Géométrie analytique TD1

Équations cartésienne et paramétrique d'une droite

Exercice 1. 1. Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par l'équation $2x - y + 6 = 0$. Déterminer une paramétrisation de $\mathcal{D}$.

2. Même question pour $\mathcal{D}_a : 2x - 3ay + 4 = 0$, où $a \in \mathbb{R}$.

3. Soit la droite $\mathcal{D}$ du plan définie par la paramétrisation $x = 2 - t$ et $y = -1 + 3t$, pour $t \in \mathbb{R}$. Déterminer une équation cartésienne (ou implicite) de $\mathcal{D}$.

Solution :

1. La droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x - y + 6 = 0$ admet $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur (non unique !) et passe par le point $A = (-3, 0)$.

   On peut définir $\mathcal{D}$ par l'équation paramétrique suivante : $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = \quad 2t \end{cases}$

2. De la même façon, on trouve $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A = (-2, 0)$.

   Ainsi, $\mathcal{D}$ est définie par l'équation paramétrique (non unique !) : $\begin{cases} x = 3at - 2 \\ y = \quad 2t \end{cases}$

3. L'équation paramétrique nous donne un vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et un point $A = (2, -1)$ de $\mathcal{D}$. Une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donc de la forme $3x + y + c = 0$.

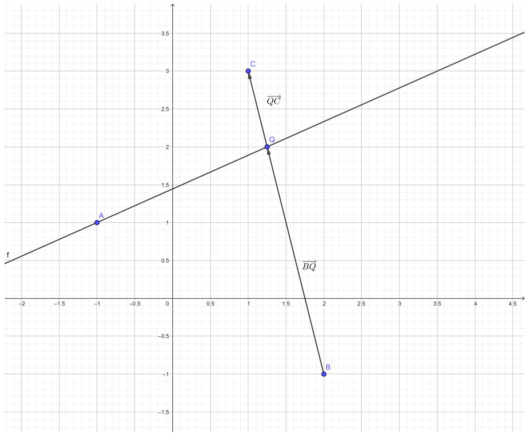
   Mais $A \in \mathcal{D}$ donc $3.(2) + (-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -5$. Finalement, une équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est
$$\mathcal{D} \ : \ 3x + y - 5 = 0$$

Exercice 2. On considère les points $A = (-1, 1)$, $B = (2, -1)$ et $C = (1, 3)$. Soit Q le point du plan tel que $\overrightarrow{BQ} = 3\,\overrightarrow{QC}$.

1. Faire un dessin.

2. Donner une équation décrivant la droite (AQ) ; d'abord une équation paramétrée puis une équation cartésienne.

Solution :

1. 

2. On cherche d'abord les coordonnées de Q.

   On pose $Q = (x, y)$, la relation $\overrightarrow{BQ} = 3\overrightarrow{QC}$ se réécrit $\begin{cases} x - 2 = 3(1 - x) \\ y + 1 = 3(3 - y) \end{cases}$ ce qui nous donne $Q = \left(\dfrac{5}{4}, 2\right)$. On a donc un vecteur directeur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$ et le point évident $P \in (PQ)$.

   Une paramétrisation est donc $\begin{cases} x = \frac{9}{4}t - 1 \\ y = \ \ t + 1 \end{cases}$ ou encore en changeant t en $4t$: $\begin{cases} x = 9t - 1 \\ y = 4t + 1 \end{cases}$.

   A partir de cette paramétrisation, on obtient une équation cartésienne de (PQ) :

   $$4x - 9y = 4(9t - 1) - 9(4t + 1) = -13$$

3. Grâce a l'égalité $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, on obtient l'équation de (BP) :

   $$2x + 3y = 2x_P + 3y_P = 1$$

   L'équation de la droite $\mathcal{D}$ parallèle à (PQ) passant par C est

   $$4x - 9y = 4x_C - 9y_C = 4 - 3 \times 9 = -23$$

   Ces deux droites ne sont pas parallèles et leur point d'intersection est la solution du système $\begin{cases} 2x + 3y = \ \ \ 1 \\ 4x - 9y = -23 \end{cases}$ On en déduit donc que $A = (-2, 5/3)$

4. On calcule le point d'intersection de (AQ) et de (CP) de la même façon que la question précédente (en ayant vérifié au préalable que ces deux droites ne sont pas parallèles) : On obtient $M = (-1/7, 13/7)$. Ainsi $\overrightarrow{QM} = \begin{pmatrix} -1/7 - 5/4 \\ 13/7 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39/28 \\ -1/7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 + 1/7 \\ 5/3 - 13/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/7 \\ -4/21 \end{pmatrix}$, ce qui permet de déduire que

   $$\overrightarrow{MA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{QM}.$$

Exercice 3. On considère les trois droites $\mathcal{D}_1 : y = 0$, $\mathcal{D}_2 : x = 0$ et $\mathcal{D}_3 = -2x + y = 0$ ainsi que les six points $A_1 = (1, 0)$, $A_2 = (0, 1)$, $A_3 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $B_1 = (2, 0)$, $B_2 = (0, 4)$, $B_3 = (t, 2t)$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Faire un dessin pour $t = \frac{3}{2}$.

