

Espaces Complets

Antoine Boivin & Jean-Baptiste Campesato

Version du 18 septembre 2026

Table des matières

1	Espaces vectoriels normés	2
1.1	Espaces vectoriels normés	2
1.2	Topologie des espaces vectoriels normés	3
1.3	Continuité	5
1.4	Compacité	5
1.5	Comparaison de normes	6
1.6	Suites dans un espace vectoriel normé	7
1.7	Cas de la dimension finie	8
1.8	Quelques evn supplémentaires à connaître	9
2	Espaces de Banach	10
3	Théorème du point fixe de Banach–Picard	13
3.1	Applications au calcul différentiel	13
3.2	Autres exercices sur le théorème du point fixe de Banach–Picard	14
4	Lemme de Baire et conséquences	16

Les exercices dont l'image 📖 est dans la marge sont exigibles : les résultats des questions font partis du cours et sont à connaître.

Les espaces vectoriels considérés dans ce cours sont tous réels, i.e. le corps des scalaires est $\mathbb{R}$.

1 Espaces vectoriels normés

1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel.

On appelle *norme* sur E une fonction $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- (ii) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \implies x = 0$
- (iii) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*)

Définition 1.2. On appelle *espace vectoriel normé* un couple $(E, \| \cdot \|)$ où E est un espace vectoriel et $\| \cdot \|$ une norme sur E .

 **Exercice 1.3.** Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que $\|0\| = 0$.
2. Montrer que $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$.
3. Montrer que $\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$ (*inégalité triangulaire inversée*).

Exercice 1.4. Soient E un espace vectoriel et $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

- (i) $\forall x \in E \setminus \{0\}, N(x) > 0$
- (ii) $N(0) = 0$
- (iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in E, N(x + \lambda y) \leq N(x) + |\lambda| N(y)$

Montrer que N est une norme sur E .

 **Exercice 1.5.** Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

Montrer que la restriction de $\| \cdot \|$ à F est une norme sur F .

On parle de norme induite.

Exercice 1.6. Soient F un espace vectoriel et $(E, \| \cdot \|_E)$ un espace vectoriel normé.

Soit $\iota : F \rightarrow E$ une application linéaire injective.

Montrer que l'application $\| \cdot \| : F \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\|x\| := \|\iota(x)\|_E$ est une norme sur F .

 **Exercice 1.7.** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit $\| \cdot \|_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Montrer que $\| \cdot \|_1$ est une norme de $\mathbb{R}^n$.

 **Exercice 1.8.** Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p > 1$. On définit $\| \cdot \|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

1. On pose $q := \frac{p}{p-1}$ de sorte que $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer que $\forall a, b \geq 0, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

2. Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}$$

On pourra commencer par appliquer la question précédente à $a := \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $b := \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$.

Le cas $p = q = 2$ est appelé inégalité de Cauchy–Schwarz.

3. En déduire que $\| \cdot \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

La norme $\| \cdot \|_2$ s'appelle norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

 **Exercice 1.9.** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On définit $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

 **Exercice 1.10.** Soit X un ensemble. On considère E l'espace vectoriel des fonctions $X \rightarrow \mathbb{R}$ bornées.

On définit $\|\cdot\|_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$.

Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .

La norme $\|\cdot\|_\infty$ s'appelle norme de convergence uniforme puisque $(f_n)_n$ tend uniformément vers f si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0.

 **Exercice 1.11.** Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$.

On définit $\|\cdot\| : C^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

On pourra adapter les solutions de l'Exercice 1.8 en remplaçant $\sum$ par $\int$.

2. Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

1.2 Topologie des espaces vectoriels normés

Définition 1.12. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $a \in E$ et $r > 0$.

On appelle *boule ouverte centrée en a de rayon r* la partie

$$B(a, r) := \{x \in E : \|x - a\| < r\}$$

et *boule fermée centrée en a de rayon r* la partie

$$B_f(a, r) := \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}.$$

Exercice 1.13. Dessiner la boule fermée unité, i.e. centrée en 0 de rayon 1, pour $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Définition 1.14. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $S \subset E$ est *bornée* si

$$\exists M \geq 0, \forall x \in S, \|x\| \leq M.$$

Exercice 1.15. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $a \in E$ et $r \geq 0$.

Montrer que $B_f(a, r)$ est bornée.

Définition 1.16. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit que $U \subset E$ est *ouverte dans E* (ou *un ouvert de E*) si

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset U$$

et que $C \subset E$ est *fermée* (ou *un fermé*) si $E \setminus C$ est ouverte.

