démonstration. Les deux conditions pour être un sous-espace vectoriel entraîne que l'on peut restreindre-corestreindre les deux opérations sur, respectivement, $F \times F \to F$ et $\mathbb{K} \times F \to F$. De plus, F étant un sous-groupe de E, c'est donc un groupe, abélien en restreignant les conditions données pour E sur F et de même les quatre autres axiomes sont vérifiées grâce à l'hypothèse sur E. □

Remarque 1.3.3. Tout sous-espace vectoriel de E contient 0. En effet, si on prend un vecteur $x \in F$ alors $0 = 0 \cdot x \in F$.

Exemple 1.3.4. Les sous-ensembles $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Proposition 1.3.5 (Caractérisation pratique)**.** *Une partie* $F \subset E$ *est un sous-espace vectoriel si et seulement si* $F \neq \emptyset$ *et* $\forall x, y \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda x + \mu y \in F$.

Démonstration. Soit F un sous-ensemble de E. Supposons que F est un sous-espace vectoriel (qui est donc en particulier non-vide). Soit $x, y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors λx et μy sont dans F par la deuxième condition et donc $\lambda x + \mu y$ puisque F est un sous-groupe de E. Réciproquement, supposons que $F \neq \emptyset$ et pour tout $x, y \in F$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda x + \mu y \in F$. Alors en particulier, pour tout $x \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in F$. De plus, comme F est non-vide et que pour tout $x, y \in F$, $x - y = x + (-1)y \in F$, F est un sous-groupe de E. On en conclut donc que F est un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 1.3.6.
- Comme le suggère la démonstration, on peut se contenter du cas $\lambda = 1$ ou (exclusif !) $\mu = 1$.
- En général, on vérifie que $0 \in F$ pour s'assurer que $F \neq \emptyset$ (à cause de 1.3.3).

Exemple 1.3.7.
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{\pi}x + 42y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car
  - $(0, 0) \in F$ car $\sqrt{\pi} \times 0 + 42 \times 0 = 0$
  - Soient $u = (x, y), v = (x', y') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\sqrt{\pi}x + 42y = 0$ et $\sqrt{\pi}x' + 42y' = 0$. On en déduit donc que $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y') \in F$ puisque
  $$\sqrt{\pi}(x + \lambda x') + 42(y + \lambda y') = (\sqrt{\pi}x + 42y) + \lambda(\sqrt{\pi}x' + 42y') = 0 + \lambda 0 = 0.$$
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel car $(0, 1)$ et $(-1, 0)$ sont dans F mais $(-1, 1) = (0, 1) + (-1, 0) \notin F$. C'est une droite affine.
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \cup \{0\}$ car $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ sont dans F mais $(0, 0) = (1, 1) + (-1, -1) \notin F$.

Avertissement 1.3.8. On verra dans la suite que les sous-espaces vectoriels sont, en fait, les zéros des applications linéaires. Cependant, on peut présenter un sous-espace vectoriel comme les zéros d'une fonction non-linéaire. Le sous-ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (c'est en fait $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$).

Avertissement 1.3.9. Pour montrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel, on utilise qu'il vérifie la caractérisation et pour montrer que ce n'en est pas un, on utilise un contre-exemple. Un calcul qui ne conclut pas ne permet pas d'affirmer que ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exemple 1.3.10. On montrera dans la suite (ou dans les exercices du TD) que les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, les droites linéaires et $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1.3.11. Soit I un ensemble. Considérons le sous-ensemble $\mathbb{K}^{(I)}$ des fonctions $I \to \mathbb{K}$ à support (les éléments de I qui n'annulent pas la fonction) fini i.e.

$$\mathbb{K}^{(I)} = \{f : I \to \mathbb{K} \mid \mathrm{Card}(\{i \in I \mid f(i) \neq 0\}) < \infty).$$

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$:
- $0_{\mathbb{K}^{(I)}} \in \mathbb{K}^{(I)}$ car 0 est de support vide.
- Soient $f, g \in \mathbb{K}^{(I)}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et notons F, G leur support. Alors le support de $f + \lambda g$ est inclus dans $F \cup G$ (car sinon on additionne 0) et est donc fini i.e. $f + \lambda g \in \mathbb{K}^{(I)}$.

En particulier, $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 1.3.12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons le sous-ensemble $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$ (ou $\mathbb{K}_n[X]$) des polynômes de degré inférieur (ou égal) à n. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$:
- 0 est de degré inférieur à n (par convention, $\deg(0) = -\infty$) ;
- Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\deg(P + \lambda Q) \leq \max(\deg(P), \deg(\lambda Q)) \leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \leq n$$

  et donc $P + \lambda Q \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$

Proposition 1.3.13. *Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E. Plus généralement, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Comme $0 \in F_i$ pour tout $i \in I$ alors $0 \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Soient $u \in \bigcap_{i \in I} F_i$, $v \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $\in I$, $u, v \in F_i$. Comme les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E alors $u + \lambda v \in F_i$ pour tout i. Ainsi, $u + \lambda v \in \bigcap_{i \in I} F_i$. $\square$

Avertissement 1.3.14. L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas (en général) un sous-espace vectoriel. On pourra considérer l'union de deux droites distinctes pour le voir.

Proposition 1.3.15. *Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F + G \coloneqq \{u + v \mid u \in F, v \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E (contenant F et G).*

Démonstration. Comme $0 \in F$ et $0 \in G$ alors $0 = 0 + 0 \in F + G$. Soient $u + v, u' + v' \in F + G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$u + v + \lambda(u' + v') = (u + \lambda u') + (v + \lambda v').$$

Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels alors $u + \lambda u' \in F$ et $v + \lambda v' \in G$ et donc $u + v + \lambda(u' + v') \in F + G$. On en conclut donc que $F + G$ est bien un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Définition 1.3.16. Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. L'espace vectoriel $F + G$ est appelé sous-espace vectoriel somme de F et G. Si, de plus, $F \cap G = \{0\}$, on dit que cette somme directe et on la note $F \oplus G$. Si $F \oplus G = E$ alors on dit qu'ils sont supplémentaires.

Remarque 1.3.17. Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire. Le complémentaire d'un espace vectoriel n'est jamais un espace vectoriel car ne contient pas 0. De plus, un supplémentaire d'un espace vectoriel n'est pas unique :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x = 0\} \oplus \{(x, y) \mid y = 0\} = \{(x, y) \mid x = 0\} \oplus \{(x, y) \mid x + y = 0\}$$

Proposition 1.3.18. *Soit* E *un espace vectoriel. Soient* $F_1, \dots, F_n$ *des sous-espaces vectoriels. Alors*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \coloneqq \{x_1 + \dots + x_n \mid \forall i \in [\![1, n]\!], x_i \in F_i\}$$

est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. C'est la même démonstration que 1.3.15. □

Définition 1.3.19. L'espace vectoriel $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est appelé espace vectoriel somme de $F_1, \dots, F_n$.

Proposition 1.3.20. *Soit* E *un espace vectoriel. Soient* $F_1, \dots, F_n$ *des sous-espaces vectoriels. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout vecteur* $x \in \sum_{i=1}^{n}$ *s'écrit de façon unique sous la forme* $x = x_1 + \dots + x_n$ *avec* $x_i \in F_i$ *;*
2. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, x_1 + \dots + x_n = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = 0$*;*
3. $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \sum_{i=1}^{k} F_i \cap F_{k+1} = \{0\}$.

Démonstration. $1) \Rightarrow 2)$: Supposons 1). Soit $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$ tel que $x_1 + \dots + x_n = 0$. Comme $0 = 0 + \dots + 0$ et que pour tout i, $0 \in F_i$ alors par unicité de l'écriture, $x_i = 0$.

$2) \Rightarrow 3)$: Supposons 2). Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et soit $x \in \sum_{i=1}^{k} F_i \cap F_{k+1}$. Alors on peut prendre $(x_1, \dots, x_k)$ tel que pour tout i, $x_i \in F_i$ et

$$x = x_1 + \dots + x_k.$$

et donc $-x_1 - \dots - x_k - x = 0$ d'où $x = 0$ (par 2)).

$3) \to 1)$: Supposons 3). Soit $x \in E$ et considérons deux écritures de x comme somme d'éléments de F_i :

$$x = x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n.$$

On a donc

$$F_n \ni y_n - x_n = x_1 - y_1 + \dots + x_{n-1} - y_{n-1} \in \sum_{i=1}^{n-1} F_i$$

Par 3), on a $y_n - x_n = 0$ et donc $y_n = x_n$. On peut itérer ce raisonnement pour montrer que pour tout $k \leq n$, $x_k = y_k$ et donc l'écriture est unique. □

Définition 1.3.21. On dit que les F_i sont en somme directe et on nota $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ ou $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$.

Proposition 1.3.22. *Soit* E *un espace vectoriel et* $A \subset E$ *une partie. Alors il existe un (unique) plus petit sous-espace vectoriel contenant* A.

Démonstration. Soit F l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A. C'est un sous-espace vectoriel contenant A. Soit G un sous-espace vectoriel de E contenant A. Alors $F \subset G$ car une intersection d'une famille d'ensembles est contenu dans chacun de ces ensembles. □

Définition 1.3.23. On appelle cet espace vectoriel le sous-espace vectoriel engendré par A et on le note $\mathrm{Vect}(A)$

Remarque 1.3.24. Si A est un sous-espace vectoriel alors $\mathrm{Vect}(A) = A$.

Exercices

Exercice 6. Dessiner les sous-ensembles formés des couples (x, y) de nombres réels vérifiant les conditions suivantes et vérifier s'ils sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

1. $3x - 2y = 0$
2. $xy = 0$
3. $x^2 + y^2 = 1$
4. $x^2 + y^2 = 0$
5. $y = 2x^2$
6. $x + |y| = 0$
7. $x^2 + 4y^2 = 4xy$
8. $x \geq 0$
9. $\exists c \in \mathbb{R},\ x^5 + y^5 = c^5$

Exercice 7. Décider si les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont des sous-espaces vectoriels.

1. $V_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$
2. $V_2 = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
3. $V_3 = \{(3x - y, 2x + 5y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
4. $V_4 = \{(x^2 - x, -x^2 + x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
5. $V_5 = \{(x^3 - x, x^3 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
6. $V_6 = \{(x - |x|, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 8. Soit m un paramètre réel. Montrer que les triplets réels de la forme (x, y, m) forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $m = 0$.

Exercice 9. Soient a, b, c, d quatre réels. Quelle condition doivent satisfaire ces réels pour que les $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Donner une interprétation géomètrique du sous-espace vectoriel obtenu.

Exercice 10. (*) On considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}$. Quels sont les sous-espaces vectoriels de E ? Même question pour $E = \mathbb{K}^2$.

Exercice 11. (*)

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Démontrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.
2. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non-vide de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On suppose que pour tout $(i, j) \in I^2$, il existe $k \in I$ tel que
$$F_i \cup F_j \subset F_k.$$
Démontrer que $\bigcup_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. (**) Étudier la réciproque.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Établir si les sous-ensembles de $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$ suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$:

1. $A = \{P \in \mathbb{K}_{\leq n}[X] \mid P(0) = 0\}$
2. $B = \{P \in \mathbb{K}_{\leq n}[X] \mid P' = 0\}$

Exercice 13. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$? Donner la forme des coefficients des éléments de E et F à supposer qu'ils soient des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{\leq 3}[X]$.

1. $A = \{P \mid P(3) = 2P(1)\}$
2. $B = \{P \mid P(2) = 2\}$
3. $C = \{P \mid P(5) = 0\}$
4. $D = \{P \mid t \mapsto P'(t)$ est une fonction paire$\}$
5. $E = \{P \mid P(-2) = P(2) = 0\}$
6. $F = \{P \mid XP' = P\}$

Exercice 14.

1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

(a) les fonctions croissantes ;
(b) les fonctions bornées ;
(c) les fonctions positives ;
(d) les fonctions continues ;
(e) les fonctions injectives ;
(f) les fonctions qui s'annulent en un point $x \in \mathbb{R}$ fixé ;
(g) les fonctions qui s'annulent en tout $n \in \mathbb{N}$;
(h) les fonctions T-périodiques avec $T > 0$ fixé ;
(i) les fonctions périodiques ;
(j) les fonctions n fois dérivables ;
(k) les fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, a et b sont deux fonctions continues.

2. Montrer que le sous-ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Montrer que les sous-ensemble des fonctions s'annulant en 1 et celui des fonctions linéaires sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient H le sous-ensemble de $\mathbb{K}^n$ défini par

$$H \coloneqq \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

et $u = (1, \dots, 1)$. Montrer que H et $\mathrm{Vect}(\{u\})$ sont supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

1.4 Familles libres, familles génératrices et bases

Définition 1.4.1. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Une combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$ est un vecteur de la forme $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$, où la famille $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}$ est à support fini (tous les λ_i sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux).

Ainsi, la somme considérée revient à une somme finie qui appartient donc à E. Sans structure supplémentaire sur E, on ne peut pas donner du sens à une somme infinie.

Remarque 1.4.2. En particulier, chaque élément x_i de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est une combinaison linéaire de cette famille (on prend 0 partout sauf en i et 1 en i).

Remarque 1.4.3. Rappelons qu'une somme vide (i.e. si $I=\emptyset$) est nulle

Exemple 1.4.4 (Cas d'une famille finie)**.** Une combinaison linéaire des $(x_1,\dots,x_n)$ est un vecteur de la forme $\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$ avec $\lambda_i\in\mathbb{K}$.

Lemme 1.4.5. *L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de E est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E.
En prenant la combinaison linéaire nulle (i.e. $\lambda_i=0$ pour tout i) ou la remarque 1.4.3 (si $I=\emptyset$), on obtient que cet ensemble contient 0. De plus, si $\sum\lambda_ix_i$ et $\sum\mu_ix_i$ sont deux combinaisons linéaires et $\alpha\in\mathbb{K}$ alors

$$\sum\lambda_ix_i+\alpha\sum\mu_ix_i=\sum(\lambda_i+\alpha\mu_i)x_i$$

est aussi une combinaison linéaire (car $(\lambda_i+\alpha\mu_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}$). C'est donc bien un sous-espace vectoriel de E. ☐

Proposition 1.4.6. *Soit E un espace vectoriel et A une partie de E. Alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(a)_{a\in A}$.*

Démonstration. Comme $A\subset\mathrm{Vect}(A)$ alors toutes les combinaisons linéaires de $(a)_{a\in A}$ sont contenues dans A. De plus, comme l'ensemble des combinaisons linéaires est un sous-espace vectoriel de E contenant A et que $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit d'entre eux alors $\mathrm{Vect}(A)$ est contenu dans l'ensemble des combinaisons linéaires, ce qui montre leur égalité. ☐

Corollaire 1.4.7. *Soient E un espace vectoriel et A,B deux parties de E. Alors* $\mathrm{Vect}(A\cup B)=\mathrm{Vect}(A)+\mathrm{Vect}(B)$.

Démonstration. Comme $A\subset\mathrm{Vect}(A)$ et $B\subset\mathrm{Vect}(B)$ alors $A\cup B\subset\mathrm{Vect}(A)+\mathrm{Vect}(B)$ et donc comme $\mathrm{Vect}(A)+\mathrm{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E alors $\mathrm{Vect}(A\cup B)\subset\mathrm{Vect}(A)+\mathrm{Vect}(B)$. Réciproquement, un élément de $\mathrm{Vect}(A)+\mathrm{Vect}(B)$ s'écrit, grâce à la proposition 1.4.6 sous la forme suivante :

$$\sum_{a\in A}\lambda_a a+\sum_{b\in B}\mu_b b=\sum_{a\in A\setminus B}\lambda_a a+\sum_{c\in A\cap B}(\lambda_c+\mu_c)c+\sum_{b\in B\setminus A}\mu_b b$$

où $(\lambda_a)\in\mathbb{K}^{(A)}$ et $(\mu_b)\in\mathbb{K}^{(B)}$ (car $A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$ et $B=(A\cap B)\cup(B\setminus A)$. De plus, comme $A\cup B=A\cap B\cup(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ alors on a bien obtenu une combinaison linéaire de la famille des éléments de $A\cup B$ et donc $\mathrm{Vect}(A\cup B)\supset\mathrm{Vect}(A)+\mathrm{Vect}(B)$. ☐

Corollaire 1.4.8. *Soient E un espace vectoriel et F,G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors* $\mathrm{Vect}(F\cup G)=F+G$.

Définition 1.4.9. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite liée s'il existe une combinaison linéaire non triviale qui donne le vecteur nul, c'est-à-dire

$$\exists(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \setminus \{0\}, \sum \lambda_i x_i = 0.$$

Exemple 1.4.10 (Cas d'une famille finie)**.** La famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est liée s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$.

Exemple 1.4.11.
— Une famille contenant 0 est liée car on peut prendre les coefficients valant 1 sur le 0 et 0 sur les autres vecteurs de la famille.
— Une famille contenant deux fois le même vecteur est liée car on peut prendre les coefficents 1 et -1 sur ces vecteurs et 0 sur les autres vecteurs de la famille.
— Une famille a deux éléments (u, v) est liée si, et seulement si, u et v sont colinéaires. C'est faux s'il y a plus d'éléments.
— La famille $((1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1))$ est liée car

$$4(1, 1, 1) - (1, 2, 3) - (3, 2, 1) = 0$$

Proposition 1.4.12. *Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.*

Démonstration. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille. Si cette famille est liée alors il existe des coefficients (λ_i) non tous nuls tels que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0. \tag{1.1}$$

Comme la famille (λ_i) est non-nulle, on peut choisir un $j \in I$ tel que $\lambda_j \neq 0$. Ainsi, on peut écrire l'égalité (1.1) sous la forme

$$-\sum_{i\in I\setminus\{j\}} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} x_i = x_j. \tag{1.2}$$

□

Proposition 1.4.13. *Toute sur-famille*[1] *d'une famille liée est liée.*

Démonstration. Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille liée et $(x_i)_{i\in J}$ une sur-famille (ainsi, $I \subset J$). On peut fixer $(\lambda_i)_{i\in I}$ tel que $\sum \lambda_i x_i = 0$. On peut compléter cette famille en une famille (non triviale) $(\lambda_i)_{i\in J}$ par $\lambda_i = 0$ pour $i \in J \setminus I$) et donc

$$\sum_{j\in J} \lambda_i x_i = 0$$

Cela montre donc que $(x_i)_{i\in J}$ est une famille liée. □

Définition 1.4.14. Une famille est dite libre si elle n'est pas liée. Les vecteurs d'une famille libre sont dits linéairement indépendants.

Proposition 1.4.15. *La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si*

$$\forall(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0.$$

1. une sur-famille d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est une famille $(x_i)_{i\in J}$ avec $I \subset J$.

Démonstration. Par définition, une famille (x_i) est libre si elle n'est pas liée et donc si

$$\forall(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)} \setminus \{0\}, \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \neq 0$$

On en déduit donc que si, pour une famille (λ_i), $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ alors la seule possibilité est que tous les coefficients (λ_i) sont nuls.

□

Proposition 1.4.16. *Toute sous-famille[2] d'une famille libre est libre.*

Démonstration. Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre et $(x_i)_{i \in J}$ une sous-famille ($J \subset I$). Soit $(\lambda_i)_{i \in J}$ des coefficients tels que

$$\sum_{i \in J} \lambda_i x_i = 0$$

On peut compléter cette famille de coefficients $(\lambda_i)_{i \in I}$ avec $\lambda_i = 0$ pour $I \setminus J$ et donc

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$

Comme la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre alors tous les coefficients $\lambda_i, i \in I$ sont nuls. En particulier, les coefficients $\lambda_i, i \in J$ sont nuls. On en déduit donc que la famille $(x_i)_{i \in J}$ est libre. □

Exemple 1.4.17 (Cas d'une famille finie)**.** La famille $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est libre si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ implique que tous les λ_i sont nuls.

Exemple 1.4.18. Considérons une famille $\mathscr{F} := (x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ (avec $p \leq n$) où pour $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$x_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{i,n})$$

avec $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$. La famille $\mathscr{F}$ est libre.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ telle que

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p = 0.$$

C'est-à-dire

$$0 = \left(\lambda_1, \lambda_1 \nu_{12} + \lambda_2, \dots, \lambda_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i \nu_{ik}, \dots, \lambda_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \nu_{ik}, *, \dots, *\right)$$

On a d'abord $\lambda_1 = 0$. Supposons que l'on a montré que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ pour $k < p$. Alors comme $\lambda_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nu_{ik+1}$, on obtient $\lambda_{k+1} = 0$. On en déduit donc $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$ et donc que la famille $\mathscr{F}$ est libre.

Proposition 1.4.19. *Une famille (infinie) est libre si, et seulement si, toutes ses sous-familles finies sont libres.*

Démonstration. L'implication vient du fait qu'une sous-famille d'une famille libre est libre et la réciproque vient du fait qu'une combinaison linéaire est toujours une somme finie. □

Lemme 1.4.20. *Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre de E et $x \in E \setminus \mathrm{Vect}(\{x_i, i \in I\})$. Alors la famille $(x_i)_{i \in I \cup \{*\}}$ (où $x_* = x$) est libre.*

2. une sous-famille d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ est une famille $(x_i)_{i \in J}$ avec $J \subset I$.

Démonstration. Soit $(\lambda_i)_{i\in I\cup\{*\}}$ une famille de coefficients telle que

$$\sum_{i\in I\cup\{*\}} \lambda_i x_i = 0$$

Si $\lambda_* \neq 0$ alors on obtiendrait

$$x = -\sum_{i\in I} \frac{\lambda_i}{\lambda_*} x_i,$$

ce qui n'est pas possible puisque $x \notin \mathrm{Vect}(\{x_i, i \in I\})$. Donc $\lambda_* = 0$ et donc

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0.$$

Comme la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$. Ainsi on a montré que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I \cup \{*\}$ et donc la famille $(x_i)_{i\in I\cup\{*\}}$ est libre. □

Définition 1.4.21. Soit E un espace vectoriel. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite génératrice de E si elle engendre E, c'est-à-dire $E = \mathrm{Vect}(\{x_i, i \in I\})$ ou encore que tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I}$.

Remarque 1.4.22. La notion de famille génératrice est toujours relative à un espace ambiant E. On dira donc toujours « génératrice de » l'espace considéré et jamais juste « génératrice ».

Proposition 1.4.23. *Une surfamille d'une famille génératrice de* E *est génératrice de* E.

Démonstration. Soit $\mathscr{G} = (e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{F} = (e_i)_{i\in J}$ une surfamille ($I \subset J$). Soit $x \in E$. Alors comme $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E alors il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i.$$

Soient $(\mu_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^{(J)}$ tel que

$$\forall j \in J, \mu_j = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } j \in J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors

$$x = \sum_{j\in J} \mu_j e_j$$

et donc $(e_j)_{j\in J}$ est une famille génératrice. □

Proposition 1.4.24. *Soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E, $(x_i)_{i\in I}$ *une famille génératrice de* F *et* $(y_j)_{j\in J}$ *une famille génératrice de* G. *Alors la famille* $(z_k)_{k\in I\sqcup J}$ *définie par*

$$\forall k \in I \sqcup J, z_k = \begin{cases} x_i \text{ si } i \in I \\ y_j \text{ si } j \in J \end{cases}$$

est une famille génératrice de $F + G$.

Démonstration. Cela découle du corollaire 1.4.7 :

$$\mathrm{Vect}(\{z_k, k \in I \sqcup J\}) = \mathrm{Vect}(\{x_i, i \in I\}) + \mathrm{Vect}(\{y_j, j \in J\}) = F + G.$$

□

Définition 1.4.25. Soit E un espace vectoriel. Une base de E est une famille libre et génératrice de E.