2. Justifier que $B_3 \in \mathcal{D}_3$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer toutes les valeurs de t pour lesquelles les trois couples de droites

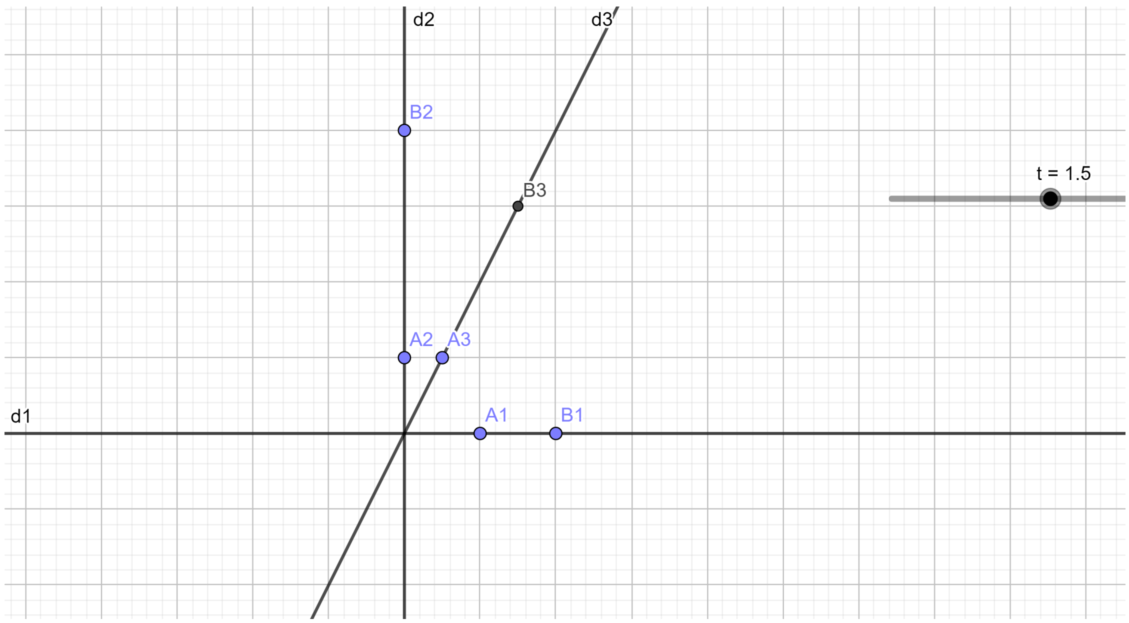
$$(A_1A_2) \text{ et } (B_1B_2), \qquad (A_2A_3) \text{ et } (B_2B_3), \qquad (A_3A_1) \text{ et } (B_3B_1)$$

s'intersectent en C_3, C_1 et C_2 respectivement.

4. Quand les points C_3, C_1 et C_2 existent, montrer qu'ils sont alignés.

5. Que peut-on dire quand les trois points d'intersection n'existent pas tous ?

Solution :

1. 

2. On remplace simplement les coordonnées de B_3 dans l'équation de $\mathcal{D}_3$: $B_3 \in \mathcal{D}_3 \Leftrightarrow -2.(t) + (2t) = 0$.

3. On commence par chercher les équations cartésiennes des droites et on trouve pour chaque couple :

   (a) $(A_1A_2) : x + y = 1$, $(B_1B_2) : 2x + y = 4$ et $C_3 = (3, -2)$.

   (b) $(A_2A_3) : y = 1\,(B_2B_3) : 2(t-2)x - ty + 4t = 0$ et $\forall t \neq 2,\ C_1 = \left(\dfrac{-3t}{2(t-2)}, 1\right)$.

   (c) $(A_3A_1) : 2x+y = 2\,(B_3B_1) : 2tx-(t-2)y = 4t$ et $\forall t \neq 1,\ C_2 = \left(\dfrac{3t-2}{2(t-1)}, \dfrac{-t}{t-1}\right)$

4. On utilise la formule du déterminant donnée dans le cours :
C_1, C_2 et C_3 sont alignés si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} x_{C_3} - x_{C_1} & y_{C_3} - y_{C_1} \\ x_{C_3} - x_{C_2} & y_{C_3} - y_{C_2} \end{pmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(3 + \frac{3t}{2(t-2)}\right)\left(-2 + \frac{t}{t-1}\right) - (-3).\left(3 - \frac{3t-2}{2(t-1)}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \left(\frac{9t-12}{2(t-2)}\right)\left(\frac{-t+2}{t-1}\right) + 3\left(\frac{3t-4}{2(t-1)}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2(t-1)(t-2)}\left[3(3t-4)(2-t) + 3(3t-4)(t-2)\right] = 0
\end{aligned}$$

Exercice 4 (faisceau de droites)**.** Pour tout $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on note $\overrightarrow{v_\theta} = (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$

1. Soit $A = (a, b)$ un point du plan affine. Montrer que pour toute droite D passant par A, il existe $\theta_D \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que D soit décrite par $(x, y) = (a, b) + t\overrightarrow{v_{\theta_D}}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Soit $A = (\sqrt{3}, -1)$. Pour chaque droite D passant par A, on note, quand ces points existent, X_D et Y_D les points d'intersection de D avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement. Déterminer toutes les droites passant par A pour lesquelles X_D soit strictement entre A et Y_D.