Remarque 1.4.26. On peut faire la même remarque pour les bases : c'est « base de ».

Théorème 1.4.27. *Soit E un espace vectoriel. Une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E si, et seulement si, tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i, c'est-à-dire :*

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$.

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. Si $\mathscr{B}$ est une base de E alors c'est une famille libre et génératrice de E. Comme elle est génératrice de E alors $E = \mathrm{Vect}(\{e_i, i \in I\})$ et donc tout élément s'écrit comme une combinaison linéaire de $\mathscr{B}$. Montrons maintenant l'unicité : si $x = \sum \lambda_i e_i = \sum \mu_i e_i$ alors

$$\sum(\lambda_i - \mu_i)e_i = 0.$$

Comme la famille $\mathscr{B}$ est libre alors pour tout $i \in I$, $\lambda_i - \mu_i = 0$ i.e. pour tout $i \in I$, $\lambda_i = \mu_i$.
Réciproquement, si tout élément de E s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire de $\mathscr{B}$ alors en particulier $\mathscr{B}$ est génératrice de E. De plus, comme 0 s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I}$ alors toute combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I}$ valant 0 est la combinaison linéaire triviale i.e. la famille (x_i) est libre. ☐

Définition 1.4.28. Les coefficients λ_i sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

Avertissement 1.4.29. L'ordre des vecteurs dans une base est important dès qu'on parle de coordonnées.

Avertissement 1.4.30. Les espaces vectoriels n'ont (en général[3]) pas qu'une base. On fera donc attention à ne pas écrire « la base de E ».

Corollaire 1.4.31. *Si E a une base finie $(x_1, \dots, x_n)$ et $I_1, \dots, I_k$ est une partition de $[\![1, n]\!]$ (i.e. $[\![1, n]\!] = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ et $I_i \cap I_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$) alors*

$$E = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Vect}(x_i, i \in I_j).$$

Démonstration. C'est une réécriture de 1.4.27 et 1.3.20. ☐

Exemple 1.4.32. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on notera e_i le vecteur $(0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$: c'est une famille libre car elle est échelonnée (cf. exemple 1.4.18) et est génératrice de $\mathbb{K}^n$ car pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x = \sum_{i\in I} x_i e_i.$$

Cette base est souvent appelé « base canonique » de $\mathbb{K}^n$

3. l'espace vectoriel $\{0\}$ a une unique base $\emptyset$ pour n'importe quel corps et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel, n'a qu'une base : $(\overline{1})$.

Exemple 1.4.33. Soit I un ensemble non-vide. Notons e_i la fonction $I \to \mathbb{K}$ telle que

$$e_i(j) \coloneqq \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

C'est une famille libre : soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ tel que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0.$$

Alors pour tout $j \in I$, $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i(j) = 0$. Ainsi, pour tout $j \in J$,

$$0 = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i(j) = \lambda_j e_j(j) + \sum_{i\in I\setminus\{j\}} \lambda_i e_i = \lambda_j.$$

C'est une famille génératrice de $\mathbb{K}^{(I)}$: soit $\lambda \coloneqq (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$. Alors

$$\lambda = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i.$$

(car $\sum_{i\in I} \lambda_i e_i(j) = \lambda_j$).
C'est donc une base de $\mathbb{K}^{(I)}$.

En particulier, $\mathbb{K}[X]$ admet pour base la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Avertissement 1.4.34. Si I est infini alors cette famille n'engendre pas $\mathbb{K}^I$. En effet, une combinaison linéaire (et donc une somme finie) de e_i ne peut pas avoir une infinité de valeurs non-nuls. En particulier, la fonction constante valant 1 n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\{e_i, i \in I\})$.

Exemple 1.4.35. Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_j)_{j\in J}$ une base de F. L'espace $E \times F$ est un espace vectoriel (cf. 1.2.6) et admet pour base

$$\mathscr{D} = (e_i \times \{0\}, i \in I, \{0\} \times f_j, j \in J).$$

En effet, c'est une famille libre : pour $((\lambda_i), (\mu_j)) \in \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}^{(J)}$ tels que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i \times \{0\} + \sum_{j\in J} \mu_j \{0\} \times f_j = 0.$$

et donc

$$\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i, \sum_{j\in J} \mu_j f_j \right) = 0$$

On en déduit donc les deux égalités suivantes

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0 \text{ et } \sum_{j\in J} \mu_j f_j = 0.$$

Comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux familles libres alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$ et $\mu_j = 0$ pour tout $j \in J$.

C'est aussi une famille génératrice de $E \times F$: soit $(x, y) \in E \times F$. En particulier, $x \in E$ et $y \in F$. Comme (e_i) est une famille génératrice de E et (f_j) est une famille génératrice de F alors on a une famille de coefficients $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ et $(\mu_j) \in \mathbb{K}^{(J)}$ telle que

$$(x, y) = \left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i, \sum_{j\in J} \mu_j f_j \right).$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}(x,y) &= \left(\sum_{i\in I}\lambda_i e_i, \sum_{j\in J}\mu_j f_j\right)\\ &= \left(\sum_{i\in I}\lambda_i e_i, 0\right) + \left(0, \sum_{j\in J}\mu_j f_j\right)\\ &= \sum_{i\in I}\lambda_i e_i \times \{0\} + \sum_{j\in J}\mu_j\{0\}\times f_j,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Exemple 1.4.36. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe. Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ une base de E et de F.

Alors la famille $(z_k)_{k\in I\sqcup J}$ définie par

$$\forall k \in I\sqcup J, z_k = \begin{cases} x_i \text{ si } i\in I\\ y_j \text{ si } j \in J\end{cases}$$

est une base de $F\oplus G$. Elle est génératrice par 1.4.24. Montrons qu'elle est libre. Soient $(\lambda_i)_{i\in I}\in \mathbb{K}^{(I)}$ et $(\mu_j)_{j\in J}\in\mathbb{K}^{(J)}$ telles que

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i + \sum_{j\in J}\mu_j y_j = 0$$

la première somme étant dans F et la deuxième dans G alors comme F et G sont en somme directe, on en déduit que

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0 = \sum_{j\in J}\mu_j y_j.$$

Comme les familles (e_i) et (f_j) sont libres alors

$$\forall i\in I, \lambda_i = 0 \text{ et } \forall j\in J, \mu_j = 0,$$

ce qui permet de conclure.

Plus généralement, si les F_i sont en somme directe, une base de $\bigoplus_{i=1}^n F_i$ est la concaténation de base des F_i.

Corollaire 1.4.37. *Soit $\mathscr{F} := (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Notons $\varphi_{\mathscr{F}}$ la fonction $\mathbb{K}^{(I)}\to E$ définie par*

$$\varphi_{\mathscr{F}}((\lambda_i)_{i\in I}) := \sum_{i\in I}\lambda_i x_i.$$

1. $\forall(\lambda_i)_{i\in I},(\mu_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}, \forall\alpha\in\mathbb{K}, \varphi_{\mathscr{F}}((\lambda_i)+\alpha(\mu_i)_{i\in I}) = \varphi_{\mathscr{F}}((\lambda_i))+\alpha\varphi_{\mathscr{F}}((\mu_i))$ *;*
2. *$\varphi_{\mathscr{F}}$ est injective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une famille libre ;*
3. *$\varphi_{\mathscr{F}}$ est surjective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E ;*
4. *$\varphi_{\mathscr{F}}$ est bijective si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une base de E.*

Démonstration. 1) Déjà fait.

2) Supposons $\varphi_{\mathscr{F}}$ injective. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}$ tel que

$$\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0 = \sum_{i\in I}0x_i$$

Alors par injectivité de $\varphi_{\mathscr{F}}$, $(\lambda_i) = 0$.

Supposons que $\mathscr{F}$ est libre. Soient $(\lambda_i)_{i\in I}$ et $(\mu_i)_{i\in I}$ dans $\mathbb{K}^{(I)}$ tels que

$$\varphi_{\mathscr{F}}((\lambda_i)) = \varphi_{\mathscr{F}}((\mu_i)).$$

Par le point 1), on déduit que cela revient à écrire que

$$\varphi_{\mathscr{F}}((\lambda_i - \mu_i)) = 0$$

ou encore

$$\sum_{i\in I}(\lambda_i - \mu_i)x_i = 0$$

Comme la famille (x_i) est libre alors $\lambda_i = \mu_i$ pour tout i. On en déduit donc l'injectivité de $\varphi_{\mathscr{F}}$.

3) La fonction est surjective si, et seulement, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ tel que $\varphi_{\mathscr{F}}((\lambda_i)) = x$ si, et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ tel que $\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = x$ si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.

4) Cela découle des deux résultats précédents. □

Théorème 1.4.38 (Théorème de la base incomplète (version forte))**.** *Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une famille libre, alors il existe une sous-famille $\mathscr{F}$ de $\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}$*[4] *telle que $\mathscr{L} \cup \mathscr{F}$*[5] *soit une base de E.*

Démonstration. Supposons que $\mathscr{G}$ est finie[6]. La construction se fait de façon algorithmique[7] :

— Si $\mathscr{L}$ n'est pas génératrice de E alors on peut choisir un élément g dans $\mathscr{G}$ qui ne soit pas une combinaison linéaire de $\mathscr{L}$ (car $\mathscr{G}$ est générateur de E). On obtient, grâce au lemme 1.4.20, une famille libre $\mathscr{L} \cup (g)$. On revient ensuite au début du point.

— Si $\mathscr{L}$ est générateur de E alors c'est une base de E

Cela finit en un nombre fini d'étapes puisque $\mathscr{G}$ est génératrices et finie. □

Lemme 1.4.39. *Avec les mêmes notations que* 1.4.38*, l'espace vectoriel L des combinaisons linéaires de $\mathscr{L}$ et F, celles de $\mathscr{F}$, sont supplémentaires.*

Démonstration. Notons $\mathscr{L} = (x_i)_{i\in I}$ et $\mathscr{F} = (y_j)_{j\in J}$. Alors, comme $\mathscr{B} = \mathscr{L} \cup \mathscr{F}$ est une base de E,

$$E = \mathrm{Vect}(\{x_i, i \in I\} \cup \{y_j, j \in J\}) = \mathrm{Vect}(\{x_i, i \in I\}) + \mathrm{Vect}(\{y_j, j \in J\}) = L + F$$

De plus, si $x \in L \cap F$ alors x s'écrit de la façon suivante :

$$x = \sum \lambda_i x_i = \sum \mu_j y_j$$

où $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$, $(\mu_j) \in \mathbb{K}^{(J)}$. On en déduit donc que

$$0 = \sum \lambda_i x_i - \sum \mu_j y_j$$

Comme la famille $\mathscr{B}$ est libre alors les λ_i et μ_j sont nuls et donc $x = 0$. Ce qui montre que $E = L \oplus F$ et donc L et F sont supplémentaires. □

4. c'est une abus de langage pour dire que c'est la plus grande sous-famille de $\mathscr{G}$ ne contenant pas d'éléments apparaissant dans $\mathscr{L}$

5. si $\mathscr{L} = (x_i)_{i\in I}$ et $\mathscr{F} = (y_j)_{j\in J}$ alors $\mathscr{L} \cup \mathscr{F} \coloneqq (z_k)_{k\in I\sqcup J}$ où $z_k = x_k$ si $k \in I$ et $z_k = y_k$ si $k \in J$

6. le cas général nécessite l'axiome du choix

7. on utilise le principe du tiers exclus

Corollaire 1.4.40. *Toute famille libre peut être complétée en une base.*

Démonstration. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre. Comme $(e)_{e\in E}$ est une famille génératrice[8] de E alors grâce au théorème de la base incomplète, on peut trouver une sous-famille $\mathscr{F}$ de $(e)_{e\in E} \setminus \mathscr{L}$ tel que $\mathscr{L} \cup \mathscr{F}$ soit une base de E. $\square$

Corollaire 1.4.41. *On peut extraire une base de E d'une famille génératrice de E.*

Démonstration. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. Comme $\emptyset$ est une famille libre alors par le théorème de la base incomplète, il existe une sous-famille de $\mathscr{G}$ qui est une base de E. $\square$

Corollaire 1.4.42. *Tout espace vectoriel admet une base.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel. Comme $\emptyset$ est une famille libre de E et $(e)_{e\in E}$ est une famille génératrice de E alors par le théorème de la base incomplète il existe une sous-famille $\mathscr{F}$ de $(e)_{e\in E}$ qui soit une base de E. $\square$

Corollaire 1.4.43. *Tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Par 1.4.42, on peut trouver une base $\mathscr{B}_F$ de F. C'est une famille libre de E qu'on peut compléter grâce à 1.4.40 en une base $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{F}$ de E. L'espace vectoriel V des combinaisons linéaires de $\mathscr{F}$ est un supplémentaire de F (cf. 1.4.39). $\square$

Corollaire 1.4.44. *Une famille est une base si et seulement si elle est libre maximale[9] ou génératrice minimale de E[10].*

Démonstration. Si une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E alors elle est libre.
Soit $\mathscr{F} = (e_i)_{i\in J}$ une sur-famille de $\mathscr{B}$ avec $I \neq J$. Soit $j \in J \setminus I$. Comme $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E alors x_j s'écrit comme une combinaison linéaire de $\mathscr{B}$ et donc $\mathscr{F}$ n'est pas libre. De la même, une base de E est générateur de E. Soit $\mathscr{F} = (e_j)_{j\in J}$ une sous-famille de $\mathscr{B}$ avec $J \subset I$. Supposons-la génératrice de E. Soit $j \in I \setminus J$. Le vecteur x_j s'écrit donc comme une combinaison linéaire de $\mathscr{F}$ i.e. il existe $(\lambda_j) \in \mathbb{K}^{(J)}$ tel que

$$x_j = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i,$$

ce qui est impossible par liberté de $\mathscr{B}$.

Réciproquement, considérons une famille $\mathscr{L}$ est libre et maximale (resp. $\mathscr{G}$ génératrice et minimale). Par 1.4.40 (resp. 1.4.41) , on peut la compléter (resp. extraire) $\mathscr{B}$ en une base de E. Par maximalité de $\mathscr{L}$ (resp. minimalité de $\mathscr{G}$), on en déduit que $\mathscr{B} = \mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{B} = \mathscr{G}$). $\square$

Exercices

Exercice 16. Pour chacune des familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, dire si elle est libre, génératrice de $\mathbb{R}^3$, une base de $\mathbb{R}^3$, et donner une base de l'espace vectoriel engendré.

1. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (-1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$.
2. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (3, 2, 1)$.

8. si on ne veut pas utiliser l'axiome du choix, on peut ajouter l'hypothèse de l'existence d'une famille génératrice finie
9. au sens que n'importe quelle sur-famille ($\neq \mathscr{L}$) n'est plus libre
10. au sens que n'importe quel sous-famille ($\neq \mathscr{G}$) n'est plus génératrice de E

3. (v_1, v_2) avec $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (3, 0, 3)$.
4. (v_1, v_2, v_3, v_4) avec $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 3, 1)$, $v_3 = (3, 2, 1)$, $v_4 = (1, 1, 1)$.

Exercice 17. Dans un espace vectoriel E, on considère des vecteurs u, v, w et w' de E tels que $2u + v = w$ et $5u + 3v = w'$. Déterminer u et v en fonction de w et w'.

Exercice 18. Pour quels $m \in \mathbb{R}$, les familles $((1, 3), (1 - m, 9))$, $((1 + m, 1 - m), (1 - m, 1 + m))$ et $((1, 0, -2), (1, 3, -1), (3, 3, m^2 + 6m))$ sont-elles des bases de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 19. Soit $V \subset \mathbb{K}^3$ l'espace vectoriel défini par l'équation $x + y + z = 0$.

1. Trouver une base de V et justifier que c'en est une.
2. Est-ce que toute personne répondant à cette question, produira-t-elle la même base ? Que peut-on conclure concernant une notion de "base naturelle" pour un sous-espace vectoriel ?

Exercice 20. Soient $u = (1, 2, 3, 4)$ et $v = (1, -2, 3, -4)$ dans $\mathbb{R}^4$.

1. Existe-t-il $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{Vect}(u, v)$?
2. Existe-t-il $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{Vect}(u, v)$?

Exercice 21. Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul et $E = \mathbb{C}_{\leq n}[X]$.

1. Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que les polynômes $(X - a)^k$, $0 \leq k \leq n$, forment une base de E.
2. Soit $F = \{P \in E \mid P'(a) = P''(a) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Donner une base de F.
3. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ avec $a \neq b$. Montrer que les polynômes $(X - a)^k (X - b)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$, forment une base de E.
4. Pour chaque entier $j = 0, \ldots, n$, soit $p_j \in E$ un polynôme de degré[11] j. Montrer que $P_0, \ldots, P_n$ forment une base de E.

Exercice 22. Donner une base des espaces vectoriels apparaissant dans les exercices 12 et 13 pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Exercice 23. On se place dans l'espace vectoriel des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto x^n$. Montrer que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
2. Montrer que les fonctions $x \mapsto 1$, sin, $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto \sin(3x)$ sont linéairement indépendantes.
3. Les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto \sin(2x)$ et $x \mapsto (\sin x)^2$ sont-elles linéairement indépendantes ? Même question pour les fonctions $x \mapsto 1$, $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto (\sin x)^2$.
4. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $g_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que g_a et g_b sont linéairement indépendantes si et seulement si a et b sont distincts.
5. (*) Plus généralement, montrer que la famille $(g_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre.

Exercice 24. Considérons le sous-ensemble F des fonctions continues $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ dont les restrictions sur $[-1, 0]$ et $[0, 1]$ sont affines. Montrer que F est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 25. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles.

11. On rappelle que, par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$

1. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{S}_{\text{Fib}}$ des suites vérifiant la relation de récurrence suivante
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_{\text{Fib}}$ contient deux suites géométriques de raison différente (on notera celle de plus grande raison (a_n) et l'autre (b_n)).
3. Montrer que la famille $((a_n), (b_n))$ est une base de $\mathcal{S}_{\text{Fib}}$.
4. En déduire une formule pour la suite de Fibonacci : la suite (F_n) de $\mathcal{S}_{\text{Fib}}$ telle que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

1.5 Systèmes linéaires

On va se concentrer sur le cas $E = \mathbb{K}^n$.

Soient $v_1 = (v_{11}, \dots, v_{n1}), \dots, v_p = (v_{11}, \dots, v_{np})$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Pour vérifier si ces vecteurs forment une famille libre, on va déterminer quelles famille de coefficients $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ donne une combinaison linéaire nulle i.e. trouver les familles $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ telles que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0,$$

ce qui se réécrit de la façon suivante

$$\begin{cases} v_{11}\lambda_1 + \dots + v_{1p}\lambda_p = 0 \\ \vdots \\ v_{n1}\lambda_1 + \dots + v_{np}\lambda_p = 0 \end{cases}$$

Ceci est ce qu'on appelle un système linéaire.

Définition 1.5.1. Un système linéaire[12] est un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

d'inconnues $x_1, \dots, x_p$ et où $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$.
Une solution d'un système linéaire est un élément de $\mathbb{K}^p$ qui vérifie ces équations.

La résolution de ces systèmes linéaires se fait grâce aux deux propositions suivantes.

Proposition 1.5.2. *Un système linéaire d'inconnues* $x_1, \dots, x_n$ *de la forme*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

avec les a_{ii} *tous non nuls, a une unique solution.*

Démonstration. On va calculer les x_i de proche en proche :

— $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$;

— $x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}}$

— Supposons que $x_n, \dots, x_{n-k}$ aient été calculés. Alors

$$x_{n-k-1} = \frac{b_{n-k-1} - \sum_{i=0}^{k} a_{n-k-1n-i}x_{n-i}}{a_{n-k-1n-k-1}}$$

On obtient ainsi l'unique possibilité pour $(x_1, \dots, x_n)$. □

Exemple 1.5.3. Considérons le système linéaire (dans $\mathbb{R}$) suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + \ z = 2 \\ \qquad 4y + 7z = 3 \\ \qquad\qquad 4z = 4 \end{cases}$$

Alors $z = 1$ puis $4y = 3 - 7z = -4$ donc $y = -1$, et $2x = 2 - z - 3y = 2 - 1 + 3 = 4$ donc $z = 2$.

12. un adjectif plus approprié aurait été « affine »

Corollaire 1.5.4. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire d'inconnues $x_1, \dots, x_n$ de la forme*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad a_{pp}x_p + \dots + a_{pn}x_n = b_n \end{cases}$$

avec les a_{ii} tous non nuls et $p \leq n$, est l'ensemble des (uniques) solutions des systèmes

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p-1}x_{p-1} + a_{1p}x_p = b_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2p-1}x_{p-1} + a_{2p}x_p = b_2 - a_{2p+1}x_{p+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad a_{p-1p-1}x_{p-1} + a_{p-1p}x_n = b_{p-1} - a_{pp+1}x_{p+1} - \dots - a_{pn}x_n \\ \qquad\qquad\qquad a_{pp}x_p = b_p - a_{pp+1}x_{p+1} - \dots - a_{pn}x_n \end{cases}$$

où $(x_{p+1}, \dots, x_n\}$ parcourt $\mathbb{K}^{n-p}$

Exemple 1.5.5. Considérons le système linéaire (dans $\mathbb{R}$) suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + \ z = 2 \\ \qquad 4y + 7z = 3 \end{cases}$$

Alors $y = \frac{1}{4}(3 - 7z)$ et

$$2x = 2 - 3y - z = 2 - \frac{3}{4}(3 - 7z) - z = -\frac{1}{4} + \frac{17}{4}z.$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc

$$\left\{ \left(-\frac{1}{4} + \frac{17}{4}z, \frac{1}{4}(3 - 7z), z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$$

On retrouve le résultat précédent en prenant $z = 1$.

Proposition 1.5.6. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si on effectue sur les équations les opérations élémentaires suivantes :*

1. *changer l'ordre des équations ;*
2. *multiplier une équation par un scalaire non-nul.*
3. *ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres.*

Démonstration. 1) Les conditions ne changent pas si on change l'ordre.
2) Soit $\lambda \neq 0$. Le vecteur $(x_1, \dots, x_p)$ vérifie l'équation $a_{\ell 1}x_1 + \dots + a_{\ell p}x_p = b_\ell$ si, et seulement si, il vérifie l'équation $\lambda a_{\ell 1}x_1 + \dots + \lambda a_{\ell p}x_p = \lambda b_\ell$ (d'un côté, on multiplie par λ et de l'autre par $\frac{1}{\lambda}$).
3) Quitte à réordonner les équations, on peut supposer qu'on ajoute à la première ligne.

Si le vecteur $(x_1, \dots, x_p)$ vérifie le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

alors pour tout $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$, il est solution du système

$$\begin{cases} \left(a_{11} + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i a_{i1}\right) x_1 + \ldots + \left(a_{1p} + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i a_{ip}\right) x_p = b_1 + \sum_{i=2}^{p} \alpha_i b_i \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

(on développe la parenthèse et on utilise les autres équations). On obtient la réciproque en soustrayant la combinaision linéaire. □

Construction 1.5.7 (Pivot de Gauß ou élimination de Gauß-Jordan)**.** *Pour résoudre un système linéaire,*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = b_n & (L_n) \end{cases},$$

on peut appliquer l'algorithme suivant :

— *on examine la première colonne de coefficients du système* $\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}$. *S'ils sont tous nuls alors on passe à la colonne suivante. Sinon , quitte à intervertir les équations (ce qui ne change pas les solutions), on peut supposer que* a_{11} *est non nul. On ajoute ensuite à chaque* L_i, $i \geq 2$, $-\frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$ *(ce qui ne change pas les solutions). Ainsi, le système devient*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{21}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 & (L_1) \\ & \widetilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{2p}x_p = \widetilde{b}_2 & (L_2) \\ & \vdots \\ & \widetilde{a}_{n2}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{np}x_p = \widetilde{b}_n & (L_n) \end{cases}$$

Le système composé des équations $L_2, \ldots, L_n$ *ne fait plus intervenir que les inconnues* $x_2, \ldots, x_n$.

— *On recommence ensuite avec le nouveau système obtenue.*

— *Après l'avoir fait suffisamment de fois, on obtient un système linéaire de la forme*

$$\begin{cases} \alpha_{1i_1}x_{i_1} + & \alpha_{1i_1+1}x_{i_1+1} + & \ldots + & \alpha_{1i_k}x_p + \ldots + \alpha_{1p}x_p = b_1 \\ & \alpha_{2i_2}x_{i_2} + & \ldots + & \alpha_{2i_k}x_{i_k} + \ldots + \alpha_{2p}x_p = b_2 \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_{ki_k}x_{i_k} + \ldots + \alpha_{kp}x_n = b_k \\ 0x_1 + & 0x_2 + & \ldots + & 0x_{i_k} + \ldots + 0x_p = b_{k+1} \\ \vdots \\ 0x_1 + & 0x_2 + & \ldots + & 0x_{i_k} + \ldots + 0x_p = b_n \end{cases} \tag{1.3}$$

Deux cas se présentent maintenant :

— *il existe un* $j \in \{k+1, \ldots, n\}$ *tel que* $b_j \neq 0$. *Alors le système* (1.3) *n'a pas de solution et donc le système initial non plus.*

— *tous les* b_j *sont nuls. On est alors ramené à un système de la forme du corollaire 1.5.4 de variable* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$. *Les variables « manquantes »* x_ℓ, $\ell \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$, *parcourent* $\mathbb{K}$.

Exemple 1.5.8. Considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 2t + 3x + 4y + 2z = 11 \\ 2t + 3x + 6y + 4z = 15 \\ 4t + 7x + 5y + 5z = 21 \\ 8t + 13x + 15y + 11z = 47 \end{cases}.$$

Alors on a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} 2t + 3x + 4y + 2z = 11 & (L_1) \\ 2t + 3x + 6y + 4z = 15 & (L_2) \\ 4t + 7x + 5y + 5z = 21 & (L_3) \\ 8t + 13x + 15y + 11z = 47 & (L_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3x + 4y + 2z = 11 & (L_1) \\ 2y + 2z = 4 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ x - 3y + z = -1 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ x - y + 3z = 3 & (L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3x + 4y + 2z = 11 & (L_1) \\ x - 3y + z = -1 & (L_2 \leftarrow L_3) \\ 2y + 2z = 4 & (L_3 \leftarrow L_2) \\ x - y + 3z = 3 & (L_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3x + 4y + 2z = 11 & (L_1) \\ x - 3y + z = -1 & (L_2) \\ 2y + 2z = 4 & (L_3) \\ 2y + 2z = 4 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 3x + 4y + 2z = 11 & (L_1) \\ x - 3y + z = -1 & (L_2) \\ 2y + 2z = 4 & (L_3) \\ 0 = 0 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_3) \end{cases}$$

On peut maintenant résoudre ce système avec le corollaire 1.5.4. On peut noter que si le terme à droite de la dernière était 48, le système aurait comporté une équation $0 = 1$ et donc n'aurait pas eu de solution.

Définition 1.5.9. On considère un système linéaire comme dans le corollaire 1.5.7.

— le système linéaire (1.3) est une forme échelonnée du système.

— les variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ sont appelées variables principales et les autres variables sont appelées variables libres.

— les coefficients $a_{1i_1}, \ldots, a_{ki_k}$ de (1.3) sont appelés pivots.

Remarque 1.5.10. On ne parlera pas de « la » forme échelonnée qui comme le suggère l'algorithme n'est pas unique (même si on impose que $a_{ii} = 1$).

Définition 1.5.11. Un système linéaire est dit homogène si les coefficients b_i sont nuls.

Proposition 1.5.12. *L'ensemble des solutions d'une système linéaire homogène d'inconnues $x_1, \ldots, x_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.*

Démonstration. Soit

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

un système linéaire. Alors 0 est une solution du système. Si $(x_1, \ldots, x_p)$, $(x', \ldots, x_p)$ sont deux solutions et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $(x_1 + \lambda x_1', \ldots, x_p + \lambda x_p')$ est aussi une solution car pour $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$a_{j1}(x_1 + \lambda x_1') + \ldots + a_{jp}(x_p + \lambda x_p') = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jp}x_p + \lambda(a_{j1}x_1' + \ldots + a_{jp}x_p') = 0$$

□

Remarque 1.5.13. En particulier, 0 est toujours solution d'un système linéaire homogène.

Proposition 1.5.14. *L'espace vectoriel des solutions du système*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \ (L_1) \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \ (L_2) \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad a_{pp}x_p + \ldots + a_{pn}x_n = 0 \ (L_p) \end{cases} \tag{1.4}$$

(où $a_{ii} \neq 0$ pour tout i) admet pour base une famille de la forme

$$(1, 0, \ldots, \alpha_{1,p+1}, \ldots, \alpha_{p,p+1}), (0, 1, 0, \ldots, \alpha_{1,p+2}, \ldots, \alpha_{p,p+2}), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, \alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{p,n}))$$

où $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, on va continuer à simplifier le système : pour chaque pivot a_{jj}, on va rendre les coefficients du dessus nul : on va remplacer L_1 par $L_1 - \frac{12}{a_{22}}L_2$ puis L_2 par $L_2 - \frac{a_{23}}{a_{33}}L_3$ et le nouveau L_1 par $L_1 - \frac{a'_{13}}{a_{33}}L_3$ (ou a'_{13} est le nouveau coefficient de L_1) etc. En divisant chaque équation par le pivot et en passant les termes en $x_{p+1}, \ldots, x_n$ de l'autre côté de l'égalité, on obtient alors un système de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1,p+1}x_{p+1} + \ldots + \alpha_{1,n}x_{p+1} \\ \vdots \\ x_p = \alpha_{p,p+1}x_{p+1} + \ldots + \alpha_{p,n}x_{p+1} \end{cases} \tag{1.5}$$

On en déduit donc que les conditions suivantes sont équivalentes pour $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

1. u est solution de (1.3) ;
2. u est solution de (1.5) ;
3. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} u &= (\alpha_{1,p+1}x_{p+1} + \ldots + \alpha_{1,n}x_{p+1}, \ldots, \alpha_{p,p+1}x_{p+1} + \ldots + \alpha_{p,n}x_{p+1}, x_{p+1}, \ldots, x_n) \\ &= x_{p+1}(\alpha_{1,p+1}, \ldots, \alpha_{p,p+1}, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n(\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{p,n}, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

L'espace vectoriel des solutions du système (1.3) est engendré par

$$(1, 0, \ldots, \alpha_{1,p+1}, \ldots, \alpha_{p,p+1}), (0, 1, 0, \ldots, \alpha_{1,p+2}, \ldots, \alpha_{p,p+2}), \ldots, (0, \ldots, 0, 1, \alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{p,n}))$$

C'est une base de celui-ci car c'est une famille de vecteurs échelonnés (cf. 1.4.18). □

Remarque 1.5.15. On remarque que, sur ce cas, il est facile de compléter cette base en une base de $\mathbb{K}^n$: avec $e_{n-p+1}, \ldots, e_n$. Par le pivot de Gauß, tout système s'écrit (modulo permutation) comme un système échelonné de cette forme. La description par système et le pivot permet donc de donner une approche effective du théorème de la base incomplète.

Proposition 1.5.16. *Soient $v_1 = (v_{11}, \ldots, v_{n1}), \ldots, v_p = (v_{11}, \ldots, v_{np})$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. La famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est libre si, et seulement si, le système*

$$\begin{cases} v_{11}\lambda_1 + \ldots + v_{1p}\lambda_p = 0 \\ \vdots \\ v_{n1}\lambda_1 + \ldots + v_{np}\lambda_p = 0 \end{cases}$$

a une unique solution.

Démonstration. C'est une réécriture de la définition. □

Remarque 1.5.17. Les solutions non-triviales d'un tel système décrivent des combinaisons linéaires non-triviales nulles. Cela permet donc d'extraire des éléments de la famille qui a moins de relation jusqu'à que celle-ci soit libre.

Proposition 1.5.18. *Soient $v_1 = (v_{11}, \dots, v_{n1}), \dots, v_p = (v_{11}, \dots, v_{np})$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs est solution d'un système linéaire homogène.*

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned} F &= \{u \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p\} \\ &= \left\{ u = (x_1, \dots, x_n) \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \begin{cases} x_1 = v_{11}\lambda_1 + \dots + v_{1p}\lambda_p \\ \vdots \\ x_n = v_{n1}\lambda_1 + \dots + v_{np}\lambda_p \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

On échelonne le système d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ obtenu

$$F = \left\{ u = (x_1, \dots, x_n) \mid \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \left\{ \begin{array}{llll} w_{1i_1}\lambda_{i_1} + & w_{1i_1+1}\lambda_{i_1+1} + & \dots + & w_{1i_k}\lambda_p + \dots + w_{1p}\lambda_p = x_1 \\ & w_{2i_2}\lambda_{i_2} + & \dots + & w_{2i_k}\lambda_{i_k} + \dots + w_{2p}\lambda_p = \tilde{x}_2 \\ & & \ddots & \\ & & & w_{ki_k}\lambda_{i_k} + \dots + w_{kp}\lambda_n = \tilde{x}_k \\ 0\lambda_1 + & 0\lambda_2 + & \dots + & 0\lambda_{i_k} + \dots + 0\lambda_p = \tilde{x}_{k+1} \\ \vdots & & & \\ 0\lambda_1 + & 0\lambda_2 + & \dots + & 0\lambda_{i_k} + \dots + 0\lambda_p = \tilde{x}_n \end{array} \right. \right\}$$

où $\tilde{x}_k$ (pour $2 \leq k \leq n$) est une combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_k)$ dont les coefficients ne dépendent uniquement des coordonnées de $(v_1, \dots, v_p)$ et les w_{ij} sont les coefficients d'un système linéaire échelonné associé (où $w_{ki_k} \neq 0$ pour tout k).
Comme les w_{ki_k} sont non-nuls alors on peut toujours trouver des $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{llll} w_{1i_1}\lambda_{i_1} + & w_{1i_1+1}\lambda_{i_1+1} + & \dots + & w_{1i_k}\lambda_p + \dots + w_{1p}\lambda_p = x_1 \\ & w_{2i_2}\lambda_{i_2} + & \dots + & w_{2i_k}\lambda_{i_k} + \dots + w_{2p}\lambda_p = \tilde{x}_2 \\ & & \ddots & \\ & & & w_{ki_k}\lambda_{i_k} + \dots + w_{kp}\lambda_n = \tilde{x}_k \end{array} \right.$$

(il suffit de poser $\lambda_i = 0$ et choisir les bons λ_{i_k} aux pivots). Ainsi, on obtient :

$$F = \left\{ u = (x_1, \dots, x_n) \mid \begin{cases} 0 = \tilde{x}_{k+1} \\ \vdots \\ 0 = \tilde{x}_n \end{cases} \right\}$$

□

Remarque 1.5.19. On montrera dans la suite que tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ peuvent s'écrire comme l'espace engendré par une famille fini de vecteurs et donc peuvent être décrits comme l'espace des solutions d'un système linéaire homogène. Le pivot de Gauss permet d'obtenir une description avec « un nombre minimal »d'équations. Pour cela, il suffit de montrer que le nombre de pivots dépend uniquement de l'espace vectoriel considéré (cf. 1.6.7).

Proposition 1.5.20. *Soient* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{K}^p$ *décrits par les systèmes linéaires suivants :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + \ldots + b_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ b_{m1}x_1 + \ldots + b_{mp}x_p = 0 \end{cases}.$$

Alors $F \cap G$ *est décrite par le système linéaire*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = 0 \\ b_{11}x_1 + \ldots + b_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ b_{m1}x_1 + \ldots + b_{mp}x_p = 0 \end{cases}.$$

Démonstration. Cela découle du résultat général sur les ensembles définie en compréhension :

$$\{x \mid \mathscr{P}(x)\} \cap \{x \mid \mathscr{Q}(x)\} = \{x \mid \mathscr{P}(x) \text{ et } \mathscr{Q}(x)\}.$$

(où $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont des propriétés dépendant de x) □

1.6 Théorie de la dimension

Définition 1.6.1. On dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie si elle admet une famille génératrice finie. Un espace vectoriel est de dimension infinie s'il n'est pas de dimension finie.

Exemple 1.6.2.

— $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie : la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$.

— $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie : soit $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille de $\mathbb{K}[X]$. Notons N le maximum de leur degré. Alors, pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\deg\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) \leq \max_{1\leq i\leq n} \deg(\lambda_i P_i) \leq \max_{1\leq i\leq n} \deg(P_i) = N$$

Cette famille ne peut donc pas génératrice de $\mathbb{K}[X]$ car X^{N+1} n'est pas obtenu comme une combinaison linéaire de la famille $(P_1, \ldots, P_n)$. On ne peut donc pas trouver de famille génératrice finie de $\mathbb{K}[X]$.

Lemme 1.6.3. *Soit E un espace vectoriel engendré par une famille à n éléments. Tout famille contenant au moins $n+1$ éléments est liée.*

Démonstration. Soit $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille génératrice de E et $\mathscr{F}' = (w_1, \ldots, w_m)$ une famille de m vecteurs, avec $m > n$. Si un des w_i est nul alors $\mathscr{F}'$ est liée. Supposons donc que tous les w_i sont tous non nuls. Comme $\mathscr{F}$ est génératrice de E alors

$$w_1 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Comme $w_1 \neq 0$ alors il y a un α_i non-nul. Quitte à permuter, on peut supposer que $\lambda_1 \neq 0$. On a :

$$v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(w_1 - \lambda_2 v_1 - \ldots - \lambda_n v_n).$$

La famille $(w_1, v_2, \ldots, v_n)$ est génératrice : si $x \in E$ alors, comme $\mathscr{F}$ engendre E, celui s'écrit sous la forme $x = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$ et donc

$$\begin{aligned} x = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \ldots + \mu_n v_n &= \mu_1 \frac{1}{\lambda_1}(w_1 - \lambda_2 v_1 - \ldots - \lambda_n v_n) + \mu_2 v_2 \ldots + \mu_n v_n \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} w_1 + \left(\mu_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) v_2 + \ldots + \left(\mu_n - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) v_n \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $(w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ est une famille génératrice de E (modulo une permutation des w_i).

Considérons maintenant le vecteur w_{k+1}. Il s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $(w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$:

$$w_2 = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_k w_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} \ldots + \alpha_n v_n.$$

Si $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ alors $w_{k+1} = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_k w_k$ et donc la famile $\mathscr{F}'$ est liée. Supposons les donc non tous nuls et sans perte de généralité, $\alpha_{k+1} \neq 0$. Alors

$$v_{k+1} = \frac{1}{\alpha_{k+1}}(w_{k+1} - \alpha_1 w_1 - \ldots - \alpha_k w_k - \alpha_{k+2} v_{k+2} - \ldots - \alpha_n v_n).$$

On en déduit comme précédemment que $(w_1, \ldots, w_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n)$ est génératrice.

De proche en proche, on montre que la famille $(w_1, \ldots, w_n)$ est une famille génératrice de E. Donc w_{n+1} s'écrit comme une combinaison linéaire de $(w_1, \ldots, w_n)$ et $\mathscr{F}'$ n'est pas libre.

□

Remarque 1.6.4. En particulier, toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie sont de cardinal fini.

Théorème 1.6.5. *Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même cardinal.*

Démonstration. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie. Notons n le cardinal de $\mathscr{B}$ et m le cardinal de $\mathscr{B}'$. Alors comme $\mathscr{B}$ est génératrice de l'espace vectoriel et $\mathscr{B}'$ est libre alors $m \leq n$ et comme $\mathscr{B}'$ est génératrice de l'espace vectoriel et $\mathscr{B}$ est libre alors $n \leq m$. On en conclut donc $n = m$. □

Définition 1.6.6. On appelle dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie le cardinal d'une base de cet espace vectoriel. On notera $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ la dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Exemple 1.6.7.
- L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension n.
- L'espace vectoriel $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$ est de dimension $n+1$.
- L'espace vectoriel d'un système linéaire dans $\mathbb{K}^n$ dont une forme échelonnée a p pivots est de dimension $n-p$ (cf. Proposition 1.5.14) et dans le sens inverse, un espace vectoriel de dimension k admet une description avec $n-k$ équations (qui est le nombre minimal puisqu'on aurait sinon moins de pivot et donc plus de dimension. En particulier, les solutions du système de l'exemple 1.5.8 forment un espace vectoriel de dimension 1.
- La dimension d'un produit $E \times F$ est la somme des dimensions (cf. 1.4.35). Et plus généralement la dimension d'un produit fini $E_1 \times \ldots \times E_n$ est la somme des dimensions.

Remarque 1.6.8. La dimension d'un espace vectoriel dépend du corps de base $\mathbb{K}$: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ mais $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

Corollaire 1.6.9. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.*

1. *Une famille ayant au moins n éléments est liée ;*
2. *Une famille ayant au plus $n-1$ éléments n'est pas génératrice de E.*

Démonstration. 1) On utilise le lemme 1.6.3 avec une base de E.

2) Si une famille ayant au plus $n-1$ éléments est génératrice alors par 1.4.41, on aurait une sous-famille (donc de cardinal plus petit) qui serait une base ayant pas de n éléments, ce qui contredit l'unicité du cardinal. □

Corollaire 1.6.10. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Alors*

1. *toute famille génératrice de E à n éléments est une base de E ;*
2. *toute famille libre de E à n éléments est une base de E.*

Démonstration. 1) Si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E à n éléments alors, par le corollaire 1.4.41, on peut extraire une sous-famille $\mathscr{B}$ de $\mathscr{G}$ qui est une base de E. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E alors cette famille a (aussi) n éléments. On en déduit donc que $\mathscr{B} = \mathscr{G}$.

2) Si $\mathscr{L}$ est une famille libre à n éléments alors, par le corollaire 1.4.40, on peut la compléter en une sous-famille $\mathscr{B}$ de $\mathscr{G}$ qui est une base de E. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E alors cette famille a (aussi) n éléments. On en déduit donc que $\mathscr{B} = \mathscr{L}$. □

Corollaire 1.6.11. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et*

1. $\dim_{\mathbb{K}}(F) \leq \dim_{\mathbb{K}}(E)$;
2. $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) \Leftrightarrow F = E$.

Démonstration. Par le théorème 1.4.38, F admet une base $\mathscr{B}_F$. Cette base est une famille libre de E qui peut, par le corollaire 1.4.40, se compléter en une base $\mathscr{B}$ de E. Comme $\mathscr{B}_F$ est une sous-famille de $\mathscr{B}$ alors $\mathscr{B}_F$ est fini et de cardinal inférieur à celui de $\mathscr{B}$ i.e. $\dim_{\mathbb{K}}(F) \leq \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Si $F = E$ alors $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Supposons que $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de F. C'est une famille libre de E qui est de cardinal $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$. Par le corollaire 1.6.10, c'est une base de E. On en déduit donc que

$$F = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = E.$$

□

Exemple 1.6.12. Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ est au plus de dimension n. On peut donc appliquer la proposition 1.5.18 à n'importe quel d'entre eux.

Exemple 1.6.13. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ est donc soit $\{0\}$ (espace de dimension 0), soit une droite linéaire (espace de dimension 1) soit $\mathbb{K}^2$ tout entier.

Exemple 1.6.14. Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ est donc soit $\{0\}$ (espace de dimension 0), soit une droite linéaire (espace de dimension 1) soit un plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ avec e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires (espace de dimension 2) soit $\mathbb{K}^3$ tout entier.

Remarque 1.6.15. Un sous-espace vectoriel F avec une base de cardinal infini d'un espace vectoriel E de dimension infinie n'est pas nécessairement égal à E même si on impose l'existence d'une bijection entre leur base : $E := \mathbb{K}[X] \supsetneq \mathrm{Vect}(\{X^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}) =: F$

Théorème 1.6.16 (Formule de Grassmann)**.** *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie,* F, G *deux sous-espaces de* E*. Alors*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G).$$

Démonstration. On notera p la dimension de $F \cap G$, $n + p$ la dimension de F et $q + p$ la dimension de G. On veut donc montrer que $\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = n + p + q$.

Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une base de $F \cap G$. C'est une famille libre de F et de G. Par le corollaire 1.4.40, on peut la compléter en une base $(v_1, \ldots, v_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+n})$ de F et en une base $(v_1, \ldots, v_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$ de G.

Montrons que $(v_1, \ldots, v_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+n}, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$ est une base de $F + G$:

C'est une famille génératrice de $F + G$ car c'est l'union des familles génératrices de F et de G.

C'est une famille libre : soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_{p+n}, \beta_{p+1}, \ldots, \lambda_{p+q} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p}_{=:x \in F \cap G} + \underbrace{\alpha_{p+1} w_{p+1} + \ldots + \alpha_{p+n} w_{p+n}}_{=:y \in F} + \underbrace{\beta_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \beta_{p+q} x_{p+q}}_{=:z \in G} = 0 \tag{1.6}$$

Alors $z = -x - y \in F$ et donc $z \in F \cap G$ et donc s'écrit donc de deux façons :

$$\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_p v_p = \beta_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \beta_{p+q} x_{p+q}$$

où $\gamma_i \in \mathbb{K}$. Comme la famille $(v_1, \ldots, v_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})$ est une famille libre alors pour tout i, $\beta_{p+i} = 0$. L'égalité (1.6) devient donc

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p + \alpha_{p+1} w_{p+1} + \ldots + \alpha_{p+n} w_{p+n} = 0$$

La famille $(v_1, \ldots, v_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+n})$ est libre donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $\alpha_{p+j} = 0$ pour $j \in \{1, \ldots, q\}$.

Le cardinal de cette base étant $p + q + n$, on en déduit le résultat voulu. □

Corollaire 1.6.17. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
— F *et* G *sont en somme directe.*
— $\dim_{\mathbb{K}}(F+G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$.

Démonstration. F et G sont en somme directe (i.e. $F \cap G = \{0\}$) si, et seulement si, $\dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = 0$ si, et seulement si, $\dim_{\mathbb{K}}(F+G) - \dim_{\mathbb{K}}(F) - \dim_{\mathbb{K}}(G) = 0$. □

Corollaire 1.6.18. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
— $F_1, \dots, F_n$ *sont en somme directe.*
— $\dim_{\mathbb{K}}\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) = \sum_{i=1}^n \dim(F_i)$.