Solution :

1. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A. Soit $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Comme tout multiple non nul de u est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors on peut choisir comme vecteur directeur de $\mathcal{D}$ un vecteur de norme 1, c'est-à-dire tel que $u_1^2 + u_2^2 = 1$ (pour ce faire, on divise $\overrightarrow{u}$ par $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$) ou encore tel qu'il existe un $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $u_1 = \cos(\theta)$, $u_2 = \sin(\theta)$ (car (u_1, u_2) est sur le cercle trigonométrique). Pour chaque droite, il existe deux tels angles : θ et $\theta + \pi$ (car $\mathcal{D}$ a deux points d'intersection avec le cercle unité centré en A). Ainsi, si on se restreint à l'intervalle à $]-\pi/2, \pi/2]$, on obtient l'unicité de cet angle.

2. Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A d'équation $ax + by + c = 0$. $X_\mathcal{D}$ et $Y_\mathcal{D}$ existent simultanément si, et seulement si, $a \neq 0 \neq b$. Dans ce cas, $X_\mathcal{D} = (-\frac{c}{a}, 0)$ et $Y_\mathcal{D} = (0, -\frac{c}{b})$. Maintenant que l'on connait les coordonnées de $X_\mathcal{D}$ et $Y_\mathcal{D}$, on peut déterminer les cas où $X_\mathcal{D}$ est strictement inclus entre A et $Y_\mathcal{D}$. C'est exactement les cas où il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que
$$\left(-\frac{c}{a}, 0\right) = X_\mathcal{D} = \lambda A + (1-\lambda)Y_\mathcal{D} = \left(\lambda\sqrt{3}, -\lambda - (1-\lambda)\frac{c}{b}\right)$$
i.e. lorsque
$$0 \leq \frac{c}{-a\sqrt{3}} \leq 1$$
Le côté gauche de cette inégalité nous dit que c et a sont de signe différents. On a donc deux cas :

   (a) Si $c \geq 0$ (alors $-a \geq 0$), le côté droit de l'inégalité s'écrit $c \leq -a\sqrt{3}$ ou autrement dit, comme $A \in \mathcal{D}$, $b \leq 0$

   (b) Si $c \geq 0$ (alors $-a \geq 0$), le côté droit de l'inégalité s'écrit $c \geq -a\sqrt{3}$ ou autrement dit, $b \geq 0$

   (ATTENTION, parler du signe de b a un sens ici car on a commencé par fixer le signe de c. Dans le cas général, cela n'a pas de sens car on peut multiplier l'équation par un réel non nul quelconque).

Exercice 5. 1. Soit $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$. Calculer l'expression $x_{\overrightarrow{v}}y_{\overrightarrow{w}} - y_{\overrightarrow{v}}x_{\overrightarrow{w}}$ appelée le *déterminant des vecteurs* $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *dans la base canonique* et notée $\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. En déduire que
$$\forall\, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{v} \text{et} \overrightarrow{w} \text{ colinéaires} \iff \det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0.$$

2. On considère les droites
$$\mathcal{D}_1 : (m+1)\,x + (m^2 - 3m - 10)\,y - 1 = 0 \text{ et } \mathcal{D}_2 : 2\,x - 5\,y + 6 = 0,$$
où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Trouver tous les m pour lesquels $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles.

Solution :

1. "$\Rightarrow$" : v et w sont colinéaires si et seulement s'il existe λ tel que $v = \lambda w$. Donc $det(v,w) = x_v y_w - y_v x_w = \lambda(x_w y_w - y_w x_w) = 0$.
   "$\Leftarrow$" : On suppose maintenant que $det(v,w) = x_v y_w - y_v x_w = 0$.
   (a) Si $v = \overrightarrow{0}$ ou $w = \overrightarrow{0}$ alors v et w sont colinéaires.
   (b) Si v est de la forme $(0, y_v)$, $y_v \neq 0$ (*resp.* $(x_v, 0)$, $x_v \neq 0$) alors $x_v y_w = 0$ (*resp.* $x_v y_w = 0$) donc $y_w = 0$ (*resp.* $x_w = 0$) et v est colinéaire à w.
   (c) Même chose pour w.
   (d) On peut donc maintenant supposer x_v, x_w, y_v et y_w sont tous non nuls. Dans ce cas on pose $k = x_v/y_v = x_w/y_w$ et on a $x_w = kx_v$ et $y_w = ky_v$, donc v et w sont colinéaires.
2. On a $\mathcal{D}_1 // \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow \mathcal{D}_1$ et $\mathcal{M}_2$ ont leurs vecteurs directeurs colinéaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} m^2 - 3m - 10 \\ -m - 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. Par la question 1, on trouve $\mathcal{D}_1 // \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow det(v,w) = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 6m - 20 + 5m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$ ou $m = 3$.

Exercice 6. Déterminer les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que les droites

$$\mathcal{D}_1 = \{(\lambda - 1)x - (2\lambda - 5)y + 3 = 0\}$$
$$\mathcal{D}_2 = \{(2\lambda + 3)x + (\lambda + 5)y - 8 = 0$$

sont

1. parallèles,
2. telles que le vecteur $\overrightarrow{v}_1 = (\lambda - 1, 2\lambda - 5)$ soit le vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$. (Cette condition signifie que les droites sont perpendiculaires ; la définition de la perpendicularité utilisera le produit scalaire qui sera vu plus tard en cours.)