Démonstration. Par le théorème 1.6.16, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\dim\left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) &= \dim(F_n) + \dim\left(\sum_{i=1}^{n-1} F_i\right) - \dim\left(F_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} F_i\right) \\
&= \dim(F_n) + \dim(F_{n-1}) + \dim\left(\sum_{i=1}^{n-2} F_i\right) - \dim\left(F_n \cap \sum_{i=1}^{n-1} F_i\right) - \dim\left(\sum_{i=1}^{n-2} F_i \cap F_{n-1}\right) \\
&= \dots \\
&= \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i) - \sum_{k=1}^{n-1} \dim\left(\sum_{i=1}^{k} F_i \cap F_{k+1}\right)
\end{aligned}$$

Les assertions suivantes sont donc équivalentes :
— $\dim(\sum_{i=1}^n F_i) = \sum_{i=1}^n \dim(F_i)$;
— $\sum_{k=1}^{n-1} \dim(\sum_{i=1}^k F_i \cap F_{k+1}) = 0$;
— $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \dim(\sum_{i=1}^k F_i \cap F_{k+1}) = 0$ (car les dimensions sont positives) ;
— $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \sum_{i=1}^k F_i \cap F_{k+1} = \{0\}$
— $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe (par 1.3.20).

□

Exercices

Exercice 26. Dans $\mathbb{R}^6$, soient $v_1 = (1,1,0,2,3,0)$, $v_2 = (1,1,1,2,3,0)$ et $v_3 = (1,1,0,2,3,1)$. Vérifier que (v_1, v_2, v_3) est libre, puis compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^6$ à l'aide des vecteurs de la base canonique.

Exercice 27.

1. Donner des familles génératrices pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{\leq n}[X]$.
2. La famille $(1, X+X^2, 2+X+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$?
3. La famille $(1, 1+X, 1+X+X^2, X^2+X^3+X^4)$ est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}_{\leq 4}[X]$? Si *oui* + *non* aux questions précédentes, compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}_{\leq 4}[X]$.

Exercice 28. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u = (1,2,3)$ et $v = (3,2,1)$.

1. Vérifier que u et v ne sont pas colinéaires, en déduire la dimension de H.
2. Montrer que H est aussi engendré par $u' = (1,1,1)$ et $v' = (0,1,2)$.
3. Montrer que (u,v) et (u',v') sont deux bases de H.

4. Soit $w \in H$ de coordonnées (x, y) dans la base (u, v) et (x', y') dans (u', v'). Calculer (x, y) en fonction de (x', y'), puis (x', y') en fonction de (x, y).

Exercice 29. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (justifier)

1. Toute famille génératrice d'un espace vectoriel contient une base de cet espace vectoriel.
2. La dimension d'un espace est le nombre de vecteurs de cet espace.
3. Toute famille contenant une famille liée est liée.
4. La base de $\mathbb{K}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$.
5. Si $E = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et si (u_1, u_2, u_3) est libre alors $\dim E = 3$.
6. $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{p-1})$ si, et seulement si, u_p est combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_{p-1}$.
7. Soient u, v, w trois vecteurs d'un espace vectoriel E. On suppose que (u, v), (u, w) et (v, w) sont libres, alors la famille (u, v, w) est libre.
8. Soient $p \geq 2$ un entier et soient p vecteurs $u_1, \dots, u_p$ d'un espace vectoriel E. On suppose qu'aucun de ces vecteurs n'est combinaison linéaire des autres. Alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

Exercice 30. Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $(u_1, \dots, u_4)$ une famille libre de E.
   a) On suppose que $\dim E = n$. Quelle inégalité vérifie n ?
   b) Les familles suivantes sont-elles libres ?
   $(u_1, u_2, 0, u_4)$, $(u_1 + u_2, u_3 + u_4)$, $(u_1, u_2 + u_3 + u_4, u_4)$, $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4, u_4 + u_1)$.
2. Soit $(u_1, \dots, u_4)$ une famille génératrice de E.
   a) On suppose que $\dim E = n$. Quelle inégalité vérifie n ?
   b) Les familles suivantes sont-elles génératrices de E ?
   $(u_1, u_2, 0, u_4)$, $(u_1 + u_2, u_3 + u_4)$, $(u_1, u_2 + u_3 + u_4, u_4)$, $(u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4, u_4 + u_1)$.

Exercice 31.

1. Donner une base et la dimension de l'espace vectoriel solution du système
$$\begin{cases} -3s + t + x - y - z = 0 \\ t + 2x - y + z = 0 \\ 2s + t + 2y = 0 \\ s - t + x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$$
2. Donner une base et la dimension de $V = \text{Vect}((1, 2, 3, 4), (1, 0, 5, 0), (0, 1, -1, 2))$. Écrire V sous forme "d'équations" (explicitement, donner un système linéaire en quatre variables dont V est la solution).

Exercice 32. Soient $F = \{(a + b, a - b, a, 0),\ a, b \in \mathbb{K}\}$ et $G = \{(y, x, y, x - y),\ x, y \in \mathbb{K}\}$ dans $\mathbb{K}^4$.

1. Trouver des bases de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.
2. Donner des équations de F, G, $F \cap G$ et $F + G$ en nombre minimal dans la base canonique de $\mathbb{K}^4$.

Exercice 33. Soient $U, V \subset \mathbb{R}^4$ définis respectivement par

$$\begin{cases} t+x+y-2z=0 \\ -3t-x+y+\ z=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2t+x-2y+z=0 \\ -3t\quad\ +\ y+z=0. \end{cases}$$

1. Montrer que U et V sont des sous-espaces vectoriels.
2. Déterminer une base de $U \cap V$ et puis compléter cette base en une base de U et par la suite, en une base de $U+V$.

Exercice 34. Dans $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$, soient $P = 1+6X-4X^2$, $Q = 3+2X+4X^2$, $R = 1-X+4X^2$ et $S = 1+3X-2X^2$. On pose $F = \text{Vect}(P, Q)$, $G = \text{Vect}(R, S)$.

1. Déterminer une base puis des équations en nombre minimal dans la base canonique de $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ pour F et G.
2. Déterminer une base de $F \cap G$.
3. Que peut-on dire de $F+G$?

Ainsi l'intersection $F \cap G$ est engendré par le polynôme $1+X+X^2$.
3) Par la formule de Grassmann,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2+2-1 = 3.$$

Comme $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ qui est aussi de dimension 3 alors $F+G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 35. Soient V et W deux sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbb{K}^3$ de dimension 2. Montrer que $\dim(V \cap W) = 1$. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 36. (**) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $p \leq n$. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.

Exercice 37. (*) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. Soit $d : \mathcal{S} \to \mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes :
— Si $F, F' \in \mathcal{S}$ sont tels que $F \cap F' = \{0\}$, alors $d(F+F') = d(F) + d(F')$;
— $d(E) = n$.

1. Soient $F, G \in \mathcal{S}$ avec $\dim(F) = \dim(G) = 1$. Démontrer que $d(F) = d(G)$.
2. En déduire que, pour tout $F \in \mathcal{S}$, $d(F) = \dim(F)$.

Chapitre 2

Applications linéaires

2.1 Applications linéaires

2.1.1 Généralités

Définition 2.1.1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $\mathbb{K}$-linéaire (ou morphismes de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) $E \to F$ est une fonction $f : E \to F$ telle que

— $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$,

— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Notation 2.1.2. Dans la suite, quand il n'y a pas d'ambiguïté, on dira linéaire et non $\mathbb{K}$-linéaire.

Notation 2.1.3. On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Proposition 2.1.4. *On a toujours* $f(0_E) = 0_F$.

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors

$$f(0_E) = f(0x) = 0f(x) = 0_F.$$

□

Proposition 2.1.5 (Caractérisation pratique)**.** *La fonction* f *est linéaire si et seulement si* $\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Démonstration. Si f est linéaire alors pour tout $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On obtient la réciproque en prenant $\lambda = \mu = 1$ puis $y = 0$. □

Remarque 2.1.6. Comme dans le cas des sous-espaces vectoriels, on peut se contenter de $\mu = 1$.

Exemple 2.1.7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + 7z$$

Alors cette fonction est une application linéaire : si $u = (x, y, z), v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= f(x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z') = 2(x + \lambda x') + 3(y + \lambda y') + 7(z + \lambda z') \\ &= (2x + 3y + 7z) + \lambda(2x' + 3y'' + 7z') = f(u) + \lambda f(v) \end{aligned}$$

Exemple 2.1.8. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Cette fonction n'est pas linéaire :

$$f(2) = 4 \neq 2 = 2f(1).$$

Avertissement 2.1.9. Comme dans 1.3.9, pour montrer qu'une fonction n'est pas linéaire, il suffit d'exhiber un contre-exemple mais un calcul qui ne conclut pas ne suffit pas.

Exemple 2.1.10. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors la fonction $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ définie par

$$f(x_1, \dots, x_n) \coloneqq \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

est une application linéaire. En effet, si $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= f(x_1 + \lambda y_1, \dots, x_n + \lambda y_n) = \alpha_1(x_1 + \lambda y_1) + \dots + \alpha_n(x_n + \lambda y_n) \\ &= \alpha_1 x_1 + \alpha_1 \lambda y_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_n \lambda x_n \\ &= \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \lambda(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n) \\ &= f(x) + \lambda f(y). \end{aligned}$$

Exemple 2.1.11. Une fonction $f : E \to \mathbb{K}^I$ est linéaire si, et seulement si, pour tout $i \in I$, les applications $f_i : E \to \mathbb{K}$ définie par

$$f_i \coloneqq \pi_i \circ f,$$

où $\pi : (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \mapsto u_i \in \mathbb{K}$, sont linéaires.

Cela vient du fait que pour tout $u \in E$,

$$f(u) = (f_i(u))_{i \in I}$$

et les opérations d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}^I$ se font terme-à-terme, les deux conditions sont équivalentes.

En particulier, si les coordonnées $(f_1, \dots, f_m : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K})$ d'une fonction $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ sont de la forme de l'exemple 2.1.10 alors f est linéaire.

Exemple 2.1.12. Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la dérivée $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}) \mapsto f' \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ (ou $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto \mathbb{K}[X]$) est une application linéaire. Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme

$$\forall x \in I, (f + \lambda g)'(x) = f'(x) + \lambda g'(x)$$

alors $(f + \lambda g') = f' + \lambda g'$.

Exemple 2.1.13. On a montré dans 1.4.37 que $\varphi_{\mathscr{F}} : \mathbb{K}^{(I)} \to E$ est une application linéaire pour toute famille $\mathscr{F}$ de E.

Proposition 2.1.14. *Soient* $f : E \to F$ *une application linéaire. Pour toute famille* $(x_i)_{i \in I}$ *de* E *et toute famille de coefficients* $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$*, on a :*

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration. Comme la famille (λ_i) est à support fini, il suffit de montrer cet énoncé pour le cas d'une famille finie.
On va montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Initialisation si $n = 1$, l'énoncé est vrai par définition d'application linéaire.
Hérédité soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i x_i).$$

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})$ une famille de E et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n\right) &\overset{f \text{ lin}}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) + \lambda_n f(x_n) \\ &\overset{\text{HR}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i). \end{aligned}$$

On conclut par le principe de récurrence.

□

Proposition 2.1.15. *Soient E, F deux espaces vectoriels. Alors $\mathscr{L}(E, F)$ est aussi un espace vectoriel.*

Démonstration. Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de F^E :
— la fonction nulle est linéaire.
— Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $f + \lambda g$ est linéaire :
Soient $x, y \in E$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(x + \mu y) = f(x + \mu y) + \lambda g(x + \mu y) &\overset{f,g \text{ lin}}{=} f(x) + \mu f(y) + \lambda g(x) + \lambda \mu g(y) \\ &= (f + \lambda g)(x) + \mu (f + \lambda g)(x). \end{aligned}$$

□

Définition 2.1.16. Une application linéaire de E dans lui-même est appelée endomorphisme. On note $\mathscr{L}(E)$ ou $\mathrm{End}(E)$ l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, E)$.

Définition 2.1.17. Une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire. On note $E^* \coloneqq \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.

Exemple 2.1.18. Les exemples de 2.1.10 sont des formes linéaires.

Exemple 2.1.19. Soit I un ensemble et F un espace vectoriel alors pour tout $i \in I$, la fonction $\mathrm{ev}_i \colon F^I \to F$ est une forme linéaire : soit $f, g : I \to F$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\mathrm{ev}_i(f + \lambda g) = (f + \lambda g)(i) = f(i) + \lambda g(i) = \mathrm{ev}_i(f) + \lambda \mathrm{ev}_i(g).$$

Proposition 2.1.20. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors la fonction $f^\top \colon F^* \to E^*$ définie par*

$$f^\top(u) \coloneqq u \circ f$$

est linéaire et la fonction $f \in \mathscr{L}(E, F) \mapsto f^\top \in \mathscr{L}(F^*, E^*)$ est linéaire.

Démonstration. 1) Soient $u, v \in F^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} f^\top(u + \lambda v)(x) &= (u + \lambda v) \circ f(x) = (u + \lambda v)(f(x)) \\ &= u(f(x)) + \lambda v(f(x)) = f^\top(u)(x) + \lambda f^\top(v)(x). \end{aligned}$$

et donc $f^\top(u+\lambda v) = f^\top(u) + \lambda f^\top(v)$
2) Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, pour tout $u \in F^*$ et tout $x \in E$

$$\begin{aligned}(f+\lambda g)^\top(u)(x) &= u \circ (f+\lambda g)(x) = u(f(x)+\lambda g(x)) \\ &= u(f(x)) + \lambda u(g(x)) = f^\top(u)(x) + g^\top(u)(x)\end{aligned}$$

et donc $(f+\lambda g)^\top(u) = f^\top(u) + \lambda g^\top(u)$ pour tout $u \in F^*$ et donc

$$(f+\lambda g)^\top = f^\top + \lambda g^\top.$$

□

Remarque 2.1.21. Un système linéaire homogène

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

peut se réécrire sous la forme

$$\begin{cases} \ell_1(x_1, \ldots, x_p) = 0 \\ \vdots \\ \ell_n(x_1, \ldots, x_p) = 0 \end{cases}$$

où $\ell_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ sont des formes linéaires. Si $\ell_j = \sum_{i=1, i\neq j}^n \lambda_i \ell_i$ alors le système linéaire est équivalent au système obtenue en ôtant cette condition. On en déduit donc qu'un système linéaire peut se réécrire (par le théorème de la base incomplète dans $(\mathbb{K}^n)^*$) sous la forme

$$\begin{cases} \ell_{i_1}(x_1, \ldots, x_p) = 0 \\ \vdots \\ \ell_{i_r}(x_1, \ldots, x_p) = 0 \end{cases}$$

et ce système s'échelonne sans obtenir de ligne nulle par indépendance linéaire. On en déduit donc que le système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

a un espace de solution de dimension $p - \dim(\mathrm{Vect}(\ell_1, \ldots, \ell_n))$.

Proposition 2.1.22. *La composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire.*

Démonstration. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrons que $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire. Alors, pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$g \circ f(x+\lambda y) = g(f(x+\lambda y)) \overset{f \text{ lin}}{=} g(f(x)+\lambda f(y)) \overset{g \text{ lin}}{=} g(f(x)) + \lambda g(f(y)) = g \circ f(x) + \lambda g \circ f(y).$$

□

Proposition 2.1.23. *Si une application linéaire* $f : E \to F$ *est bijective, alors* f^{-1} *est linéaire.*

Démonstration. Soient $y = f(x), y' = f(x') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$f^{-1}(y+\lambda y') = f^{-1}(f(x)+\lambda f(x')) \overset{f \text{ lin}}{=} f^{-1}(f(x+\lambda x')) = x+\lambda x' = f^{-1}(y)+\lambda f^{-1}(y').$$

□

Définition 2.1.24. Une application linéaire bijective est appelé isomorphisme (linéaire ou d'espaces vectoriels) et on note $E \simeq F$. On dit que E et F sont isomorphes.

Exemple 2.1.25. On a montré, dans 1.4.37 que $\varphi_{\mathscr{F}}$ est un isomorphisme si, et seulement si, $\mathscr{F}$ est une base. Ainsi, un espace vectoriel est de dimension finie si, et seulement si, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $V \simeq \mathbb{K}^n$.

Exemple 2.1.26. La composition de deux isomorphismes est un isomorphisme (car la composition de deux applications linéaire est linéaire et la composition de deux bijections est bijective).

Exemple 2.1.27. Si $f : E \to F$ est un isomorphisme alors pour tout $u = f(x), v = f(y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$u+v = f(x)+f(y) = f(x+y) = f(f^{-1}(u)+f^{-1}(v)) =$$

et

$$\lambda u = \lambda f(x) = f(\lambda x) = f(\lambda f{-}1(u))$$

et donc les opérations de F coïncident avec celles obtenues par transport de structure (cf. 1.2.11) de celle de E par f.

Réciproquement, si f est une bijection alors c'est un isomorphisme entre E et F où la structure d'espace vectoriel de F est décrite par transport de la structure de E.

Définition 2.1.28. Un isomorphisme de E dans lui-même est un automorphisme. L'ensemble des automorphismes de E forme un groupe pour la composition, noté $\mathrm{GL}(E)$ (ou $\mathrm{Aut}(E)$).

Proposition 2.1.29.

1. *L'image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire* $f : E \to F$ *est un sous-espace vectoriel de* F.
2. *L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel de* E.
3. *si* f *est injective alors l'image d'une famille libre est libre.*
4. *si* f *est surjective alors l'image d'une famille génératrice de* E *est génératrice de* F.
5. *si* f *est bijective alors l'image d'une base de* E *est une base de* F.

Démonstration. Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1) Soit G un sous-espace vectoriel de E. Montrons que $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F :

— $0 \in G$ car c'est un sous-espace vectoriel de E et donc comme $f(0) = 0$ alors $0 \in f(G)$.

— Soient $y = f(x), y' = f(x') \in f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$y+\lambda y' = f(x)+\lambda f(x') \overset{f \text{ lin}}{=} f(x+\lambda x') \in f(G)$$

car G étant un sous-espace vectoriel, $x+\lambda x' \in G$.

2) Soit H un sous-espace vectoriel de F. Montrons que $f^{-1}(H)$ est un sous-espace vectoriel de E.

— Comme $0_H = f(0_G) \in H$ (car H est un sous-espace vectoriel de F) alors $0_G \in f^{-1}(H)$;
— Soient $x, x' \in f^{-1}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$f(x + \lambda x') = \underbrace{f(x)}_{\in H} + \lambda \underbrace{f(x')}_{\in H} \in H$$

car H est un sous-espace vectoriel de F donc $x + \lambda x' \in f^{-1}(H)$.

3) Soit $\mathscr{L} = (e_i)_{i\in I}$ une famille libre. Montrons que $f(\mathscr{L}) := (f(e_i))_{i\in I}$ est une famille libre. Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ tel que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i) = 0.$$

Alors, par linéarité et 2.1.14,

$$0 = f\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right).$$

Comme f est injective et $f(0) = 0$ alors

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0.$$

Comme la famille $(e_i)_{i\in I}$ est libre alors $\lambda_i = 0$ pour tout i. On en déduit donc $f(\mathscr{L})$ est une famille libre.

4)Soit $\mathscr{G} = (e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Montrons que $f(\mathscr{G}) := (f(e_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.
Soit $y \in F$. Alors par surjectivité de f, on peut choisir un $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E alors on peut aussi une famille à support fini $(\lambda_i)_{i\in I}$ tel que

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

et donc, par linérité et 2.1.14,

$$y = f(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i).$$

5) Cela vient des deux cas précédents. □

Remarque 2.1.30. L'espace des solutions d'un système linéaire homogène

$$\begin{cases} v_{11}\lambda_1 + \ldots + v_{1p}\lambda_p = 0 \\ \vdots \\ v_{n1}\lambda_1 + \ldots + v_{np}\lambda_p = 0 \end{cases}$$

est l'image réciproque de $(0, \ldots, 0)$ l'application linéaire de l'application linéaire $f\colon \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ définie par

$$f(x_1, \ldots, x_p) := (v_{11}\lambda_1 + \ldots + v_{1p}\lambda_p, \ldots, v_{n1}\lambda_1 + \ldots + v_{np}\lambda_p)$$

Définition 2.1.31. L'image d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'espace vectoriel $\mathrm{im}(f) := f(E) \subset F$.

Remarque 2.1.32. Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. Alors elle se corestreint en une application linéaire surjective $f\colon E \to \mathrm{im}(f)$ et donc par 2.1.29, si $\mathscr{G} = (e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E alors la famille $(f(e_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de $\mathrm{im}(f)$.

Définition 2.1.33. Le noyau d'une application linéaire f est l'espace vectoriel $\ker f := f^{-1}(0) \subset E$.

Remarque 2.1.34. Par 2.1.30, un système linéaire homogène est le noyau d'une fonction linéaire. La réciproque est vraie en dimension finie (cf. 2.1.36). Le cas de la dimension infinie est (beaucoup) plus difficile (on pourra consulter un cours sur les équations aux dérivées partielles pour se donner une idée).

Proposition 2.1.35. *Une application linéaire* $f : E \to F$ *est injective si, et seulement si,* $\ker f = \{0\}$.

Démonstration. Si f est injective alors comme $f(0) = 0$, $\ker(f) = f^{-1}(0) = \{0\}$. Réciproquement, supposons $\ker(f) = 0$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $f(x - y) = 0$ et donc $x - y = 0$ i.e. $x = y$. □

Théorème 2.1.36. *Soient* E, F *deux espaces vectoriels. Soient* $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ *une base de* E *et* $\mathscr{F} = (v_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* F. *Alors il existe une unique application linéaire* $f \colon E \to F$ *telle que*

$$\forall i \in I, f(e_i) = v_i.$$

Démonstration. Soit $f : x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in E \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i v_i \in F$. Cette fonction est linéaire comme la composée $\varphi_{\mathscr{F}} \circ \varphi_{\mathscr{B}}^{-1}$ et pour tout $i \in I$, $f(e_i) = v_i$.
Cette fonction est unique car si on a deux fonctions f et g telles que

$$\forall i \in I, f(e_i) = v_i = g(e_i).$$

On en déduit donc que

$$\forall i \in I, (f - g)(e_i) = 0.$$

Pour tout $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$, on a, par 2.1.14,

$$(g - f)(x) = (g - f)\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in I} \lambda_i (g - f)(e_i) = \sum_{i\in I} \lambda_i 0 = 0$$

On a donc $g - f = 0$ i.e. $g = f$. □

Autrement dit, une application linéaire $f : E \to F$ est entièrement déterminée par les valeurs prises sur une base de E.

Remarque 2.1.37.

— Si $\mathscr{L} = (e_i)_{i\in I}$ est une famille libre non génératrice de E et $(v_i)_{i\in I}$ est une famille de F, la condition

$$\forall i \in I, f(e_i) = v_i$$

définit toujours au moins une application linéaire mais il n'y a plus unicité (Les applications $\mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto x + y$ vérifient toutes les deux $f(1, 0) = 1$). En effet, par le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathscr{L}$ en une base $\mathscr{B} = (e_j)_{j\in J}$ de E. Pour n'importe quel choix de $(v_j)_{j\in J\setminus I}$, il existe une unique fonction $E \to F$ telle que

$$\forall j \in J, f(e_i) = v_i.$$

— Soient $\mathscr{G} = (e_i)_{i\in I}$ une famille liée génératrice de E et $(v_i)_{i\in I}$ est une famille de F. Par le théorème de la base incomplète, on peut extraire de $\mathscr{G}$ une base $\mathscr{B} = (e_j)_{j\in J}$. Ainsi, il existe une unique fonction $E \to F$ telle que

$$\forall j \in J, f(e_j) = v_j.$$

Il faut ensuite vérifier les autres égalités pour $i \in I \setminus J$: si, pour tout $i \in I$, $f(e_i) = v_i$ alors on a l'existence et l'unicité de la fonction f vérifiant les conditions et sinon, les conditions $f(e_i) = v_i$, $i \in I$ sont contradictoires.

Corollaire 2.1.38. *Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E et F un espace vectoriel. Alors la fonction $\Phi_{\mathscr{B}} \colon \mathscr{F}(I, F) \to \mathscr{L}(E, F)$ définie par*

$$\Phi_{\mathscr{B}}(f) \coloneqq x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in E \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i f(i) \in F$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Cette fonction $\Phi_{\mathscr{B}}$ est bien définie grâce à la partie existence du théorème 2.1.36 (on prend $v_i \coloneqq f(i)$).
Elle est linéaire : pour $f, g : I \to \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}\forall x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \in E, \Phi_{\mathscr{B}}(f + \mu g)(x) &= \sum_{i\in I} \lambda_i (f + \mu g)(i) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(i) + \mu \sum_{i\in I} \lambda_i g(i) \\ &= \Phi_{\mathscr{B}}(f)(x) + \mu\Phi_{\mathscr{B}}(g)(x).\end{aligned}$$

et donc $\Phi_{\mathscr{B}}(f + \mu g) = \Phi_{\mathscr{B}}(f) + \mu\Phi_{\mathscr{B}}(g)$.
Elle est injective grâce à l'unicité du théorème 2.1.36. Montrons maintenant qu'elle est surjective. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $f = \Phi_{\mathscr{B}}((f(e_i))_{i\in I})$ (par la partie unicité du théorème 2.1.36 de l'application linéaire envoyant e_i sur $f(e_i)$ pour tout $i \in I$).

□

Corollaire 2.1.39. *Si E est un espace vectoriel alors $\mathscr{L}(\mathbb{K}, E)$ est isomorphe à E*

Démonstration. Par 2.1.38, $\mathscr{L}(\mathbb{K}, E)$ est isomorphe à $\mathscr{F}(\{1\}, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$ (car (1) est une base de $\mathbb{K}$). □

Corollaire 2.1.40. *Soit F un espace vectoriel et I un ensemble. Alors $\mathscr{L}(\mathbb{K}^{(I)}, F)$ est isomorphe à F^I.*

Démonstration. L'exemple 1.4.33 exhibe une base $(e_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}^{(I)}$. Le corollaire 2.1.38 entraîne que $\mathscr{L}(\mathbb{K}^{(I)}, F)$ est isomorphe à $\mathscr{F}(I, F) = F^I$. □

Exercices

Exercice 38. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier votre réponse. Lorsqu'elles le sont, déterminer leur noyau et image.

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$
2. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (2x + 3y, x)$
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x - y, xy)$
4. (*) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f \mapsto (x \mapsto f(x^2))$
5. $\mathbb{K}_{\leq 2}[X] \to \mathbb{K}_{\leq 2}[X],\ P \mapsto XP' - 2P$
6. $\mathbb{K}_{\leq 3}[X] \to \mathbb{K}_{\leq 3}[X],\ P \mapsto P'P'' - P$

Exercice 39. Soit E un espace vectoriel. Montrer que

1. une application linéaire $f \colon E \to \mathbb{K}$ est soit surjective, soit nulle.
2. une application linéaire $f \colon \mathbb{K} \to E$ est soit injective, soit nulle.

Exercice 40. (*) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que f est une homothétie (c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda\, \mathrm{id}_E$) si et seulement si pour tout $v \in E$, $f(v)$ est colinéaire à v.
2. Montrer que f est une homothétie si, et seulement si, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, $f \circ u = u \circ f$.

   Indication : Pour $x \in E$, on pourra supposer, par l'absurde, que x et $f(x)$ ne sont pas colinéaires et obtenir une contradiction avec une application linéaire u définie sur une base de E bien choisie.

Exercice 41. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour chacun des trois cas ci-dessous, existe-t-il un endomorphisme $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ qui vérifie les conditions imposées ?

1. $g(e_1) = e_2 + e_3$, $g(e_2) = e_1$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.
2. $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1$, $g(e_3 - e_1) = e_2$.
3. $g(e_1 + e_2) = e_3$, $g(e_3) = e_2 - e_3$.

Dans chacun des cas, si l'application g existe, est-elle unique ? Si "oui", calculer $g(x_1, x_2, x_3)$. Si "non", donner plusieurs exemples.

Exercice 42. Soient $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathbb{R}^5$, $(e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $(e'_1, \ldots, e'_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Construire, si cela est possible, des applications linéaires $\phi : E \to F$ telles que :

1. $\mathrm{im}(\phi) = \{0\}$;
2. $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{Vect}(e'_2)$;
3. $\mathrm{im}(\phi) = F$;
4. $\ker(\phi) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$;
5. $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{Vect}(e'_2, e'_3)$;
6. $\ker(\phi) = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3, e_4)$ et $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{Vect}(e'_2, e'_3)$.

Exercice 43. Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Montrer que

1. $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker(g))$;
2. $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$;
3. $\mathrm{im}(g \circ f) \subset \mathrm{im}(g)$;
4. $\mathrm{im}(g \circ f) = g(\mathrm{im}(f))$;
5. $\ker(g \circ f) = \ker(f) \Leftrightarrow \ker(g) \cap \mathrm{im}(f) = \{0\}$;
6. $\mathrm{im}(g \circ f) = \mathrm{im}(g) \Leftrightarrow \ker(g) + \mathrm{im}(f) = F$.

2.1.2 Exemples d'applications linéaires : les projections et les symétries

Définition 2.1.41. Un projecteur est un endomorphisme $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

Exemple 2.1.42. L'application $p\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, 0)$ est un projecteur. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$p \circ p(x, y) = p(x, 0) = (x, 0) = p(x, y).$$

Proposition 2.1.43. *Si* p *est un projecteur, alors* $E = \ker p \oplus \mathrm{im} p$. *Réciproquement si* $E = F \oplus G$ *alors l'application* $\pi\colon E \to E$ *définie par*

$$\forall u = x + y \in F \oplus G = E, \pi(u) = x$$

est un projecteur d'image F *et de noyau* G.

Démonstration. Soit p un projecteur. Alors, pour tout $x \in E$,

$$x = (x - p(x)) + p(x)$$

et $p(x) \in \mathrm{im}(p)$ et $x - p(x) \in \ker(p)$ car

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) \overset{p \text{ proj}}{=} p(x) - p(x) = 0$$

On en déduit donc que $E = \ker(p) + \mathrm{im}(p)$. Montrons que cette somme est directe : soit $y \in \ker(p) \cap \mathrm{im}(p)$ i.e. $p(y) = 0$ et il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$. On en déduit donc que
$$0 = p(y) = p(p(x)) = p(x) = y.$$
Et donc $\ker(p) \cap \mathrm{im}(p) = \{0\}$.

Si $E = F \oplus G$, l'application $\pi : u = x + y \in E \mapsto x \in E$ est bien une application linéaire de noyau G ($\pi(u) = 0$ si, et seulement si, $u = x \in F$) et d'image F ($u(E) \subset F$ par construction et si $x \in F$ alors $u(x) = x$). De plus, c'est un projecteur car
$$\forall u = x + y \in E, \pi \circ \pi(x + y) = \pi(x) = \pi(x + 0) = x = \pi(x + y).$$

□

Remarque 2.1.44. On dit que p est le projecteur sur $\mathrm{im}(p)$ parallèlement à $\ker p$.

Construction 2.1.45. *Supposons $E = \mathbb{K}^p$ et $E = F \oplus G$ où F est décrit par les équations*
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$
et $G = \mathrm{Vect}(e_1 := (e_{11}, \ldots, e_{1,p}), \ldots, e_{n-p} := (e_{n-p,1}, \ldots, e_{n-p,p}))$. Alors, par définition de somme directe, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p})$ telle que
$$\left(x_1 - \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i e_{i1}, \ldots, x_p - \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i e_{ip}\right)$$
est solution du système de F. On doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} a_{11}\left(x_1 - \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i e_{i,1}\right) + \ldots + a_{1p}\left(x_p - \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i e_{i,p}\right) = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\left(x_1 - \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i e_{i,1}\right) + \ldots + a_{np}\left(x_p - \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i e_{i,p}\right) = 0 \end{cases}$$
d'inconnues λ_i, que l'on peut réécrire
$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1j}e_{1j}\right)\lambda_1 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1j}e_{n-p,j}\right)\lambda_{n-p} = \sum_{j=1}^{p} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^{p} a_{nj}e_{1j}\right)\lambda_1 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{p} a_{nj}e_{n-p,j}\right)\lambda_{n-p} = \sum_{j=1}^{p} a_{nj}x_j \end{cases}$$
La famille de solutions $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-p})$ permet de déterminer les deux projection associées à la somme directe $F \oplus G$.

Exemple 2.1.46. Prenons $E = \mathbb{R}^2$, $G = \mathrm{Vect}(1, 1)$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Le vecteur $x - \lambda(1, 1) \in F$ si, et seulement si, $x_1 - \lambda + x_2 - \lambda = 0$ i.e. si, et seulement si, $\lambda = \frac{x_1+x_2}{2}$. On en déduit donc la décomposition de x pour la somme directe $F \oplus G$ suivante :
$$x = \left(\frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{-x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{x_1 + x_2}{2}(1, 1).$$
On en déduit les deux projecteurs associés.

Proposition 2.1.47. *Soient* E *un espace vectoriel,* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. L'application linéaire* p *est le projecteur sur* G *parallèlement à* F *si, et seulement si,* $q \coloneqq \mathrm{Id} - p$ *est le projecteur sur* F *parallèlement à* G.

Démonstration. Supposons que p est le projecteur sur G parallèlement à F. Alors

$$q \circ q = (p - \mathrm{Id}) \circ (p - \mathrm{Id}) = p \circ p - \mathrm{Id} \circ p - p \circ \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} = p - p - p + \mathrm{Id} = \mathrm{Id} - p = q.$$

De plus, si $y \in \mathrm{im}(q)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = q(x) = x - p(x)$ et donc $p(y) = p(x - p(x)) = 0$ i.e. $y \in \ker(p)$. Réciproquement, si $y \in \ker(p)$ alors $p(y) = 0$ et donc $y = q(y) + p(y) = q(y) \in \mathrm{im}(q)$. D'où $\ker(p) = \mathrm{im}(q)$ En remarquant que $p = \mathrm{Id} - q$, on montre que $\mathrm{im}(p) = \ker(q)$ et que si q est un projecteur alors p aussi. □

Remarque 2.1.48. Si $E = F \oplus G$ et p est le projecteur sur F parallèlement à G et q est le projecteur sur G parallèlement à F alors

$$\forall x \in E, x = p(x) + q(x)$$

Pour la fin de cette sous-section, on supposera $2 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ (par exemple, $\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Définition 2.1.49. Une symétrie vectorielle est un endomorphisme s de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}$.

Remarque 2.1.50. Une symétrie vectorielle est un isomorphisme d'inverse lui-même.

Exemple 2.1.51. La symétrie axiale dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $y = x$ i.e. la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (y, x)$ est une symétrie vectorielle.

Exemple 2.1.52. L'endomorphisme $s\colon \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$s(f) \coloneqq x \in \mathbb{R} \mapsto f(-x)$$

est une symétrie vectorielle.

Proposition 2.1.53. *L'application linéaire* p *est un projecteur si et seulement si* $s \coloneqq 2p - \mathrm{Id}$ *est une symétrie.*

Démonstration. Si p est un projecteur alors

$$s \circ s = (2p - \mathrm{Id}) \circ (2p - \mathrm{Id}) = 4p \circ p - \mathrm{Id} \circ 2p - 2p \circ \mathrm{id} + \mathrm{Id} = 4p - 2p - 2p + \mathrm{Id} = \mathrm{Id}.$$

Réciproquement, si $s = 2p - \mathrm{Id}$ est une symétrie alors

$$4p \circ p = (2p) \circ (2p) = (s + \mathrm{Id}) \circ (s + \mathrm{Id}) = s \circ s + 2s + \mathrm{Id} = 2(s + \mathrm{id}) = 4p$$

Comme $4 = 2^2$ est inversible alors $p \circ p = p$. □

Corollaire 2.1.54. *Si* s *est une symétrie vectorielle, alors* $E = \ker(s - \mathrm{Id}) \oplus \ker(s + \mathrm{Id})$. *Réciproquement si* $E = F \oplus G$ *alors l'application* $\sigma : E \to E$ *définie par*

$$\forall u = x + y \in F \oplus G = E, \sigma(u) = x - y$$

est une symétrie vectorielle vérifiant $\ker(\sigma - \mathrm{Id}) = F$ *et* $\ker(\sigma + \mathrm{Id}) = G$

Démonstration. Pour $x \in E$, on a :

$$x = \frac{1}{2}(s(x)+x) + \frac{1}{2}(x - s(x)).$$

Comme $\frac{1}{2}(s(x)+x) \in \ker(s - \mathrm{Id})$:

$$\begin{aligned}(s-\mathrm{Id})\left(\frac{1}{2}(s(x)+x)\right) &= \frac{1}{2}(s-\mathrm{Id})\,(s(x)+x) = \frac{1}{2}\,(s\circ s(x) + s(x) - s(x) - x) \\ &\overset{s \text{ sym}}{=} \frac{1}{2}\,(x - x) = 0\end{aligned}$$

et $\frac{1}{2}(x - s(x)) \in \ker(s+\mathrm{Id})$:

$$\begin{aligned}(s+\mathrm{Id})\left(\frac{1}{2}(x-s(x))\right) &= \frac{1}{2}(s+\mathrm{Id})\,(x-s(x)) = \frac{1}{2}\,(s(x) - s\circ s(x) + s(x) + x - s(x)) \\ &\overset{s \text{ sym}}{=} \frac{1}{2}\,(x - x) = 0\end{aligned}$$

alors $E = \ker(s-\mathrm{Id}) + \ker(s+\mathrm{Id})$. Montrons que cette somme est directe : soit $x \in \ker(s-\mathrm{Id}) \cap \ker(s+\mathrm{Id})$ i.e. $s(x) - x = 0$ et $s(x) + x = 0$. En soustrayant la première égalité à la deuxième, on obtient $2x = 0$ et comme 2 est non-nul alors $x = 0$.
Soit $E = F \oplus G$. La fonction $\sigma : x + y \in E \mapsto x - y$ est linéaire,

$$\forall u = x + y \in E, \sigma\circ\sigma(u) = \sigma(x-y) = x + y = u$$

et comme $\sigma - \mathrm{id} : u = x+y \in E \mapsto \sigma(u) - u = x - y - x - y = -2y$ et $\sigma - \mathrm{id} : u = x + y \in E \mapsto \sigma(u) + u = x - y + x + y = 2x$ alors et que 2 est non-nul alors $\ker(\sigma - \mathrm{Id}) = F$ et $\ker(\sigma + \mathrm{Id}) = G$ ☐

Exemple 2.1.55. On reprend l'exemple 2.1.52 : l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ s'écrit comme une somme directe $\ker(s-\mathrm{id}) \oplus \ker(s+\mathrm{id})$. On peut décrire les espaces $\ker(s-\mathrm{id})$ et $\ker(s+\mathrm{id})$ d'une façon différente :

$$\ker(s-\mathrm{id}) = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid s(f) = f\} = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\} = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ paire}\}$$

et

$$\ker(s+\mathrm{id}) = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid s(f) = -f\} = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\} = \{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ impaire}\}$$

On retrouve à nouveau la décomposition d'une fonction comme une somme d'une fonction paire et une fonction impaire.

2.1.2.1 Exercices

Exercice 44. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $D = \mathrm{Vect}((1,2,3))$ et soit H le plan d'équation $3x + y - 2z = 0$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$.
2. Déterminer les expressions analytiques de p la projection sur H de direction D, et de s la symétrie par rapport à H de direction D.

Exercice 45. On considère l'endomorphisme $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, p(x,y,z) := (4x + y + 7z, 30x + 11y + 70z, -6x - 2y - 13z)$$

1. Monter que p est une projection vectorielle.

2. Pour $v_1 = (1, -3, 0)$ et $v_2 = (2, 1, -1)$, calculer $p(v_1)$ et $p(v_2)$. Calculer aussi $\ker(p)$. Si v_3 est un générateur de $\ker(p)$ dont les coordonnées dans la base canonique sont des entiers premiers entre eux, montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 46. On considère l'endomorphisme $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, s(x_1, x_2, x_3) \coloneqq (-3x_1 + 2x_2 + 2x_3, 4x_1 - x_2 - 2x_3, -8x_1 + 4x_2 + 5x_3).$$

1. Montrer que s est une symétrie vectorielle.
2. Déterminer le noyau et l'image de s.

Exercice 47. (*)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $\mathbb{Q}$-linéaire. Montrer que $\ker(f)$ coïncide avec l'ensemble des périodes de f c'est-à-dire
$$\ker(f) = \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)\}.$$
2. Montrer que la fonction identité $x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$ ne peut pas s'écrire comme une somme de deux fonctions continues périodiques.
3. Montrer que la fonction identité $x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$ s'écrit comme une somme de deux fonctions périodiques.
   Indication : utiliser la question 1 et la caractérisation de projecteur

2.1.3 Applications linéaires en dimension finie

Proposition 2.1.56. *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension.*

Démonstration. S'il existe un isomorphisme $\varphi : E \to F$ alors, par 2.1.29, toute base $\mathscr{B}$ de E est envoyé sur une base de F. On en déduit donc que

$$\dim(E) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \mathrm{Card}(\varphi(\mathscr{B})) = \dim(F).$$

Réciproquement, supposons que E et F ont la même dimension. Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Comme $\varphi_{\mathscr{B}} : \mathbb{K}^n \to E$ et $\varphi_{\mathscr{C}} : \mathbb{K}^n \to F$ sont des isomorphismes (cf. 2.1.25) alors $\varphi_{\mathscr{C}} \circ \varphi_{\mathscr{B}}^{-1} : E \to F$ est aussi un isomorphisme. ☐

Corollaire 2.1.57. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel Alors si F et E sont isomorphes alors $E = F$.*

Démonstration. Par 2.1.56, E et F sont isomorphes si, et seulement si, $\dim(E) = \dim(F)$. Comme on sait que F est un sous-espace vectoriel de E alors par 1.6.11, $E = F$. ☐

Remarque 2.1.58. C'est faux en dimension infinie. C'est le même exemple que pour 1.6.15. Les espaces vectoriels $\mathbb{K}[X]$ et $\mathrm{Vect}(\{X^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathbb{K}[X]$ sont isomorphes avec l'isomorphisme $P \mapsto XP$ mais sont distincts.

Définition 2.1.59. Le rang d'une application linéaire f est $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{im}(f))$.

Théorème 2.1.60 (Théorème du rang). *Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E de dimension finie. Alors :*

$$\dim E = \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker f).$$

Démonstration.

— Supposons que f est injective. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n,)$ une base de E. Alors, comme f est injective et que $\mathscr{B}$ est une famille libre, $f(\mathscr{B})$ est une famille libre. Elle est aussi génératrice de $\mathrm{im}(g)$ (par 2.1.32). C'est donc une base de $\mathrm{im}(g)$. De ce fait,

$$\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = \dim(\mathrm{im}(f)) + 0 = \mathrm{Card}(f(\mathscr{B})) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}) = \dim(E).$$

— Supposons que f n'est pas injective. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\ker(f)$ (p est la dimension de $\ker(f)$). On peut compléter cette famille en une base $\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ de E par 1.4.38. Alors $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{im}(f)$. Comme $f(e_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $f(e_i) = 0$ alors la famille $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de E. Montrons que cette famille est libre :
Soient $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \ldots + \lambda_n f(e_n) = 0$$

Alors

$$f(\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n) = 0$$

On en déduit donc que $\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n \in \ker(f)$ et donc s'écrit (de façon unique) comme une combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_p$:

$$\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre alors $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. On en déduit donc que $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est libre et est donc une base de E. En conclusion,

$$\dim(E) = n = (n - p) + p = \dim(\mathrm{im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)).$$

□

Remarque 2.1.61. On peut avoir un énoncé moins précis si E est de dimension infinie : si f est linéaire alors $\dim(\ker(f))$ ou (inclusif) $\mathrm{rg}(f)$ est infini.

Corollaire 2.1.62. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to F$ est une application linéaire alors $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{im}(f)) \leq \dim(E)$. En particulier, $\mathrm{im}(f)$ est de dimension finie.*

Démonstration. On utilise le théorème du rang (théorème 2.1.60) et on remarque que $\dim(\ker(f)) \geq 0$. □

Corollaire 2.1.63. *Si E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors :*
— f *injective* $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim E$,
— f *surjective* $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim F$.
Si $\dim E = \dim F$, les trois propriétés sont équivalentes : injective, surjective, bijective.

Démonstration. 1) Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors les conditions suivantes sont équivalentes :
— f est injective ;
— $\ker(f) = \{0\}$ (cf. 2.1.35) ;
— $\dim(\ker(f)) = 0$;
— $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ (cf. 2.1.60 : $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\ker(f))$).

2) Si f est surjective alors $\mathrm{im}(f) = F$ et donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(F)$. Réciproquement, si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$ alors $\mathrm{im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension $\dim(F)$ i.e. $\mathrm{im}(f) = F$ (cf. 1.6.11) et donc f est surjective.

Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors les deux points de l'énoncé nous dit que f est injectif si, et seulement si, f est surjectif et donc si, et seulement si, f est bijectif. □

Corollaire 2.1.64. *Pour $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie, les propriétés suivantes sont équivalentes :*
— f *injective,*
— f *surjective,*
— f *bijective.*

Démonstration. On applique le résultat précédent avec $E = F$. □

Remarque 2.1.65. L'application linéaire $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], P \mapsto XP$ est injectif mais pas surjectif.

Proposition 2.1.66. *Si E et F sont de dimensions finies, alors $\dim \mathscr{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$.*

Démonstration. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Soit $(u_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$ la famille d'applications $E \to F$ définies par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}, \forall k \in \{1, \dots, n\}, u_{ij}(e_k) \coloneqq \begin{cases} f_j & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

i.e. pour tout $i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, p\}$,

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k \in E, u_{ij}(x) = \mu_i f_j.$$

Cette famille est libre : soit (λ_{ij}) une famille de coefficients tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} u_{ij} = 0.$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a donc

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} u_{ij}(e_k) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_{kj} \nu_j.$$

Comme la famille (ν_j) est libre alors les λ_{kj} sont nuls pour $1 \le j \le p$ et comme cela est vrai pour tout k, tous les λ_{ij} sont nuls.

Cette famille est génératrice de $\mathscr{L}(E, F)$: soit $g : E \to F$ une application linéaire. Soit $(\lambda_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$ la famille de coefficients définie par

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, g(e_i) \eqqcolon \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} f_j.$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \in E, g(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g(e_i) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} f_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} \mu_i f_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} u_{ij}(x). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.67. Pour démontrer ce résultat, on peut aussi utiliser le corollaire 2.1.38 :

$$\mathscr{L}(E,F) \simeq \mathscr{F}(\{1,\dots,\dim(E)\},F) = F^{\dim(E)}$$

On a donc $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(F^{\dim(E)}) \overset{1.6.7}{=} \dim(E)\dim(F)$.

Définition 2.1.68. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. On appelle la base $(e_i^* : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto x_i \in \mathbb{K})$ de $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ base duale de $\mathscr{B}$. On la note $\mathscr{B}^*$.