Solution :

1. Par le même raisonnement que dans l'exercice précédent :
   $\mathcal{D}_1 // \mathcal{M}_2 \Leftrightarrow (2\lambda - 5)(2\lambda + 3) + (\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$.
2. Soit $v_2 = \begin{pmatrix} -\lambda - 5 \\ 2\lambda + 3 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$. Donc $\mathcal{D}_2$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{v_1}'$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ ce qui équivaut à la condition $\det(v_1', v_2) = 0$.
   $\det(v_1', v_2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(2\lambda + 3) - (-2\lambda + 5)(-\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow -4\lambda + 22 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{11}{2}$.

Exercice 7. On considère la parabole $\Gamma : y = x^2$ (*i.e.* le graphe de la fonction $f(x) = x^2$) et le point $A = (2, -5)$. Soit $P_t = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de Γ.

1. Écrire une équation cartésienne pour $\mathcal{T}_t$, la droite tangente à Γ en P_t et mettre en évidence le vecteur directeur de cette droite dont la première coordonnée vaut 1.
2. Trouver les t pour lesquels $(AP_t) = \mathcal{T}_t$.

Solution :

1. Par la formule vue au lycée (la tangente au graphe d'une fonction f en a est donnée par $y = f'(a)(x - a) + f(a)$), on a $\mathcal{T}_t : y = 2t(x - t) + t^2$. Un vecteur directeur est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$.

2. $\mathcal{P}_t$ appartient à la droite $\mathcal{T}_t$ ainsi qu'à la droite $(A\mathcal{P}_t)$ donc les deux droites coïncident si et seulement si A se trouve sur la droite $\mathcal{T}_t$. Et $(A\mathcal{P}_t) = \mathcal{T}_t \Leftrightarrow -5 = 2t(2-t)+t^2 \Leftrightarrow t = -1$ ou $t = 5$.
   On pouvait aussi se servir du vecteur que l'on a trouvé à la question précédente. $(A\mathcal{P}_t) = \mathcal{T}_t$ si et seulement si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de $(A\mathcal{P}_t)$. Cela équivaut à demander $det(\overrightarrow{A\mathcal{P}_t}, v) = 0 \Leftrightarrow 2t(t-2) - t^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ ou $t = 5$

Produit scalaire et distance dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 8. Soit $A = (0,4)$ et soit $\mathcal{D}$ la droite des abscisses, *i.e.* $\mathcal{D} : y = 0$. On considère le point $P_s = (s,0) \in \mathcal{D}$, $s \in \mathbb{R}$.

1. Trouver un point $Q_s \in \mathcal{D}$ tel que (AP_s) et (AQ_s) soient perpendiculaires.
2. Calculer la distance P_sQ_s.
3. Pour quel(s) $s \in \mathbb{R}$ la longueur de l'hypoténuse du triangle $[AP_sQ_s]$ vaut-elle 10 ?

Solution :

1. Soit $s \in \mathbb{R}$. On cherche le point $Q_s = (x_s, 0) \in \mathcal{D}$ tel que (AP) et (AQ_s) soient perpendiculaires, ce qui se traduit par l'équation :
$$\overrightarrow{AP_s} \cdot \overrightarrow{AQ_s} = 0 \tag{1}$$
   Comme $\overrightarrow{AP_s} = \begin{pmatrix} s \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AQ_s} = \begin{pmatrix} x_s \\ -4 \end{pmatrix}$, cette équation se réécrit :
$$16 + sx_s = 0$$
   On en déduit que si $s = 0$ alors l'équation (1) n'a pas de solution. Dans le cas contraire, $x_s = \frac{-16}{s}$.
2. Soit $s \neq 0$. Alors,
$$P_sQ_s = \left\|\overrightarrow{P_sQ_s}\right\| = \sqrt{(x_s - s)^2} = \left|\frac{16}{s} + s\right|$$
   (Attention à ne pas oublier la valeur absolue : une distance est toujours positive)
3. Soit $s \neq 0$. L'hypoténuse du triangle $[AP_sQ_s]$ est le segment $[P_sQ_s]$.
   $P_sQ_s = 10 \Leftrightarrow \left|\frac{16}{s} + s\right| = 10 \Leftrightarrow \left(\frac{16}{s} + s\right)^2 = 100 \Leftrightarrow s^4 - 68s^2 + 256 = 0$
   (la deuxième équivalence vient de la positivité de la valeur absolue).
   On pose $S = s^2$ et on obtient alors l'équation $S^2 - 68S + 256 = 0$. Ses solutions sont 4 et 64.
   Ainsi, $P_sQ_s = 10$ si, et seulement si, $s = 2, -2, 8, -8$

Exercice 9. Soient $A = (-3,1)$, $B = (2,13)$ et $C_s = (s,5)$ avec $s \in \mathbb{R}$. Pour chaque s déterminer le point $P_s \in (AB)$ tel que (C_sP_s) soit perpendiculaire à (AB). Pour quel $s \in \mathbb{R}$ on a $C_sP_s = 4$?

Solution :

- Comme $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $A \in (AB)$ alors une équation de (AB) est $12x - 5y = -41$.