Exemple 2.1.69. Si E est un espace vectoriel de dimension infinie et $(e_i)_{i\in I}$ est une base de I alors la famille $(e_i^* : x = \sum_{i\in I} x_i e_i \mapsto x_i)$ est une famille libre mais n'est pas génératrice de f. En effet,

$$\mathrm{Vect}(e_i^*, i\in I) = \{u \in E^* \mid \mathrm{Card}(\{i\in I \mid u(e_i)\neq 0\} < \infty\}$$

Par exemple, l'application $\sum_{x\in I} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i\in I}\lambda_i$ (i.e. qui envoie e_i sur 1 pour tout $i\in I$) est une forme linéaire qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(e_i^*, i\in I)$.
Si $E = \mathbb{K}^{(I)}$ alors $E^* = \mathbb{K}^I \supsetneq \mathbb{K}^{(I)} = \mathrm{Vect}(e_i^*, i\in I)$

Définition 2.1.70. Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On appelle annulateur de F le sous-ensemble

$$F^\circ \coloneqq \{\omega \in E^* \mid \forall x\in F, \omega(x) = 0\}.$$

Proposition 2.1.71. *Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F° est un espace vectoriel. Si E est de dimension finie alors F° est de dimension* $\dim(E)-\dim(F)$.

Démonstration. Comme $F^\circ = \bigcap_{x\in F}\ker(\mathrm{ev}_x)$ alors c'est un espace vectoriel (par 2.1.19 et 1.3.13).

Soit $\mathscr{B}_F = (e_1,\dots,e_p)$ une base de F. Alors

$$F^\circ = \{\omega\in E^* \mid \forall i\in\{1,\dots,p\}, \omega(e_i) = 0\}.$$

En effet, l'inclusion $F^\circ \subset \{\omega\in E^* \mid \forall i\in\{1,\dots,p\}, \omega(e_i)=0\}$ vient du fait $e_i\in F$ pour tout i. Réciproquement, si $\omega \in \{\omega\in E^* \mid \forall i\in\{1,\dots,p\}, \omega(e_i)=0\}$ alors pour tout $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$ alors

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \omega(e_i) = 0$$

On complète la famille $\mathscr{B}_F$ en une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E. Considérons la base duale $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ de E^* et montrons que $(e_{p+1}^*,\dots,e_n^*)$ est une base de F° ce qui permettra de conclure. C'est effectivement une famille de F° car

$$\forall i\in\{p+1,\dots,n\}, \forall j\in\{1,\dots,p\}, e_i^*(e_j) = 0.$$

C'est une famille libre comme sous-famille d'une famille libre. Il ne reste plus qu'à montrer qu'elle est génératrice de F°.

Soit $\omega\in F^\circ$. Soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Comme $x_i \in F$ pour $1\le i\le p$ alors

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\omega(e_i) = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i\omega(e_i) = \sum_{i=1}^n \omega(e_i)e_i^*(x)$$

i.e. ω s'écrit comme une combinaison linéaire des e_i^* pour $p+1\le i\le n$. On en déduit donc que $(e_i^*)_{p+1\le i\le n}$ est une famille génératrice de F° et c'en est donc une base. $\square$

Proposition 2.1.72. *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire. Alors* $\mathrm{im}(f)^\circ = \ker(f^\top)$.

Démonstration. On a les égalités :

$$\begin{aligned}\mathrm{im}(f)^\circ &= \{\omega \mid \forall y \in \mathrm{im}(f), \omega(y) = 0\}\\ &= \{\omega \mid \forall x \in E, \omega(f(x)) = 0\}\\ &= \{\omega \mid \forall x \in E, f^\top\omega(x) = 0\}\\ &= \{\omega \mid f^\top\omega = 0\} = \ker(f^\top)\end{aligned}$$

□

2.1.3.1 Exercices

Exercice 48. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $\begin{cases} x_1 + x_2 + \ x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

1. Donner une base de F.
2. Trouver deux applications linéaires distinctes de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^5$ ayant F comme noyau. Quelles sont leurs matrices associées ?
3. Existe-t-il une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$ ayant F comme noyau ?

Exercice 49.
1. Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ peut-elle être surjective ? Une application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ peut-elle être surjective ? Donner un argument si “non" et un exemple si “oui".
2. Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ peut-elle être injective ? Une application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ peut-elle être injective ? Donner un argument si “non" et un exemple si “oui".
3. Donner un critère de non-injectivité et de non-surjectivité d'une application linéaire $E \to F$ à partir des dimensions de E et F.

Exercice 50. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ des éléments distincts.

1. Montrer que la fonction $\Phi : \mathbb{K}_{\leq n}[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ définie par
$$\forall P \in \mathbb{K}_{\leq n}[X], \Phi(P) \coloneqq (P(x_0), \dots, P(x_n))$$
est un isomorphisme.
2. Si $n = 2$, déterminer l'application linéaire inverse Φ^{-1} et trouver l'ensemble des polynômes P de degré inférieur à 2 tels que
$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ P(x_2) = y_2 \end{cases}$$
pour (y_0, y_1, y_2) fixé.
Indication : Pour déterminer Φ^{-1}*, on pourra donner sa valeur en des éléments d'une base de* $\mathbb{K}^{n+1}$
3. (*) Faire de même pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

Exercice 51. (*) Soit E un espace vectoriel. Rappelons que E^* est l'espace vectoriel des formes linéaires $E \to \mathbb{K}$. Notons E^{**} l'espace vectoriel $(E^*)^*$.

1. Montrer que la fonction $\Phi \colon E \to E^{**}$ définie par
$$\forall x \in E, \Phi(x) \coloneqq (u \in E^* \mapsto u(x) \in \mathbb{K}) \in E^{**}$$
est une application linéaire injective. *Indication : pour l'injectivité, on pourra choisir une base de* E
2. Montrer que si E est de dimension finie alors Φ est un isomorphisme.

2.2 Calcul Matriciel

2.2.1 Généralités

Soient E un espace vectoriel de dimension p et F un espace vectoriel de dimension n. On a vu dans la démonstration de 2.1.66 que la donnée d'une base $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq p}$ de E et d'une base $\mathscr{C}$ de F permet de réduire la donnée d'une application $E \to F$ à la famille des coordonnées (dans $\mathbb{K}$) des $f(e_i)$ dans la base $\mathscr{C}$. Une matrice est une représentation de cette famille.

Définition 2.2.1. Une matrice de taille $n \times p$ sur $\mathbb{K}$ (avec $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) est une famille $(m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ sur $\mathbb{K}$. Si $n = p$ alors on dit que la matrice est carrée et on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$

Notation 2.2.2. On notera aussi la matrice $(m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix}$$

Remarque 2.2.3. On peut remarquer que $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathscr{F}(\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}, \mathbb{K})$.

Proposition 2.2.4. *L'espace $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ muni de l'addition*

$$(m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} + (n_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \coloneqq (m_{ij} + n_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$$

et de la loi de composition externe

$$\lambda \cdot (m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \coloneqq (\lambda m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension np et dont une base est donnée par les E_{ij} dont les coefficients sont tous nuls sauf en (i, j) où il vaut 1.

Démonstration. Cela vient de l'égalité $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathscr{F}(\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}, \mathbb{K})$ et 1.2.8. La base est donnée par 1.4.33. □

On peut maintenant reprendre l'exemple du début de la sous-section

Définition 2.2.5. On appelle matrice associée à l'application linéaire $f \colon E \to F$ et aux bases $\mathscr{B} = (e_j)_{1\leq j\leq p}$ et $\mathscr{C} = (f_i)_{1\leq i\leq n}$ la matrice $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C}) \coloneqq \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} \end{array}$$

où $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i$ pour tout $1 \leq j \leq p$.

Exemple 2.2.6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) \coloneqq (2x + 3y + z, x + z).$$

Soient $\mathscr{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C} = ((1, 1), (0, 1))$ une base de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{cases} f(e_1) = (2, 1) = 2(1, 1) - (0, 1) \\ f(e_2) = (3, 0) = 3(1, 1) - 3(0, 1) \\ f(e_3) = (1, 1) \end{cases}.$$

On en déduit que

$$\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.2.7. *Soient* $f, g : E \to F$ *deux applications linéaires,* $\mathscr{B}$ *une base de* E, $\mathscr{C}$ *une base de* F *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors*

$$\mathrm{Mat}(f + \lambda g, \mathscr{B}, \mathscr{C}) = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C}) + \lambda \mathrm{Mat}(g, \mathscr{B}, \mathscr{C}).$$

Autrement dit, la fonction $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B}, \mathscr{C})\colon f \in \mathscr{L}(E, F) \mapsto \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est une application linéaire.*

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq p}$ et $\mathscr{C} = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$. Notons $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C}) = (m_{ij})$ et $\mathrm{Mat}(g, \mathscr{B}, \mathscr{C}) = (q_{ij})$. On a donc, pour tout $1 \leq j \leq p$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i \text{ et } g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} f_i$$

et donc

$$(f + \lambda g)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (m_{ij} + \lambda q_{ij}) f_i.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(f + \lambda g, \mathscr{B}, \mathscr{C}) &= \begin{pmatrix} m_{11} + \lambda q_{11} & \dots & m_{1p} + \lambda n_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} + \lambda q_{n1} & \dots & m_{np} + \lambda q_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \dots & q_{np} \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C}) + \lambda \mathrm{Mat}(g, \mathscr{B}, \mathscr{C}) \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.8. *L'application linéaire* $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B}, \mathscr{C}) : \mathscr{L}(E, F) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Comme $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ont la même dimension alors il suffit de montrer que cette application est injective (cf. 2.1.63). Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C}) = 0$. Alors, pour tout $1 \leq j \leq p$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} 0 f_i = 0$$

On en déduit donc que $f = 0$. On en déduit l'injectivité et donc la bijectivité de $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B}, \mathscr{C})$. □

Définition 2.2.9. Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq q} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. La matrice produit de A et B est la matrice $(c_{ik})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq q}$ définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall k \in [\![1, q]\!], c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}.$$

Cela définit une fonction $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Remarque 2.2.10. On fera attention au fait que pour pouvoir multiplier deux matrices il faut que le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B.

Remarque 2.2.11. Schématiquement, on peut décrire un produit de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & b_{pj} & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} & & \cdots & & \\ a_{i1} & \ldots & a_{ik} & \ldots & a_{ip} \\ & & \cdots & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk} & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Avertissement 2.2.12. Cette façon schématique d'écrire le produit a toute sa place sur le brouillon mais pas sur une copie d'examen où on écrira en une ligne $AB = (c_{ik})$ (comme dans l'exemple ci-dessous).

Exemple 2.2.13.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 1 + 3\times 4 + 4\times 0 & 2\times 2 + 3\times 6 + 4\times(-1) \\ 1\times 1 + 5\times 4 + 2\times 0 & 1\times 2 + 5\times 6 + 2\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 21 & 30 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.2.14. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors on peut définir une application linéaire $L_A : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ par

$$L_A(X) := AX.$$

Alors $A = \mathrm{Mat}(L_A, (E_{i,1})_{1\le i\le p}, (E_{j,1})_{1\le j\le n})$ où les deux familles (E_{i1}) sont les bases de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définies dans 2.2.4.

Définition 2.2.15. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— On appelle image de A l'image de L_A i.e. $\mathrm{im}(A) := \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = AX\}$.

— On appelle noyau de A le noyau de L_A i.e. $\ker(A) := \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$.

Proposition 2.2.16. *Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $\mathscr{D}$ une base de G. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors*

$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathscr{B}, \mathscr{D}) = \mathrm{Mat}(g, \mathscr{C}, \mathscr{D})\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})$$

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_j)_{1\le j\le p}$, $\mathscr{C} = (f_i)_{1\le i\le n}$ et $\mathscr{D} = (g_k)_{1\le k\le r}$. Notons $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C}) = (m_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ et $\mathrm{Mat}(g, \mathscr{B}, \mathscr{C}) = (q_{ki})_{1\le k\le r, 1\le i\le n}$. On a donc, pour tout $1 \le i \le p$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i$$

et tout $1 \le j \le n$,

$$g(f_i) = \sum_{k=1}^{r} q_{ki} g_k.$$

Ainsi, pour tout $1 \le j \le p$, on a :

$$\begin{aligned} g(f(e_j)) = g\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i\right) &= \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, g(f_i) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \sum_{k=1}^{r} q_{ki} g_k \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij} q_{ki}\right) g_k \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\mathrm{Mat}(g\circ f,\mathscr{B},\mathscr{D})=\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ki}m_{ij}\right)_{k,j}=(q_{ki})_{k,i}(m_{ij})_{i,j}=\mathrm{Mat}(g,\mathscr{C},\mathscr{D})\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{C})$$

□

On peut aussi décrire le produit avec le symbole de Kronecker.

Définition 2.2.17. Soient I un ensemble non-vide et $i,j\in I$. Le symbole de Kronecker δ_{ij} est défini comme suit :

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Exemple 2.2.18. Les éléments de la base (E_{ij}) de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peuvent être décrits avec ce symbole de Kronecker :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\forall j\in[\![1,p]\!], E_{ij}=(\delta_{ik}\delta_{jl})_{1\leq k\leq n,1\leq l\leq p}.$$

Proposition 2.2.19. *Le produit matriciel est l'unique fonction $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\times\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})\to\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ telle que :*

1. $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\forall(k,l)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!], E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$;
2. $\forall A,B\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\forall C\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A+\lambda B)C=AC+\lambda BC$;
3. $\forall A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\forall B,C\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $A(B+\lambda C)=AB+\lambda AC$;

Démonstration. 1) Soient $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],(k,l)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]$. Alors

$$E_{ij}E_{kl}=\left(\sum_{s=1}^{p}\delta_{ir}\delta_{js}\delta_{ks}\delta_{lt}\right)_{r,t}=\left(\delta_{ir}\delta_{lt}\sum_{s=1}^{p}\delta_{js}\delta_{ks}\right)_{r,t}.$$

Si $j\neq k$ alors $\sum_{s=1}^{p}\delta_{js}\delta_{ks}=\delta_{jj}\delta_{kj}+\delta_{jk}\delta_{kk}=2\delta_{jk}=0$ et si $j=k$ alors $\sum_{s=1}^{p}\delta_{js}\delta_{js}=\sum_{s=1}^{p}\delta_{js}=\delta_{jj}=1$. On en déduit donc que $\sum_{s=1}^{p}\delta_{js}\delta_{ks}=\delta_{jk}$ et donc

$$E_{ij}E_{kl}=\left(\delta_{ir}\delta_{lt}\delta_{jk}\right)_{r,t}=\delta_{jk}E_{il}.$$

2) Si $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C=(c_{jk})\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ alors

$$\begin{aligned}(A+\lambda B)C=(a_{ij}+\lambda b_{ij})_{ij}(c_{jk})_{jk}&=\left(\sum_{j}(a_{ij}+\lambda b_{ij})c_{jk}\right)_{ik}\\&=\left(\sum_{j}a_{ij}c_{jk}+\lambda\sum_{j}b_{ij}c_{jk}\right)_{ik}\\&=\left(\sum_{j}a_{ij}c_{jk}\right)_{ik}+\lambda\left(\sum_{j}b_{ij}c_{jk}\right)\\&=AC+\lambda BC.\end{aligned}$$

3) Si $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{jk}), C = (c_{jk}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\begin{aligned}
A(B+\lambda C) = (a_{ij})_{ij}(b_{jk}+\lambda c_{jk})_{jk} &= \left(\sum_j a_{ij}(b_{jk}+c_{jk})\right)_{ik} \\
&= \left(\sum_j a_{ij}b_{jk} + \sum_j a_{ij}c_{jk}\right)_{ik} \\
&= \left(\sum_j a_{ij}b_{jk}\right)_{ik} + \left(\sum_j a_{ij}c_{jk}\right)_{ik} \\
&= AB + \lambda AC.
\end{aligned}$$

Soit $F\colon \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ une fonction qui vérifie les trois conditions de la proposition : soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{kl}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{aligned}
F(A,B) = F\left(\sum_{ij} a_{ij}E_{ij}, \sum_{kl} b_{kl}E_{kl}\right) &\overset{2)\,3)}{=} \sum_{ij}\sum_{kl} a_{ij}b_{kl}F(E_{ij},E_{kl}) \\
&\overset{1)}{=} \sum_{ij}\sum_{kl} a_{ij}b_{kl}\delta_{jk}E_{il} = \sum_{ij}\sum_{l} a_{ij}b_{jl}E_{il} \\
&= \sum_{il}\left(\sum_j a_{ij}b_{jl}\right)E_{il} = AB.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.20. On dit que le produit est une application bilinéaire.

Remarque 2.2.21. L'écriture λAB n'est donc pas ambiguë et désigne indifféremment $(\lambda A)B$ ou $\lambda(AB)$.

Proposition 2.2.22. *Soient* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *et* $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. *Alors*

$$(AB)C = A(BC).$$

On écrira ce produit $ABC \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{jk}) \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C = (c_{kl}) \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{aligned}
(AB)C = \left(\sum_j a_{ij}b_{jk}\right)_{ik}(c_{kl})_{kl} &= \left(\sum_k \left(\sum_j a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}\right)_{il} \\
&= \left(\sum_k\sum_j a_{ij}b_{jk}c_{kl}\right)_{il} = \left(\sum_j a_{ij}\sum_k b_{jk}c_{kl}\right)_{il} \\
&= (a_{ij})_{ij}\left(\sum_k b_{jk}c_{kl}\right)_{jl} = A(BC).
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.23. — En général, le produit n'est pas commutatif i.e. pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on n'a pas, en général, $AB = BA$.

— On peut avoir $AB = 0$ sans avoir $A = 0$ ou $B = 0$ (le produit a des diviseurs-de-zéros) ;
— On peut avoir $AB = AC$ sans avoir $B = C$.

Exemple 2.2.24. Soient $A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $AB \neq BA$, $AB = 0$ et $A \neq 0$ et $B \neq 0$, et $AB = AC$ et $B \neq C$.

Notation 2.2.25. Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on notera $\mathrm{Mat}(x, \mathscr{B}) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne de ses coordonnées dans $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Mat}(x, \mathscr{B}) \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.2.26. La matrice $\mathrm{Mat}(x, \mathscr{B})$ est aussi la matrice $\mathrm{Mat}(\lambda \in \mathbb{K} \mapsto \lambda x \in E, (1_{\mathbb{K}}), \mathscr{B})$

Proposition 2.2.27. *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors la fonction $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B}) : E \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Notons $\mathscr{E}$ la base (E_{i1}) définie dans 2.2.4. On a deux isomorphismes $\varphi_{\mathscr{B}} : \mathbb{K}^n \to E$ et $\varphi_{\mathscr{E}} : \mathbb{K}^n \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ par 2.1.25. On en déduit donc $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B}) = \varphi_{\mathscr{E}} \circ \varphi_{\mathscr{B}}^{-1}$ est un isomorphisme. En effet,

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \varphi_{\mathscr{E}}^{-1} \circ \varphi_{\mathscr{B}}(x) = \varphi_{\mathscr{E}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i E_{i1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(x, \mathscr{B}).$$

□

Proposition 2.2.28. *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension respective p et n, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors, pour tout $x \in E$,*

$$\mathrm{Mat}(f(x), \mathscr{C}) = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})\mathrm{Mat}(x, \mathscr{B}).$$

Démonstration. Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ et $(m_{ij})_{1 \leq i \leq p}$ la matrice $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})$. Alors, pour tout $1 \leq j \leq p$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} f_i$$

Soit $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j \in E$. Alors

$$f(x) = \sum_{j=1}^p x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^p x_j \sum_{i=1}^n m_{ij} f_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p x_j m_{ij} \right) f_i.$$

On a donc :

$$\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})\mathrm{Mat}(x, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p m_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p m_{nj} x_j \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(f(x), \mathscr{C}).$$

□

Remarque 2.2.29. Grâce à la remarque 2.2.26, cette proposition est un corollaire immédiat de 2.2.16.

On peut réécrire cette proposition en termes de fonctions :

Corollaire 2.2.30. *Soient* E, F *deux espaces vectoriels de dimension respective* p *et* n, $\mathscr{B}$ *une base de* E *et* $\mathscr{C}$ *une base de* F. *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire. Alors*

$$f = \mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{C})^{-1} \circ L_{\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{C})} \circ \mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B}).$$

Démonstration. La proposition 2.2.28 nous donne l'égalité :

$$\forall x \in E, \mathrm{Mat}(f(x), \mathscr{C}) = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})\mathrm{Mat}(x, \mathscr{B}).$$

et donc

$$\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{C}) \circ f = L_{\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{C})} \circ \mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B})$$

Comme $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{C})$ est une bijection (cf. 2.2.27) alors en composant à gauche par $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{C})$, on obtient le résultat. ☐

Définition 2.2.31. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La transposée de A est la matrice $A^\top = (\tilde{a}_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n}$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ où

$$\forall (j, i) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!], \tilde{a}_{ji} \coloneqq a_{ij}.$$

Exemple 2.2.32. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$

Proposition 2.2.33.

1. *Pour tout* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(A^\top)^\top = A$.
2. *Pour tout* $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, $(A + \lambda B)^\top = A^\top + \lambda B^\top$. *Autrement dit, la fonction* $A \mapsto A^\top$ *est linéaire.*
3. *Pour tout* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et tout* $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
4. *Pour toute application linéaire* $f : E \to F$ *avec* E *et* F *de dimension finie,* $\mathscr{B}$ *une base de* E *et* $\mathscr{C}$ *une base de* F,

$$\mathrm{Mat}(f^\top, \mathscr{C}^*, \mathscr{B}^*) = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})^\top.$$

où $\mathscr{B}^*$ *(resp.* $\mathscr{C}^*$*) est la base de* E^* *(resp.* F^**) défini dans 2.1.68*

Démonstration. 1) Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. On note $A^\top = (\tilde{a}_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n}$. Alors

$$(A^\top)^\top = (\tilde{a}_{ji})^\top_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} = A$$

2) Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. On note $A^\top = (\tilde{a}_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n}$ et $B^\top = (\tilde{b}_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n}$ Alors

$$\begin{aligned}(A + \lambda B)^\top &= (a_{ij} + \lambda b_{ij})^\top_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} = (\tilde{a}_{ji} + \lambda \tilde{b}_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n} \\ &= (\tilde{a}_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n} + \lambda (\tilde{b}_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n} = A^\top + \lambda B^\top\end{aligned}$$

3) Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{jk})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq q}$. On note $A^\top = (\tilde{a}_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n}$ et $B^\top = (\tilde{b}_{kj})_{1 \leq k \leq q, 1 \leq j \leq n}$

Comme $AB = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq k\leq q}$ alors le coefficient en (k, i) de $(AB)^\top$ est

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{p} \widetilde{a}_{ji} \widetilde{b}_{kj}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}(AB)^\top = \left(\sum_{j=1}^{p} \widetilde{a}_{ji} \widetilde{b}_{kj}\right)_{1\leq k\leq q, 1\leq i\leq n} &= \left(\sum_{j=1}^{p} \widetilde{b}_{kj} \widetilde{a}_{ji}\right)_{1\leq k\leq q, 1\leq i\leq n} \\ = (\widetilde{b}_{kj})_{1\leq k\leq q, 1\leq j\leq p} (\widetilde{a}_{ji})_{1\leq j\leq p, 1\leq i\leq n} &= B^\top A^\top.\end{aligned}$$

4) Soient $f : E \to F$, $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq p}$ et $\mathscr{C} = (f_j)_{1\leq j\leq n}$. Notons $(m_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ les coefficients de $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})$. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} f_j.$$

Alors, pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$ et tout $1 \leq j \leq n$

$$f^\top(f_j^*)(x) = f_j^*(f(x)) = f_j^*\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i)\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_j^* f(e_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i m_{ij} = \sum_{i=1}^{p} m_{ij} e_i^*(x)$$

et donc $f^\top(f_j^*) = \sum_{i=1}^{p} m_{ij} e_i^*$. On en déduit que le coefficient en (j, i) de la matrice $\mathrm{Mat}(f^\top, \mathscr{C}^*, \mathscr{B}^*)$ est m_{ij}. On en déduit donc le résultat.

□

Remarque 2.2.34. Les deux premiers points montrent que l'application linéaire $A \mapsto A^\top$ est une symétrie vectorielle.

Exercices

Exercice 52. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

1. Peut-on former les produits ABC, CBA, BAC ? Si oui les calculer de deux manières pour vérifier sur ce cas particulier l'associativité du produit de matrices.
2. Pour chacune de ces matrices, décrire l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}$ dans $\mathscr{M}_{n,1}$ (avec n et p convenables) en précisant leurs noyaux.

Exercice 53. Soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K}) \mid a + d = 0 \right\}$. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ et en donner une base.

Exercice 54. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer, s'il y en a, toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

Exercice 55 (Carrés magiques)**.** (*) On appelle carré magique de taille 3×3 et de somme S, une matrice $M \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$$

telle que la somme des réels de chaque ligne, la somme des réels de chaque colonne, la somme des réels de chaque diagonale, soient égales à S. Le but de cet exercice est de trouver un procédé de fabrication de tous les carrés magiques.

1. Montrer que tout carré magique de somme S a pour coefficient central $a_5 = \frac{S}{3}$.
2. Trouver un carré magique de somme 3.
3. Montrer que l'ensemble des carrés magiques est un sous-espace vectoriel noté E de $\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.
4. Montrer que tout carré magique de somme 0 est défini par la donnée de ses coefficients a_1 et a_3. Montrer que les carrés magiques de somme 0 forment un sous-espace vectoriel E_0 de E. Trouver un base de E_0.
5. Donner une base de E.
6. Utiliser ce qui précède pour dénombrer tous les carrés magiques de somme 18 dont les coefficients sont des entiers positifs.

2.2.2 Matrices carrées

Dans cette sous-section, nous allons nous restreindre au cas des matrices carrées dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On a un produit $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Notation 2.2.35. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E et f un endomorphisme de E. On note $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B})$ la matrice $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{B})$.

Proposition 2.2.36. *La matrice* $I_n := (\delta_{ij})_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ *est l'élément neutre pour le produit matriciel i.e.*

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AI_n = I_n A = A.$$

On l'appelle matrice identité d'ordre n.

Démonstration. Soient $A := (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$AI_n = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta_{jk} \right)_{1 \le i,j \le n} = (a_{ik})_{1 \le i,k \le n} = A$$

et

$$I_n A = \left(\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} a_{jk} \right)_{1 \le i,j \le n} = (a_{ik})_{1 \le i,k \le n} = A$$

□

Remarque 2.2.37. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} A.$$

Remarque 2.2.38. Pour toute base $\mathscr{B}$ d'un espace vectoriel de dimension finie E, $I_n = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathscr{B})$.

Si A est une matrice carré alors on peut former la puissance nème $A^n := \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ fois}}$.

Contrairement au cas sur $\mathbb{K}$, la formule de Newton n'est pas vrai car le produit n'est pas commutatif (voir 2.2.23) : si $AB \neq BA$ alors

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

On va montrer que cela fonctionne quand A et B commutent (i.e. $AB = BA$).

Lemme 2.2.39. *Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B commutent alors, pour tout $q \in \mathbb{N}$,*

$$AB^q = B^q A.$$

Démonstration. Montrons ce lemme par récurrence sur q.
Initialisation : Si $q = 0$ alors $B^0 = I_n$ et donc $AI_n = A = I_n A$.
Hérédité : soit $q \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang q. Alors

$$AB^{q+1} = ABB^q \overset{\text{hyp}}{=} BAB^q \overset{\text{HR}}{=} BB^q A = B^{q+1} A.$$

La propriété est alors vraie au rang q.
Par le principe de récurrence, le lemme est montré. □

Proposition 2.2.40. *Soient $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ tels que $AB = BA$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence sur n :

— pour $n = 0$, $(A+B)^0 = I_n = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} A^k B^{0-k}$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B)(A+B)^n \overset{\text{HR}}{=} (A+B) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k+1} B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} BA^k B^{n-k} \\
&\overset{2.2.39}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k+1} B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k+1} \\
&\overset{\text{chgt de var}}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} A^k B^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k+1} \\
&= A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) A^k B^{n-k+1} + b^{n+1} \\
&= A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} A^k B^{n-k+1} + B^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} A^k B^{n+1-k}
\end{aligned}$$

□

Définition 2.2.41. Une matrice A est dite inversible à gauche s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, inversible à droite s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ et inversible si elle est inversible à gauche et à droite.

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Lemme 2.2.42. *Si* A *est inversible alors il existe une unique matrice* $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que* $AB = BA = I_n$.

Démonstration. Soient B, C deux matrices telles que $AB = I_n = CA$. Alors, par associativité,

$$B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_n = C.$$

Soit D une matrice telle que $AD = I_n$. Alors

$$D = (CA)D = C(AD) = C = B.$$

Soit E une matrice telle que $EA = I_n$. Alors

$$E = E(AB) = (EA)B = B.$$

□

Définition 2.2.43. Si une matrice A est inversible alors on appelle inverse de A l'unique matrice B telle que $AB = BA = I_n$. On la note A^{-1}.

Remarque 2.2.44. Si A et B sont inversibles alors leur somme ne l'est pas nécessairement : si $B = -A$ alors $A + B = 0$ n'est pas inversible même si A l'était.

Proposition 2.2.45. *Soit* A *une matrice de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $f : E \to F$ *tel qu'il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* E *et une base* $\mathscr{C}$ *de* F *telles que* $A = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. f *est injectif ;*
2. f *est surjectif ;*
3. f *est un isomorphisme ;*
4. A *est inversible ;*
5. A *est inversible à gauche ;*
6. A *est inversible à droite.*

Démonstration. Par 2.1.63), les trois premiers points sont équivalents.
On va montrer les implications suivantes 3) ⇒ 4), 5) ⇒ 1) et 6) ⇒ 2).

Si f est un isomorphisme alors

$$A\mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathscr{C}, \mathscr{B}) = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})\mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathscr{C}, \mathscr{B}) = \mathrm{Id}_E, \mathscr{B}, \mathscr{B} = I_n$$

et

$$\mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathscr{C}, \mathscr{B})A = \mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathscr{C}, \mathscr{B})\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C}) = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_F, \mathscr{C}, \mathscr{C}) = I_n$$

On en déduit que A est inversible d'inverse $\mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathscr{C}, \mathscr{B})$.

Supposons que A est inversible à gauche i.e. il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ tel que $f(x) = 0$. Par 2.2.28, on a l'égalité

$$0 = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})\mathrm{Mat}(x, \mathscr{B}) = A\mathrm{Mat}(x, \mathscr{B})$$

En multipliant à gauche par un inverse à gauche B, on obtient

$$\mathrm{Mat}(x, \mathscr{B}) = BA\mathrm{Mat}(x, \mathscr{B}) = B0 = 0$$

et donc $x = 0$. On en déduit donc que f est injective.

Supposons que A est inversible à droite i.e. il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$. Soit $y \in F$. Alors

$$\mathrm{Mat}(y, \mathscr{C}) = AB\mathrm{Mat}(y, \mathscr{C}) = A(B\mathrm{Mat}(y, \mathscr{C}))$$

Soit $x \in E$ l'élément de coordonnées $B\mathrm{Mat}(y, \mathscr{C})$. Alors $y = f(x)$. □

Corollaire 2.2.46. *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ a au plus un inverse à gauche (resp. à droite) i.e. une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$ (resp. $AB = I_n$).*

Démonstration. Grâce à la proposition précédente, il suffit de montrer que n'importe quel inverse à gauche (resp. à droite) est A^{-1}.

Soit B un inverse à gauche de A. Alors $BA = I_n$ et donc en multipliant par A^{-1} à droite, on obtient $B = A^{-1}$.

Soit B un inverse à droite de A. Alors $AB = I_n$ et donc en multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient $B = A^{-1}$. □

Proposition 2.2.47.

1. *Pout tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$, A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *Pour tout $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;*
3. *Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$;*
4. *Si $\mathscr{B}$ est une base d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors la fonction $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B})\colon f \in GL(E) \mapsto \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}) \in GL_n(\mathbb{K})$ est une bijection et*
$$\forall f \in GL(E), \mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathscr{B}) = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B})^{-1}.$$

Démonstration. 1) Soient $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Comme $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ alors A^{-1} est inversible d'inverse A.
2) Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors
$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$
et
$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$
On en déduit que AB est inversible et d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.

3) Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors, par 2.2.33,
$$(A^{-1})^\top A^\top = (AA^{-1})^\top = I_n^\top = I_n$$
et
$$A^\top (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = I_n^\top = I_n.$$
On en déduit que $A^\top$ est inversible et d'inverse $(A^{-1})^\top$.

4) On a déjà montré que si f est un automorphisme alors $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B})$ est inversible et d'inverse $\mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathscr{B})$. Comme $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B}) : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est bijective (cf. 2.2.8) alors sa restriction-corestriction $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B})\colon f \in GL(E) \mapsto \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}) \in GL_n(\mathbb{K})$ est injective. De plus, pour montrer la surjectivité, il suffit de montrer que pour tout $M \in GL_n(\mathbb{K})$, $\varphi^{-1}(M)$ est un isomorphisme. Ce qui découle du 2.2.45. □

Construction 2.2.48. *Pour calculer l'inverse d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$, on procède comme suit :*

on remarque tout d'abord que pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $AX = Y$ si, et seulement si, $X = A^{-1}Y$. On en déduit que pour trouver A^{-1}, on peut résoudre le système $AX = Y$ d'inconnues X pour un Y quelconque afin d'obtenir un système d'égalités de la forme
$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

Alors la matrice A^{-1} *sera* $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Exemple 2.2.49. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. Soit $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On va résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 \\ 5x_1 + 4x_2 = y_2 \end{cases}$$

d'inconnues x_1, x_2. Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. On a les systèmes linéaires équivalents suivants :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 \ (L_1) \\ 5x_1 + 4x_2 = y_2 \ (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 (L_1) \\ \frac{3}{2}x_2 = -\frac{5}{2}y_1 + y_2 (L_2 - \frac{5}{2}L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{x_2}{2} = \frac{y_1}{2} (\frac{1}{2}L_1) \\ x_2 = -\frac{5}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 (\frac{2}{3}L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{y_1}{2} - \frac{x_2}{2} = \frac{y_1}{2} + \frac{5}{6}y_1 - \frac{1}{3}y_2 = \frac{4}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 \\ x_2 = -\frac{5}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 \end{cases}$$

On en déduit que

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Définition 2.2.50. On appelle trace d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ le nombre

$$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in \mathbb{K}.$$

Exemple 2.2.51. $\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\right) = 2 + 4 = 6.$

Proposition 2.2.52.

1. *La fonction* $\mathrm{tr} \colon \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire.*
2. *Pour tout* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$.
3. *Pour tout* $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Démonstration. 1) Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\mathrm{tr}(A + \lambda B) = \mathrm{tr}((a_{ij} + \lambda b_{ij})) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{tr}(A) + \lambda \mathrm{tr}(B)$$

2) Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}((a_{ij})_{1 \le j,i \le n}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \mathrm{tr}(A).$$

3) Soient $A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{jk})_{jk} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right)_{ik}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

et

$$\mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij}\right)_{ki}\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ji}.$$

On en déduit donc que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. $\square$

Remarque 2.2.53. Le dernier point implique que si on a trois matrices $A, B, C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$. Cependant les autres permutations ne fonctionnent pas : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors

$$\mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 38 & 38 \end{pmatrix} = 54,$$
$$\mathrm{tr}(CBA) = \mathrm{tr}(ACB) = \mathrm{tr}(BAC) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} 38 & 38 \\ 31 & 31 \end{pmatrix} = 69.$$

2.2.2.1 Exercices

Exercice 56. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 10 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } C_a = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Pour chacune de ces matrices calculer la matrice inverse lorsque celle-ci existe.
2. Résoudre le système $C_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer l'inverse de la matrice BC_a lorsque celle-ci existe.

Exercice 57. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 58. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que l'on ne peut pas trouver de matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$ telles que

$$AB - BA = I_n$$

Exercice 59. (*) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $E \coloneqq \mathbb{R}_{\leq n}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Soit f la fonction $E \to E$ définie par :

$$\forall P \in E, f(P) \coloneqq P(X + \alpha)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. En notant $\mathscr{B}$ la base canonique de E, déterminer $A \coloneqq \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{B})$;
3. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
4. Montrer que pour tout $(p, q) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $p < q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q} (-1)^{q-k} \binom{k}{p} \binom{q}{k} = 0.$$

Rappelons que $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ *pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 60 (Lemme de Hadamard)**.** (*) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que la matrice A est inversible.

2.2.3 Changement de bases

Définition 2.2.54. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B},\mathscr{C}$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ la matrice $\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{C}) \coloneqq \mathrm{Mat}(\mathrm{Id},\mathscr{B},\mathscr{C})$. Autrement dit, c'est la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{C}$.

Exemple 2.2.55. Soient $\mathscr{B} = ((2,5),(1,4))$ et $\mathscr{C} = ((1,0),(0,1))$. Alors

$$\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Comme $(1,0) = \frac{1}{3}(4(2,5) - 5(1,4))$ et $(0,1) = \frac{1}{3}(-(2,5) + 2(1,4))$ alors

$$\mathrm{Pass}(\mathscr{C},\mathscr{B}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

On remarque ici que $\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{C}) = \mathrm{Pass}(\mathscr{C},\mathscr{B})^{-1}$.

Proposition 2.2.56. *Soient $\mathscr{B},\mathscr{C},\mathscr{D}$ trois bases d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors*

1. $\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{D}) = \mathrm{Pass}(\mathscr{C},\mathscr{D})\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{C})$;
2. $\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{B}) = I_n$;
3. $\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{C}) \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{C})^{-1} = \mathrm{Pass}(\mathscr{C},\mathscr{B})$.

Démonstration. 1) On a :

$$\mathrm{Pass}(\mathscr{C},\mathscr{D})\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{C}) = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id},\mathscr{C},\mathscr{D})\mathrm{Mat}(\mathrm{Id},\mathscr{B},\mathscr{C}) \overset{2.2.16}{=} \mathrm{Mat}(\mathrm{Id},\mathscr{B},\mathscr{D}) = \mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{D})$$

2) $\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{B}) = I_n = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id},\mathscr{B},\mathscr{B}) = I_n$.

3) Comme $\mathrm{Pass}(\mathscr{C},\mathscr{B})\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{C}) = \mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{B}) = I_n$ et $\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{C})\mathrm{Pass}(\mathscr{C},\mathscr{B}) = \mathrm{Pass}(\mathscr{C},\mathscr{C}) = I_n$ alors $\mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{C})$ est inversible d'inverse $\mathrm{Pass}(\mathscr{C},\mathscr{B})$. □

Proposition 2.2.57. *Soient $\mathscr{B},\mathscr{C}$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors, pour tout $x \in E$,*

$$\mathrm{Mat}(x,\mathscr{C}) = \mathrm{Pass}(\mathscr{B},\mathscr{C})\mathrm{Mat}(x,\mathscr{B})$$

Démonstration. Par 2.2.28,

$$\mathrm{Mat}(x,\mathscr{C}) = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}(x),\mathscr{C}) = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id},\mathscr{B},\mathscr{C})\mathrm{Mat}(x,\mathscr{B}).$$

□

Proposition 2.2.58. *Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathscr{C},\mathscr{C}'$ deux bases de F et $f : E \to F$. Alors*

$$\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B}',\mathscr{C}') = \mathrm{Pass}(\mathscr{C},\mathscr{C}')\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{C})\mathrm{Pass}(\mathscr{B}',\mathscr{B}).$$

Démonstration. Comme $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ alors par 2.2.16

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B}',\mathscr{C}') &= \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_F,\mathscr{C},\mathscr{C}')\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{C})\mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E,\mathscr{B}',\mathscr{B}) \\ &= \mathrm{Pass}(\mathscr{C},\mathscr{C}')\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{C})\mathrm{Pass}(\mathscr{B}',\mathscr{B}).\end{aligned}$$

□

En un diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd} E_{\mathscr{B}} \arrow[r, "\mathrm{Mat}(f{,}\mathscr{B}{,}\mathscr{C})", "f"'] & F_{\mathscr{C}} \arrow[d, "\mathrm{Id}"', "\mathrm{Pass}(\mathscr{C}{,}\mathscr{C}')"] \\ E_{\mathscr{B}'} \arrow[u, "\mathrm{Pass}(\mathscr{B}{,}\mathscr{B}')", "\mathrm{Id}"'] \arrow[r, "f", "\mathrm{Mat}(f{,}\mathscr{B}'{,}\mathscr{C}')"'] & F_{\mathscr{C}'} \end{tikzcd}$$

Corollaire 2.2.59. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie,* $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ *deux bases de* E *et* $f \in \mathscr{L}(E)$. *Alors*

$$\mathrm{Mat}(f, \mathscr{C}) = \mathrm{Pass}(\mathscr{C}, \mathscr{B})^{-1}\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B})\mathrm{Pass}(\mathscr{C}, \mathscr{B}).$$

Démonstration. Par la proposition suivante,

$$\mathrm{Mat}(f, \mathscr{C}, \mathscr{C}) = \mathrm{Pass}(\mathscr{B}, \mathscr{C})\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{B})\mathrm{Pass}(\mathscr{C}, \mathscr{B}) = \mathrm{Pass}(\mathscr{C}, \mathscr{B})^{-1}\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{B})\mathrm{Pass}(\mathscr{C}, \mathscr{B}).$$

□

En un diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd} E_{\mathscr{B}} \arrow[r, "\mathrm{Mat}(f{,}\mathscr{B})", "f"'] & E_{\mathscr{B}} \arrow[d, "\mathrm{Id}"', "\mathrm{Pass}(\mathscr{C}{,}\mathscr{B})^{-1}"] \\ E_{\mathscr{C}} \arrow[u, "\mathrm{Pass}(\mathscr{C}{,}\mathscr{B})", "\mathrm{Id}"'] \arrow[r, "f", "\mathrm{Mat}(f{,}\mathscr{C})"'] & E_{\mathscr{C}} \end{tikzcd}$$

Définition 2.2.60. Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = Q^{-1}BP$$

Proposition 2.2.61. *C'est une relation d'équivalence sur* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *:*
- *toute matrice est équivalente à elle-même ;*
- *si* A *et* B *sont équivalentes alors* B *et* A *sont équivalentes.*
- *si* A *et* B *et* B *et* C *sont équivalentes alors* A *et* C *sont équivalentes.*

Démonstration.
- La matrice A est équivalente à lui-même : $A = I_n^{-1}AI_p$.
- si $A = Q^{-1}BP$ avec $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $B = QBP^{-1} = (Q^{-1})^{-1}BP^{-1}$. Comme P^{-1} et Q^{-1} sont inversibles alors B et A sont équivalentes.
- si $A = Q_1^{-1}BP_1$ et $B = Q_2^{-1}CP_2$ avec $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ alors $A = Q_1^{-1}BP_1 = Q_1^{-1}Q_2^{-1}CP_2P_1 = (Q_2Q_1)^{-1}AP_2P_1$ et comme Q_2Q_1 et P_2P_1 sont inversibles alors A et C sont équivalentes.

□

Proposition 2.2.62. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension* p *et* F *un espace vectoriel de dimension* n. *Deux matrices* A *et* B *de* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *sont équivalentes si, et seulement si, il existe une application linéaire* $f : E \to F$ *telle qu'il existe des bases* $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ *de* E *et deux bases* $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ *de* F *telles que* $A = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})$ *et* $B = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}', \mathscr{C}')$.

Démonstration. Supposons que A et B sont équivalentes. Fixons P, Q tels que $A = Q^{-1}BP$. Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{1\le i\le p}$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_j)_{1\le j\le n}$ une base de F. Soit

$f : E \to F$ l'application linéaire telle que $A = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})$ (qui existe toujours puisque $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B}, \mathscr{C})$ est bijective, cf. 2.2.8). Soient $\mathscr{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq p}$ la famille de E définie par

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \mathrm{Mat}(e'_i, \mathscr{B}) = P^{-1}\mathrm{Mat}(e_i, \mathscr{B})$$

et $\mathscr{C}' = (f'_j)_{1 \leq j \leq n}$ la famille de F définie par

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \mathrm{Mat}(f'_j, \mathscr{C}) = Q\mathrm{Mat}(f_j, \mathscr{C}).$$

Ainsi, ce sont deux bases et $\mathrm{Pass}(\mathscr{B}', \mathscr{B}) = P^{-1}$ et $\mathrm{Pass}(\mathscr{C}', \mathscr{C}) = Q$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}', \mathscr{C}') &= \mathrm{Pass}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})\mathrm{Pass}(\mathscr{B}', \mathscr{B}) \\ &= Q^{-1}AP \end{aligned}$$

Réciproquement, si on a une application linéaire $f : E \to F$ telle qu'il existe des bases $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ de E et deux bases $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ de F telles que $A = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})$ et $B = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}', \mathscr{C}')$. Alors, si on se fixe de telles bases, on obtient :

$$B = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}', \mathscr{C}') = \mathrm{Pass}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C})\mathrm{Pass}(\mathscr{B}', \mathscr{B}) = (\mathrm{Pass}(\mathscr{C}', \mathscr{C}))^{-1}A\mathrm{Pass}(\mathscr{B}', \mathscr{B}).$$

Et donc A et B sont équivalentes. □

Définition 2.2.63. Deux matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$B = P^{-1}AP$$

Deux matrices semblables sont en particulier équivalentes.

Proposition 2.2.64. *C'est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:*

— *toute matrice est semblables à elle-même ;*
— *si A et B sont semblables alors B et A sont semblables.*
— *si A et B et B et C sont équivalentes alors A et C sont semblables.*

Démonstration. — si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A = I_n^{-1}AI_n$ et donc A est semblable à A (car I_n est inversible) ;

— Si A et B sont semblables alors on peut choisir un $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$ et donc $A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$. Comme P^{-1} est inversible alors B est semblable à A.
— Si A et B sont équivalentes et B et C sont équivalentes alors on peut choisir $P_1, P_2 \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P_1 - 1AP_1 \text{ et } C = P_2^{-1}BP_2.$$

Alors $C = P_2^{-1}BP_2 = P_2^{-1}P_1 - 1AP_1P_2 = (P_1P_2)^{-1}AP_1P_2$. Comme $P_1P_2 \in GL_n(\mathbb{K})$ alors A et C sont semblables.

□

Proposition 2.2.65. *Deux matrices semblables ont la même trace.*

Démonstration. Soient A et B deux matrices semblables. Fixons $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$ alors

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(PAP^{-1}) \overset{2.2.52}{=} \mathrm{tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{tr}(A).$$

□

Par contraposée, deux matrices qui n'ont pas la même trace ne sont pas semblables.

Remarque 2.2.66. On dit que la trace est un invariant de similitude.