  Soit $P = (x,y) \in (AB)$ tel que (C_sP) est perpendiculaire à (AB). Comme $\overrightarrow{C_sP} = \begin{pmatrix} x-s \\ y-5 \end{pmatrix}$ alors cette dernière condition se traduit par :
$$0 = \overrightarrow{C_sP} \cdot \overrightarrow{AB} = 5(x-s) + 12(y-5) = 5x + 12y - 60 - 5s$$

Ainsi, P vérifie le système $\begin{cases} 5x + 12y = 60 + 5s \\ 12x - 5y = \quad -41 \end{cases}$.

On en déduit les égalités $\begin{cases} x = \frac{25s-192}{169} \\ y = \frac{60s+925}{169} \end{cases}$

- Voici deux corrections possibles.

  1. Comme (C_sP_s) est perpendiculaire à AB alors la distance $d(C_s, (AB))$ est égale à $d(C_s, P_s)$. La première distance est plus facilement calculable que la deuxième :

  $$d(C_s, (AB)) = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{|12s+16|}{13}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow (12s+16)^2 = (4.13)^2 \Leftrightarrow 12s+16 = -52 \text{ ou } 12s+16 = 52$$
  $$\Leftrightarrow s = -17/3 \text{ ou } s = 3$$

  2. Pour ceux qui n'avaient pas la formule de la distance d'un point à une droite, on pouvait faire comme suit :

  $C_sP_s = 4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-s)^2 + (y-5)^2} = 4 \Leftrightarrow (x-s)^2 + (y-5)^2 = 16 \Leftrightarrow \left(\frac{25s-192}{169} - s\right)^2 + \left(\frac{60s+925}{169} - 5\right)^2 = 16$
  On obtient ainsi l'équation suivante :

  $$24336s^2 + 64896s - 413712 = 0$$

  Et donc $s = -17/3$ et $s = 3$

Exercice 10. Dans le plan affine euclidien $\mathbb{E}^2$, on considère les points $A = (1,1)$ et $P_t = (t, t^2)$, où $t > 1$ joue le rôle d'un paramètre.

1. Calculer $\lim\limits_{t\to 1^+} \overrightarrow{AP_t}/\|\overrightarrow{AP_t}\|$. (La limite d'un vecteur est calculée composante par composante.)

2. Calculer cette limite en $\pm\infty$. Conjecturer la réponse si on remplace A par un point $B = (b, b^2)$.

Solution :

1. Soit $t > 1$.
   On a $\overrightarrow{AP_t} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\left\|\overrightarrow{AP_t}\right\| = \sqrt{(t-1)^2 + (t^2-1)^2} = (t-1)\sqrt{1+(t+1)^2}$ et donc
   $$\frac{\overrightarrow{AP_t}}{\left\|\overrightarrow{AP_t}\right\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(t+1)^2}} \\ \frac{t+1}{\sqrt{1+(t+1)^2}} \end{pmatrix}$$

   En calculant la limite en 1 composante par composante, on obtient $\lim\limits_{t\to 1} \frac{\overrightarrow{AP_t}}{\left\|\overrightarrow{AP_t}\right\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

2. Calculons maintenant la limite en $\pm\infty$:

   (a) $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(t+1)^2}} = 0$

   (b) Comme pour tout $t > 1$, $\frac{t+1}{\sqrt{1+(t+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(t+1)^2}}}$ alors $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{t+1}{\sqrt{1+(t+1)^2}} = 1$

On en conclut que $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{\overrightarrow{AP_t}}{\left\|\overrightarrow{AP_t}\right\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si on remplace A par un point (b, b^2), on obtient la même limite en $\pm\infty$

Exercice 11. 1. On considère le triangle isocèle $[ABC]$ avec $b = AB = AC$ et $\alpha \in]0, \pi[$ la mesure de l'angle $\widehat{A}$. Pour tout point $P \in [BC]$, calculer la somme des distances de P aux droites (AB) et (AC).

2. Utiliser ce résultat pour déterminer le lieu géométrique des points P tels que $d(P, \mathcal{D}_1) + d(P, \mathcal{D}_2) = a$, avec $a > 0$ fixé, où $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites fixées. (On distinguera les cas $\mathcal{D}_1 \nparallel \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$.)

Solution :

1. Première correction en coordonnées.
Il faut d'abord choisir le repère adapté. On place le repère tel que $y_B = y_C = 0$ et $x_A = 0$. Dans cette configuration, à l'aide des formules usuelles on trouve $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2b}BC$ et $\cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{y_A}{b}$. Or, on a choisit notre repère de sorte que $\frac{1}{2}BC = x_C = -x_B$. On trouve donc $B = (-b\sin(\frac{\alpha}{2}), 0)$, $C = (b\sin(\frac{\alpha}{2}), 0)$ et $A = (0, b\cos(\frac{\alpha}{2})$. On peut alors trouver des équations cartésiennes pour (AB) et (AC). On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -b\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ -b\cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} b\sin(\frac{\alpha}{2}) \\ -b\cos(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$. Donc,

$$(AB) : b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)x - b\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)y + c = 0, \text{ et } (AC) : b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)x + b\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)y + c' = 0$$

On trouve c et c' en remplaçant les coordonnées de A dans les équations et à l'aide des formules de trigonométrie, on a $c = b^2\frac{\sin(\alpha)}{2}$ et $c' = -b^2\frac{\sin(\alpha)}{2}$.
On calcule ensuite la distance de P à la droite (AB),

$$d(P, (AB)) = \frac{\left|b\cos(\frac{\alpha}{2})x_P - b\sin(\frac{\alpha}{2})y_P + b^2\frac{\sin(\alpha)}{2}\right|}{\sqrt{(b\cos(\frac{\alpha}{2}))^2 + (b\sin(\frac{\alpha}{2}))^2}} = \left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)x_P - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)y_P + b\frac{\sin(\alpha)}{2}\right|$$

Mais $P \in [BC]$ donc $y_P = 0$ et $x_P \in [-b\sin(\frac{\alpha}{2}), b\sin(\frac{\alpha}{2})]$. Donc

$$d(P, (AB)) = \left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)x_P + b\frac{\sin(\alpha)}{2}\right| = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left|x_P + b\sin(\frac{\alpha}{2})\right|$$

On remarque que le terme sous la valeur absolue est toujours positif, on peut donc enlever la valeur absolue.
On refait la même chose pour $d(P, (AC))$ et on trouve : $d(P, (AC)) = \cos(\frac{\alpha}{2})|x_P - b\sin(\frac{\alpha}{2})|$.
Dans ce cas, le terme sous la valeur absolue est toujours négatif, on peut donc enlever la valeur absolue en multipliant par -1.
Finalement, on a :

$$\begin{aligned} d(P, (AB)) + d(P, (AC)) &= \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(x_P + b\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(x_P - b\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 2b\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = b\sin(\alpha) \end{aligned}$$

On remarquera que cela ne dépend pas de P. Pour voir de manière plus géométrique pourquoi, voici une autre solution au problème posé :
Considérons A' le symétrique de A par la droite (BC). Puisque le triangle $[ABC]$ est isocèle, le quadrilatère $[ABCA']$ est un parallélogramme. Considérons aussi H le point qui vérifie $(PH) \perp (AB)$ (i.e. $d(P, (AB)) = d(P, H)$). Par symétrie,

on a $(PH') \perp (A'B)$, donc le point O d'intersection de (PH') et (AC) vérifie $d(P,(AC)) = d(P,O)$. Finalement

$$d(P,(AB)) + d(P,(AC)) = d(P,H) + d(P,O) = d(P,H') + d(P,O) = d(H',O)$$

Mais comme $(AC)//(BA')$, cette dernière distance est égale à la hauteur du triangle $[ABC]$ issue de B. Par les formules habituelles, on a $\sin(\alpha) = d(B,(AC))/b$, d'où

$$d(B,(AC)) = b\sin(\alpha)$$

2. On considère séparément les deux cas où $\mathcal{D}_1//\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes.

   (a) On suppose $\mathcal{D}_1//\mathcal{D}_2$.
   Si $a < d(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$, on a $a = d(P,\mathcal{D}_1) + d(P,\mathcal{D}_2) \geq d(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2) > a$, donc aucun point ne vérifie cette égalité.
   Si $a = d(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$, tout point "entre" les deux droites va vérifier l'égalité (pour la justification, remarquer que les points H et H' qui vérifie $d(P,H) = d(P,\mathcal{D}_1)$ et $d(P,H') = d(P,\mathcal{D}_2)$ sont alignés avec P, et la distance $d(H,H')$ est par définition la distance $d(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$.
   Si $a > d(\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2)$, par le même raisonnement qu'avant, on trouve qu'il existe deux droites $\mathcal{L}_a$ et $\mathcal{L}'_a$ parallèles à $\mathcal{D}_1$ telles qu'en chaque point P de ces droites l'égalité $a = d(P,\mathcal{D}_2) + d(P,\mathcal{D}_2)$ est vérifiée.

   (b) Si les droites sont sécantes, on se retrouve dans une configuration similaire à la question 1. On note $A = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$. Dans chaque portion du plan obtenue par découpage selon les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ on reconstruit le triangle dont les points de la base opposée à A vérifient l'égalité.
   On obtient donc quatre segments (que sont les bases de chacun des triangles). Le lieu géométrique des points P vérifiant $a = d(P,\mathcal{D}_1) + d(P,\mathcal{D}_2)$ est donc la réunion de ces quatre segments.

Exercice 12. 1. Soient $p > 0$, le point $F = (0,p/2)$ et la droite $\mathcal{D} : y = -p/2$. Déterminer le lieu géométrique (une équation) des points P du plan euclidien tels que $PF = d(P,\mathcal{D})$. Ce lieu est appelée la parabole de foyer F et de droite directrice $\mathcal{D}$.

2. Déterminer l'équation de la parabole de foyer $F = (-1,2)$ et de directrice $\mathcal{D}$: $3x - 4y + 1 = 0$.

3. Soit $\Gamma : 4x = y^2$ une parabole. Déterminer son foyer et sa droite directrice. Pour un point $P = (a^2/4, a) \in \Gamma$, déterminer la droite tangente à Γ en P.

Solution :

1. Soit $P = (x,y)$ un point tel que $d(P,F) = d(P,\mathcal{D})$. On a $d(P,F) = \sqrt{x^2 + (p/2-y)^2}$ et $d(P,\mathcal{D}) = |y + p/2|$. En élevant au carré on a $x^2 + (p/2-y)^2 = (p/2+y)^2 \Leftrightarrow x^2 = 2py$.