Définition 2.2.67. On dit qu'une matrice est diagonalisable si elle est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$
où $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

2.2.3.1 Exercices

Exercice 61. On considère l'endomorphisme $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$ est
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les trois valeurs distinctes de a pour lesquelles l'équation $\phi(v) = av$ a une infinité de solutions (l'inconnue est $v \in \mathbb{R}^3$).
2. Soient v_1, v_2 et v_3 trois solutions non nulles des trois équations du point précédent. Montrer qu'elles forment une base $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de ϕ dans cette base, matrice notée D par la suite ?
3. Donner la matrice de passage P de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{P}$. Quelle est la formule qui relie A et D (c'est-à-dire en faisant apparaître la matrice de passage entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$).

Exercice 62. On considère l'endomorphisme $\phi : \mathbb{R}_{\leq 3}[X] \to \mathbb{R}_{\leq 3}[X]$ défini par $\phi(P) = (X-2)P' - 3P$.

1. Donner une base pour le noyau de ϕ.
2. Déterminer la matrice A de ϕ dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
3. Déterminer la matrice D de ϕ dans la base $(1, X-2, (X-2)^2, (X-3)^3)$.
4. Écrire explicitement la formule qui relie A et D.

Exercice 63. On reprend les notations de l'exercice 45. On note $\mathscr{B}_{\mathrm{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner la matrice de p dans les bases $\mathscr{B}_{\mathrm{can}}$ et $\mathscr{B}$.
2. Calculer la matrice de passage entre la base $\mathscr{B}_{\mathrm{can}}$ et la base $\mathscr{B}$, et entre $\mathscr{B}$ et la base $\mathscr{B}_{\mathrm{can}}$. Vérifier que dans les deux cas elles coïncident avec leur carré.
3. Vérifier vos calculs avec la formule de changement de base.

Exercice 64. On reprend les notations de l'exercice 46.

1. Donner la matrice A associée à s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Vérifier que $A^2 = I_3$.
3. Choisir une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice associée à s est très simple.
4. Relier cette dernière matrice à la matrice A en utilisant des matrices de passage.

2.2.4 Rang

Proposition 2.2.68. *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors les entiers suivants sont égaux :*
- *la dimension de l'espace engendré par les colonnes de A dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;*
- *la dimension de l'image de A ;*
- *la dimension de l'image de n'importe quelle application linéaire représenté par A.*

Démonstration. Notons $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A i.e. si $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ alors $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ et donc $C_j = AE_{j1} = L_A(E_{j1})$ où (E_{j1}) est la base de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ décrite dans la proposition 2.2.4. On a donc :

$$\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \mathrm{Vect}(L_A(E_{11}), \dots, L_A(E_{p1})) = \mathrm{im}(L_A).$$

On en déduit donc que $\dim \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p) = \dim \mathrm{im}(L_A)$.

Soient $f : E \to F$ une application linéaire telle qu'il existe $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq j\leq p}$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_j)_{1\leq i\leq n}$ une base de F telles que

$$A = \mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{C}).$$

Par le corollaire 2.2.30, on obtient

$$f = \mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{C})^{-1} \circ L_A \circ \mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B}).$$

Et donc

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{C})^{-1} \circ L_A \circ \mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B})) = \mathrm{im}(\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{C})^{-1} \circ L_A) = \mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{C})^{-1}(\mathrm{im}(L_A))$$

La deuxième égalité vient du fait que $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B})$ est un isomorphisme (cf. 2.2.27) et donc $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{B})(E) = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et la troisième vient du fait que l'image d'une composée est l'image de l'image de la deuxième fonction par la première. Comme $\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{C})^{-1}$ est un isomorphisme alors elle envoie base sur base et donc

$$\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim\left(\mathrm{Mat}(\cdot, \mathscr{C})^{-1}(\mathrm{im}(L_A))\right) = \dim(\mathrm{im}(L_A)).$$

□

Exemple 2.2.69.

— $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 4 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$
car la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}\right)$ est libre dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et donc génératrice dans $\mathbb{R}^2$ si $a \neq 4$ et $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ sinon.

— $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 13 \end{pmatrix} = 2$ car $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ puis comme $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ sont linéairement indépendants car les deux colonnes ne sont pas colinéaires. On en déduit le résultat.

Définition 2.2.70. On appelle ce nombre rang de A et on le note $\mathrm{rg}(A)$.

Proposition 2.2.71. *Soit* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.

Démonstration. Soit f une application linéaire représenté par A. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(f^\top) = \dim(\mathrm{im}(f^\top)) &\overset{2.1.72}{=} \dim(\ker(f)^\circ) \\ &\overset{2.1.71}{=} p - \dim(\ker(f)) \overset{2.1.60}{=} \dim(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{rg}(A). \end{aligned}$$

□

On en déduit que le rang de A est la dimension de l'espace engendré par les colonnes de $A^\top$ dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et donc des lignes de A dans $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

Corollaire 2.2.72. *Pour tout* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$.

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a les égalités suivantes

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{im}\, L_A) \leq \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) = n$$

et

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top) = \dim(\mathrm{im}\, L_{A^\top}) \leq \dim(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})) = p.$$

On en déduit donc que $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$.

□

Corollaire 2.2.73. *Pour tout* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(A) = n$ *si, et seulement si,* A *est inversible.*

Démonstration. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a les assertions équivalentes suivantes

1. $\mathrm{rg}(A) = n$;
2. $\dim(\mathrm{im}(L_A : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))) = n$;
3. L_A est surjectif ;
4. L_A est bijectif ;
5. A est inversible.

L'équivalence 1) et 2) vient de la proposition 2.2.68, les équivalences entre 2), 3) et 4) viennent de 2.1.63 et l'équivalence entre 4) et 5) vient de 2.2.45. □

Corollaire 2.2.74. *Soit* A *une matrice de* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors*

1. *si* $P \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(PA) \leq \mathrm{rg}(A)$;
2. *si* $Q \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(AQ) \leq \mathrm{rg}(A)$;
3. *si* $P \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$ *et* $Q \in \mathscr{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ *alors* $\mathrm{rg}(PAQ) \leq \mathrm{rg}(A)$;
4. *si* $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(A)$;
5. *si* $Q \in GL_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(AQ) = \mathrm{rg}(A)$;
6. *si* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $Q \in GL_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}(PAQ) = \mathrm{rg}(A)$.

Démonstration. 1) Si $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ alors $AX = 0$ implique que $PAX = 0$. On en déduit donc que

$$\ker(L_A) \subset \ker(L_{PA}) \subset \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

et donc $\dim\ker(L_A) \leq \dim\ker(L_{PA}) \subset \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Par le théorème du rang, on en déduit que

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{im}(L_A)) = p - \dim(\ker(L_A)) \geq p - \dim(\ker(L_{PA}) = \dim(\mathrm{im}(L_{PA})) = \mathrm{rg}(PA).$$

2) Comme $L_Q(\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{K})) \subset \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ alors

$$\mathrm{im}(AQ) = L_{AQ}(\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{K})) = L_A(L_Q(\mathscr{M}_{r,1}(\mathbb{K}))) \subset L_A(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})) = \mathrm{im}(A)$$

et donc

$$\mathrm{rg}(AQ) = \dim\mathrm{im}(AQ) \leq \dim\mathrm{im}(A) = \mathrm{rg}(A).$$

3) Par les deux points précédents, on a :

$$\mathrm{rg}(PAQ) \leq \mathrm{rg}(PA) \leq \mathrm{rg}(A)$$

4) Avec 1), on a $\mathrm{rg}(PA) \leq \mathrm{rg}(A)$. De plus, on a :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(P^{-1}PA) \leq \mathrm{rg}(PA)$$

On en déduit l'égalité.
5) Avec 1), on a $\mathrm{rg}(AQ) \geq \mathrm{rg}(A)$. De plus, on a :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AQQ^{-1}) \leq \mathrm{rg}(AQ)$$

On en déduit l'égalité.
6) Par les deux points précédents, on a :

$$\mathrm{rg}(PAQ) = \mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(A)$$

□

Proposition 2.2.75. *Deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang.*

Démonstration. Comme la relation d'équivalence entre matrices est une relation d'équivalence, il suffit de montrer qu'une matrice de rang r est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

On reprend les idées de la démonstration du théorème du rang (cf. 2.1.60).
Si $r = 0$ alors $A = 0$ et donc $Q = I_n$ et $P = I_p$ conviennent.
Si $r = \min(n, p) = p$ (et donc $p \leq n$) alors L_A est injective et la famille $(F_1 \coloneqq L_A(E_{11}), \dots, F_p \coloneqq L_A(E_{p1}))$ est une image de $\mathrm{im}(L_A)$ qui se complète en une base $\mathscr{C} \coloneqq (F_1, \dots, F_n)$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On en déduit que

$$\mathrm{Mat}(L_A, (E_{i1})_{1\leq i\leq p}, \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc que A et $\begin{pmatrix} I_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$ sont équivalentes (cf. 2.2.62).
Si $r = \min(n, p) = n$ alors on peut appliquer le même raisonnement précédent avec $A^\top$:

$$A^\top = \widetilde{P}^{-1} J \widetilde{Q}$$

où $J = \begin{pmatrix} I_r \\ 0_{p-r,r} \end{pmatrix}$, $\widetilde{P} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$. On a donc

$$A = (A^\top)^\top = (\widetilde{P}^{-1} J \widetilde{Q})^\top = \widetilde{Q}^\top J^\top (\widetilde{P}^{-1})^\top \overset{2.2.47}{=} \left((\widetilde{Q}^{-1})^\top\right)^{-1} J^\top \left((\widetilde{P}^{-1})^\top\right)$$

Comme $(\widetilde{Q}^{-1})^\top$ et $(\widetilde{P}^{-1})^\top$ sont inversibles (cf. proposition 2.2.47) alors A et $J^\top = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \end{pmatrix}$ sont équivalentes.

Supposons que $0 < r < \min(p, n)$. Soit $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ de $\ker(A)$. On la complète en une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. La famille $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est libre (cf. démonstration du théorème 2.1.60) et on peut donc la compléter en une base $\mathscr{C}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors

$$\mathrm{Mat}(L_A, \mathscr{B}, \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

et donc, A et $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$ sont équivalentes. □

On a ainsi montré le résultat suivant :

Corollaire 2.2.76. *Une matrice* $A \in \mathscr{M}_{n,p}$ *est de rang* r *si, et seulement si,* A *est équivalent à* $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$

Définition 2.2.77. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle opérations élémentaires sur les colonnes de A les transformations suivantes, où C_j désigne la jème colonne de A :

- — Échange entre deux colonnes C_j et C_k ;
- — Remplacement de la colonne C_j par λC_j où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;
- — Remplacement de la colonne C_j par $C_j + \lambda C_k$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \neq j$;

Proposition 2.2.78. *Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. les lignes) de* A *s'obtiennent en multipliant à droite (resp. à gauche) par une matrice inversible*

Démonstration. Soit $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Soient $j, k \in \{1, \dots, p\}$. Posons $P_{jk} = (m_{sl})$ définie par

$$\forall s \in [\![1, p]\!], \forall l \in [\![1, p]\!], m_{s,l} \coloneqq \begin{cases} \delta_{sl} \text{ si } t \neq j, k \\ \delta_{kl} \text{ si } s = j \\ \delta_{jl} \text{ si } s = k \end{cases}$$

On a donc :

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & j & & k & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ j \\ \\ k \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} I_{j-1} & & & & \\ & & & 1 & \\ & & I_{k-j-1} & & \\ & 1 & & & \\ & & & & I_{p-k} \end{pmatrix} \end{array}.$$

La matrice produit $PA = (c_{il})$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} c_{il} &= \sum_{s=1}^{p} a_{is} m_{sl} = \sum_{s=1, s \neq j,k}^{p} a_{is}\delta_{sl} + a_{ik}\delta_{jt} + a_{il}\delta_{kl} \\ &= \begin{cases} a_{il} + 0 + 0 = a_{il} & \text{si } l \neq i, j \\ 0 + a_{ik} + 0 = a_{ik} & \text{si } l = j \\ 0 + 0 + a_{ij} = a_{ij} & \text{si } l = k \end{cases} \end{aligned}$$

On a bien interverti les colonnes C_j et C_k.

De plus, P est inversible d'inverse lui-même (son rang est maximal).

Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$. Notons $D_j(\lambda)$ la matrice

$$D_\lambda \coloneqq \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} I_{j-1} & & \\ & \lambda & \\ & & I_{p-j} \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut écrire cette matrice sous la forme $I_p + (\lambda - 1)E_{jj}$. On a donc

$$AD_j(\lambda) = A + (\lambda - 1)AE_{jj}.$$

De plus,comme

$$AE_{jj} = \sum_{s,t} a_{st}E_{s,t}E_{jj} = \sum_{s,t} a_{st}\delta_{tj}E_{sj} = \sum_{s} a_{sj}E_{sj}$$

c'est-à-dire est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la jème et qui coïncide avec la j colonne de A. On en déduit donc que $AD_j(\lambda)$ est bien la matrice A où on a multiplié la jème colonne par λ.

De plus, $D_j(\lambda)$ est inversible d'inverse $D_j\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ et $i \neq j \in \{1, \dots, p\}$. Notons $D_{j,k}(\lambda)$ la matrice

$$D_{ij}(\lambda) = I_p + \lambda E_{jk}.$$

Alors, de la même façon que précédemment

$$AD_{ij}(\lambda) = A + \sum_{st} a_{st}E_{st}E_{jk} = A + \sum_{st} a_{st}\delta_{tj}E_{sk} = A + \sum_{s} a_{sj}E_{sk}$$

Le deuxième terme est la jème colonne de A placée à la kème. On obtient donc bien le résultat voulu.

De plus, la matrice $D_{jk}(\lambda)$ est inversible d'inverse $D_{jk}(-\lambda)$:

$$D_{jk}(\lambda)D_{jk}(-\lambda) = (I_p + \lambda E_{jk})(I_p - \lambda E_{jk}) = I_p - \lambda E_{jk} + \lambda E_{jk} - \lambda^2 E_{jk}E_{jk} = I_p - \lambda^2 \delta_{jk}E_{jk} = I_p.$$

La définition de la transposée et la formule $(AB)^\top = B^\top A^\top$ (cf. 2.2.33) permettent de conclure sur les opérations sur les lignes. □

Corollaire 2.2.79. *Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes ne changent pas le rang de la matrice.*

Démonstration. On a vu dans la proposition précédente que les opérations élémentaires sont données par la multiplication par une matrice inverse. On a aussi vu dans 2.2.74 que cela ne changeait le rang donc les opérations élémentaires ne changent pas le rang. □

On peut ainsi donner un algorithme d'élimination pour calculer le rang d'une matrice :

Construction 2.2.80. *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $n \geq p$, on va faire des opérations élémentaires sur les colonnes de A et si $n \leq p$, on va faire des opérations sur les lignes de A (ou inversement, si on considère $A^\top$). On va supposer dans la suite que $n \geq p$.*

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

— *On examine la ligne $a_{j1} \dots a_{jp}$. Si toute la ligne est nulle, on examine la colonne $\begin{matrix} a_{j+1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}$ et si un des coefficients est nul (disons a_{ij}), on intervertit les deux lignes[1] Sinon, on se fixe un i pour que $a_{ji} \neq 0$ et on intervertit la jème colonne et la ième colonne. On fait ensuite les opérations élémentaires suivantes :*
  — *on multiplie la jème colonne par $\frac{1}{a_{jj}}$;*
  — *pour tout $k \neq j$, on remplace C_k par $C_k - a_{jk}C_j$*

— *Et on recommence avec la matrice obtenue.*

Après rg(A) itérations, toutes les colonnes suivantes sont toutes nulles. Pour tout $k \geq r$, on remplace L_k par $L_k - \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}L_p$. On obtient ainsi la matrice de la démonstration de 2.2.75.

1. cette étape est inutile si $n = p$

Si on note $\sim$ la relation d'équivalence, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2p} \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{np} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{np} \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{p-r} \\ B & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{p-r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $r = \mathrm{rg}(A)$ *et* $B \in \mathscr{M}_{n-p,p-r}(\mathbb{K})$.

Exemple 2.2.81. On a $\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} \\ C_1 \quad C_2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a-4 \end{pmatrix} \\ C_1 \quad C_2 - 2C_1 \end{array}$.

Si $a - 4 \neq 0$ alors on continue

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & a-4 \end{pmatrix} \\ C_1 \quad C_2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ C_1 \quad \frac{1}{a-4}C_2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ C_1 - 2C_1 \quad C_2 \end{array}$$

et si $4 - a = 0$ alors on a :

$$\begin{array}{cc} L_1 & \multirow{2}{*}{} \\ L_2 & \end{array}\!\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{array}\!\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.2.82. On a :

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 13 \end{pmatrix} \\ C_1 \quad C_2 \quad C_3 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \\ 4 & -7 & -7 \end{pmatrix} \\ C_1 \quad C_2 - 3C_1 \quad C_3 - 5C_1 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 7/5 & -7 \end{pmatrix} \\ C_1 \quad -\frac{1}{5}C_2 \quad C_3 \end{array}$$
$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 12/5 & 7/5 & 0 \end{pmatrix} \\ C_1 - 2C_1 \quad C_2 \quad C_3 - 5C_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.4.1 Exercices

Exercice 65. Prouver qu'une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

Exercice 66. Calculer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$;
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 67. Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

2.2.5 Matrices et systèmes linéaires

Remarque 2.2.83. On peut réécrire un système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

comme une équation matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dans la suite, on considérera les systèmes linéaires sous cette forme.

Définition 2.2.84. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B = (b_{ik}) \in \mathscr{M}_{n,q}$. La matrice augmentée définie par A et B est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p+q}(\mathbb{K})$, notée $(A \mid B)$, obtenue par concaténation de A et B i.e. $(A \mid B)$ est la matrice (c_{ij}) définie par

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, \ldots, p+q\}, c_{ij} \coloneqq \begin{cases} a_{ij} \text{ si } j \leq p \\ b_{ij-p} \text{ si } j > p \end{cases}$$

Exemple 2.2.85. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ alors

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2.86. *L'espace vectoriel des solutions du système linéaire de n équations à p inconnues $AX = 0$ est de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$.*

Démonstration. Les solutions de $AX = 0$ sont les éléments du noyau de L_A. On en déduit donc, par le théorème du rang, que ces solutions forment un espace vectoriel de $p - \mathrm{rg}(A)$. □

Proposition 2.2.87. *Soit $AX = B$ un système linéaire de n équations à p inconnues.*
- *Le système linéaire n'admet pas de solution si, et seulement si,* $\mathrm{rg}(A \mid B) > \mathrm{rg}(A)$ *(et dans ce cas,* $\mathrm{rg}(A \mid B) = \mathrm{rg}(A) + 1$.
- *Le système linéaire admet au moins une solution si, et seulement si,* $\mathrm{rg}(A \mid B) = \mathrm{rg}(A)$. *Ces solutions s'écrivent comme l'ensemble des sommes de X_0, une solution particulière de $AX = B$, et des solutions du système homogène $AX = 0$. En particulier, si* $\mathrm{rg}(A) = p$ *alors ce système a une unique solution.*

Démonstration. Notons $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de A. Alors, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$,

$$AX = x_1 C_1 + \ldots + x_p C_p$$

Alors le système $AX = B$ admet au moins une solution si, et seulement si, il existe $(x_1, \ldots, x_n)$, $x_1 C_1 + \ldots + x_p C_p = B$ i.e. si, et seulement si, $B \in \mathrm{im}(L_A)$. On en déduit que c'est équivalent à $\mathrm{rg}(A \mid B) = \mathrm{rg}(A)$. Comme $\mathrm{rg}(A \mid B) \geq \mathrm{rg}(A)$ alors le fait de ne pas avoir de solution est équivalente au fait que $\mathrm{rg}(A \mid B) > \mathrm{rg}(A)$.

Dans le cas où $AX = B$ admet une solution X_0 alors les conditions suivantes sont équivalentes pour un $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$:
- $AX = B = AX_0$;
- $A(X - X_0) = 0$;
- $X - X_0$ est une solution de $AX = 0$.

$\square$

Remarque 2.2.88. Les opérations élémentaires de la proposition 1.5.6 sur les systèmes linéaires et les opérations élémentaires *sur les lignes* de la définition 2.2.77 correspondent. La résolution du système $AX = B$ peut se faire en réduisant la matrice augmentée $(A \mid B)$. Les opérations sur les colonnes de cette matrice n'ont pas de sens pour le système linéaire associée.

Exemple 2.2.89. Considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 2t + 3x + 4y + 2z = 11 \\ 2t + 3x + 6y + 4z = 15 \\ 4t + 7x + 5y + 5z = 21 \\ 8t + 13x + 15y + 11z = 47 \end{cases}.$$

On étudie donc la matrice augmentée

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 15 \\ 4 & 7 & 5 & 5 & 21 \\ 8 & 13 & 15 & 11 & 47 \end{pmatrix}.$$

On a les équivalences suivantes (par opérations à gauche)

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 11 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 15 \\ 4 & 7 & 5 & 5 & 21 \\ 8 & 13 & 15 & 11 & 47 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} L_1/2 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_2 \\ L_4 - 4L_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 1 & 11/2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \\ L_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 1 & 11/2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{r} L_1 - 3/2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - L_1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13/2 & -1/2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} L_1 - 13/4L_3 \\ L_2 + 3/2L_3 \\ L_3/2 \\ L_4 - L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc que les solutions s'écrivent de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $t \in \mathbb{R}$ (la variable libre du système qui vient de la dernière ligne nulle).

Construction 2.2.90. *On peut aussi calculer l'inverse d'une matrice inversible $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec des opérations élémentaires : en effet, pour calculer cet inverse, il suffit de connaître les matrices $A^{-1}E_i$ avec $1 \leq i \leq n$ i.e. connaître les solutions des équation $AX = E_i$ avec $1 \leq i \leq n$. On regroupe ces équations dans la matrice augmentée $(A \mid I_n)$.*
Comme expliqué dans 2.2.80, on peut se restreindre dans notre cas, à faire uniquement des

opérations sur les lignes ou sur les colonnes. Dans la suite, on fera sur les lignes. Ces opérations sont décrites comme des multiplications à gauches par des matrices inversibles. Par 2.2.80, la matrice augmentée $(A \mid I_n)$ *est équivalente à* $(I_n \mid B)$ *où* $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Plus précisément, on a une suite de matrices inversibles* $P_1, \dots, P_n$ *telles que*

$$(I_n \mid B) = P_n \dots P_1 (A \mid I_n) = (P_n \dots P_1 A \mid P_n \dots P_1 I_n) = (P_n \dots P_1 A \mid P_n \dots P_1)$$

On en déduit donc que

$$\begin{cases} P_n \dots P_1 A = I_n \\ P_n \dots P_1 = B \end{cases}$$

et donc que B *est l'inverse de* A. *L'algorithme du pivot permet donc de calculer l'inverse d'une matrice inversible.*

Exemple 2.2.91. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la matrice augmentée et les matrices qui lui sont équivalentes par opérations élémentaires :

$$(A \mid I_3) = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} L_1 \\ -L_3 \\ L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} L_1 - 2/3 L_3 \\ L_2 + 2/3 L_3 \\ L_3/3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & 2 \\ 1/3 & 2/3 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2.5.1 Exercices

Exercice 68. Résoudre les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 19t + 9x + 13y + 30z = 0 \\ 22t + 8x + 9y + 19z = 0 \\ 7t + x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -3s + t + x - y - z = 0 \\ t + 2x - y + z = 0 \\ 2s + t + 2y = 0 \\ s - t + x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

Exercice 69. Pour quelles valeurs du paramètre t la matrice suivante est-elle inversible ? Dans ce cas, déterminer son inverse.

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 70. Montrer que ces matrices sont inversibles et donner leur inverse

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.