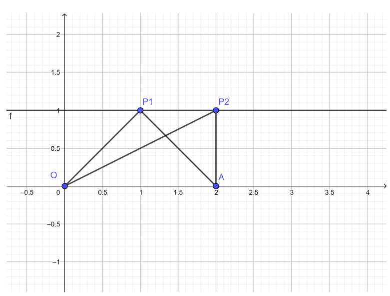
2. Soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer $F = (-1,2)$ et de directrice $\mathcal{D} : 3x - 4y + 1 = 0$. On a par définition
$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{A}^2 \,|\, d(P,F) = d(P,\mathcal{D})\}$$
Notons (x,y) les coordonnées de P, alors $d(P,F) = d(P,\mathcal{D}) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \dfrac{|3x-4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}$. Après avoir élever au carré, on trouve $d(P,F) = d(P,\mathcal{D}) \Leftrightarrow 25((x+1)^2 + (y-2)^2) = (3x-4y+1)^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 24xy + 44x + 9y^2 - 92y + 124 = 0$

3. On peut s'inspirer la première question. On commence par faire le changement de variable $X = y$ et $Y = x$ pour obtenir une équation de parabole $\mathcal{P} : x^2 = 4y$. Par la question 1, on se ramène à chercher p tel que $2p = 4$, donc $p = 2$. Sans oublier de refaire le changement de variable dans l'autre sens, on trouve que le foyer est $F = (p/2, 0) = (1, 0)$ et la directrice $\mathcal{D} : x = -1$.
   On considère la fonction $f(X) = X^2/4$, les formules vues au lycée vous permettent de trouver l'équation de la tangente $\mathcal{T}_a$ au graphe de f en a. On a $\mathcal{T}_a : Y = \frac{a}{2}(X - a) + \frac{a^2}{4}$, encore une fois, on refait le changement de variable dans l'autre sens et on trouve l'équation de la tangente à $\mathcal{P}$ en a donnée par $x - \frac{a}{2}y + \frac{a^2}{4} = 0$.

Exercice 13. Soient O l'origine du repère Oxy et A le point de coordonnées $(2, 0)$. Pour chaque point P appartenant à la droite d'équation $y = 1$, on considère le triangle $[OAP]$. Nous cherchons à savoir pour combien de tels points P le périmètre du triangle $[OAP]$ vaut 5.

1. Faire un dessin pour $P = (1, 1)$ et pour $P = (2, 1)$.
2. Soit $x > 0$. Soit $P = (1 + x, 1)$ et $P' = (1 - x, 1)$. Montrer que les périmètres de $[OAP]$ et de $[OAP']$ sont égaux.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction qui à chaque réel x associe le périmètre du triangle $[OAP]$ avec $P = (x, 1)$. Calculer $f(x)$.
4. Soit $g : x \mapsto f(x + 1)$. Montrer que g est une fonction paire puis calculer $g(0)$, $g(1)$ et les zéros de g'. Conclure.

Solution :

1. 

2. On peut remarquer que les triangles $[OAP]$ et $[0AP']$ sont symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D} : x = 1$ car P et P' (resp. O et A) le sont. Ainsi, leur périmètre sont égaux.

3. Soit $x > 0$. Alors, $f(x) = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| + \left\|\overrightarrow{AP}\right\| + \left\|\overrightarrow{OP}\right\|$.
   Comme $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} x - 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ alors,
$$f(x) = 2 + \sqrt{(x-2)^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1}$$

4. g est une fonction paire par la question 2. $g(0) = f(1) = 2 + 2\sqrt{2}$, $g(1) = f(2) = 3 + \sqrt{5}$.
   Trouvons maintenant les zéros de g' :
$$g'(x) = f'(x+1) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+1}} + \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$$
   Comme g' est impaire (car g est paire) alors on peut se concentrer sur les valeurs de $g'(x)$ pour $x \geq 0$ Si $0 < x < 1$ alors $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{(x-1)^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Comme

$(x+1)^2 > (x-1)^2$ alors g' est strictement positive sur $]0,1[$. Si $x > 1$ alors $x-1 > 0$ et $x+1 > 0$ et donc, $g'(x) > 0$ Comme $g'(1) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ alors on en déduit que g' est strictement positif sur $]0,\infty[$. Par imparité, elle est strictement négative sur $]-\infty,0[$. Ainsi, le seul zéro de g' est 0.

La fonction g est donc strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ et strictement croissante sur $[0,\infty[$. Comme $g(1) = g(-1) = 3+\sqrt{5} > 5$ alors, par le théorème des valeurs intermédiaires (et la stricte monotonie de g), il existe deuxa x tel que $g(x) = 5$. L'un est strictement négatif, l'autre est strictement positif.

Exercice 14. On considère un triangle $[ABC]$ quelconque. Sur ses côtés on construit, à l'extérieur du triangle, des triangles équilatéraux. Montrer que les centres de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Solution : Suivre la correction avec le dessin !!

Le point H (resp. I et J) est le centre de gravité/orthocentre du triangle équilatéral $[EGD]$ (resp. $[ABG]$, $[AFD]$). Comme le centre de gravité est l'intersection des médianes alors on a les égalités :

$$\widehat{IGA} = \widehat{GAI} = \widehat{DAJ} = \widehat{JDA} = \widehat{DHG} = \widehat{HGD} = \pi/6$$

On note T l'intersection de la médiane (qui est aussi une hauteur vu que $[ABG]$ est équilatéral) partant de B avec $[AG]$. Le triangle $[ITG]$ est donc rectangle et grâce aux relations trigonométriques, on montre que :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}GI = GT = \frac{1}{2}GA = \frac{1}{2}GB$$

Autrement dit, $\sqrt{3}GI = GB$

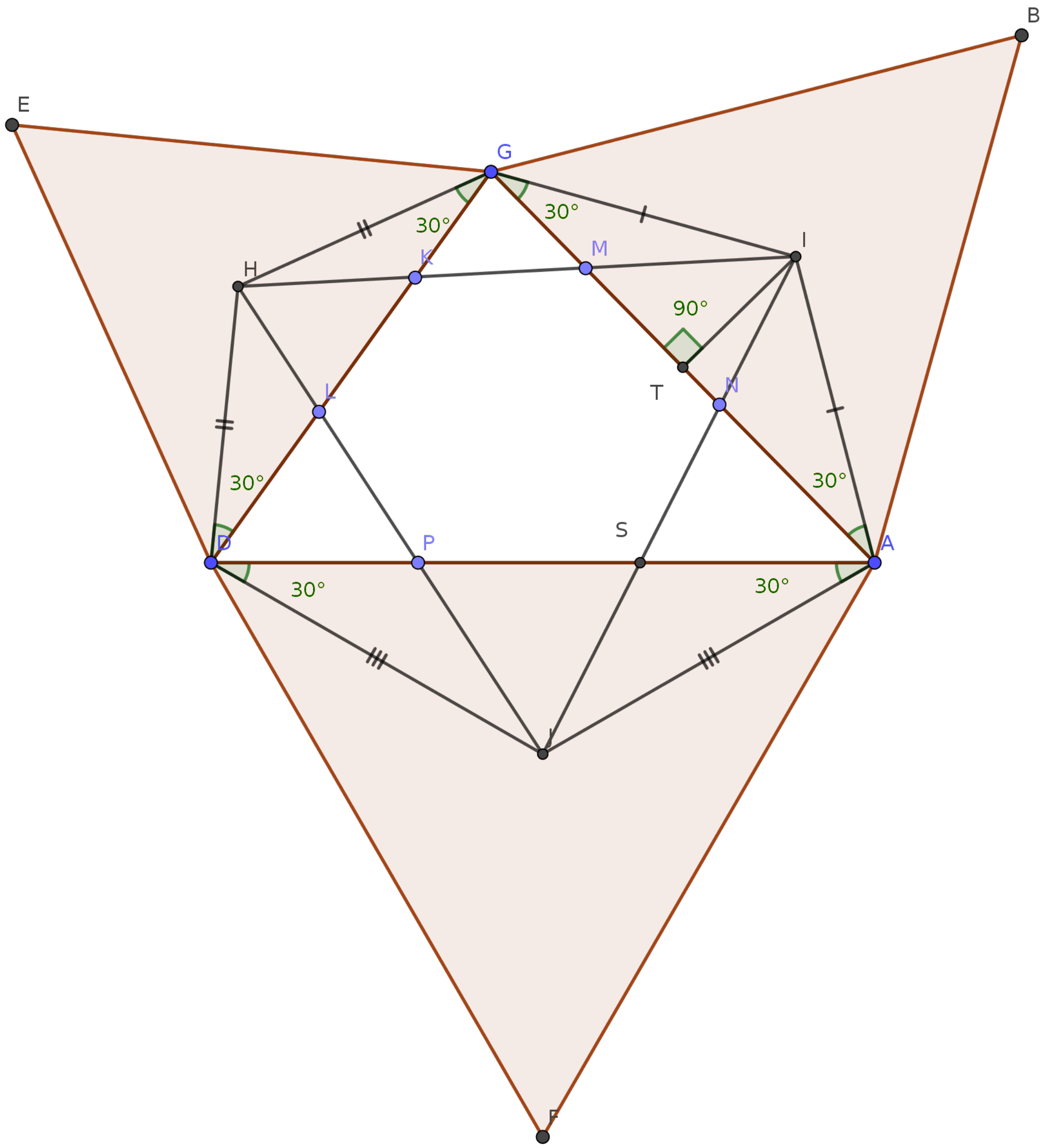
De la même façon, on montre que $\sqrt{3}GH = GD$.

De plus, les angles $\widehat{HGI}$ et $\widehat{DGB}$ sont égaux (car égal à $\pi/3 + \widehat{DGA}$). Cela montre que les deux triangles $[HGI]$ et $[DGB]$ sont semblables et donc $DB = \sqrt{3}HI$

En reprenant le même raisonnement dans les triangles $[DAB]$ et $[ABI]$, on montre que $DB = \sqrt{3}IJ$, ce qui montre que $HI = HJ$.

En refaisant le raisonnement ci-dessus mais en comparant avec AE, on montre que $JH = HI$.

Cela permet d'en déduire que le triangle $[HIJ]$ est équilatéral.



B
E
G
30°
30°
I
H
K
M
90°
T
N
L
30°
30°
D
P
S
A
30°
30°
J
F