 **Exercice 1.17.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer que $\emptyset$ et E sont des ouverts.

2. Montrer qu'une union quelconque d'ouverts est un ouvert.

3. (a) Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

(b) Le résultat reste-t-il vrai pour une intersection quelconque?

4. Que peut-on dire concernant l'union et l'intersection de fermés?

5. Une partie peut-elle être ouverte et fermée?

6. Une partie peut-elle être ni ouverte ni fermée?

Définition 1.18. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
On définit l'intérieur de S par

$$\overset{\circ}{S} := \{x \in E : \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset S\},$$

l'adhérence de S par

$$\overline{S} := \{x \in E : \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset\}.$$

Exercice 1.19. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.

1. Montrer que $\overline{S^c} = (\overset{\circ}{S})^c$.
2. Montrer que $\overset{\circ}{S^c} = (\overline{S})^c$.

Exercice 1.20. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.

1. Montrer que $\overset{\circ}{S} \subset S \subset \overline{S}$.
2. (a) Montrer que $\overset{\circ}{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S .
(b) En déduire que S est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{S} = S$.
3. (a) Montrer que $\overline{S}$ est le plus petit fermé contenant S .
(b) En déduire que S est fermé si et seulement si $\overline{S} = S$.

Exercice 1.21. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Montrer les propriétés suivantes :

- | | |
|---|---|
| (i) $\forall S, T \subset E, S \subset T \implies \overline{S} \subset \overline{T}$ | (i') $\forall S, T \subset E, S \subset T \implies \overset{\circ}{S} \subset \overset{\circ}{T}$ |
| (ii) $\forall S \subset E, \overline{\overline{S}} = \overline{S}$ | (ii') $\forall S \subset E, \overset{\circ}{\overset{\circ}{S}} = \overset{\circ}{S}$ |
| (iii) $\forall S, T \subset E, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | (iii') $\forall S, T \subset E, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |
| (iv) $\forall S, T \subset E, \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ | (iv') $\forall S, T \subset E, \overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$ |

2. Que dire des réciproques de (iv) et (iv') ?

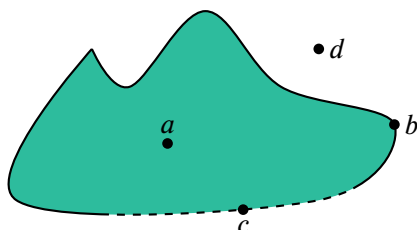
Définition 1.22. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
On dit que S est *dense* dans E si $\overline{S} = E$.

Exercice 1.23. Vous avez vu en analyse que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies (\exists q \in \mathbb{Q}, x < q < y)$.
En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Définition 1.24. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
On définit la *frontière* de S par $\partial S := \overline{S} \setminus \overset{\circ}{S}$.

Exercice 1.25. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.

1. (a) Montrer que $\overline{S} = S \cup \partial S$.
(b) En déduire que S est fermée si et seulement si $\partial S \subset S$.
2. (a) Montrer que $\overset{\circ}{S} \cap \partial S = \emptyset$.
(b) En déduire que S est ouverte si et seulement si $\partial S \cap S = \emptyset$.
3. (a) Montrer que $\partial S = \{x \in E : \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset \text{ et } B(x, \varepsilon) \cap S^c \neq \emptyset\}$.
(b) En déduire que $\partial S = \partial(S^c)$.
4. Montrer que ∂S est un fermé.



$a \in S$	$a \in \overset{\circ}{S}$	$a \in \overline{S}$	$a \notin \partial S$
$b \in S$	$b \notin \overset{\circ}{S}$	$b \in \overline{S}$	$b \in \partial S$
$c \notin S$	$c \notin \overset{\circ}{S}$	$c \in \overline{S}$	$c \in \partial S$
$d \notin S$	$d \notin \overset{\circ}{S}$	$d \notin \overline{S}$	$d \notin \partial S$

FIGURE : Représentation de l'intérieur, de l'adhérence et de la frontière.

1.3 Continuité

Définition 1.26. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $S \subset E$. On dit que $f : S \rightarrow F$ est *continue* si

$$\forall x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in S, \|x - y\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Exercice 1.27. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.

Montrer que l'application $\|\cdot\|_E : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est une application continue.

 **Exercice 1.28.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Soient $S \subset E$ et $f : S \rightarrow F$.

Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) f est continue
- (ii) Pour tout ouvert U de F , il existe un ouvert V de E tel que $f^{-1}(U) = V \cap S$
- (iii) Pour tout fermé C de F , il existe un fermé D de E tel que $f^{-1}(C) = D \cap S$

 **Exercice 1.29.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

- (i) f est continue;
- (ii) f est continue en 0;
- (iii) $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Exercice 1.30. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Soient $S \subset E$ et $f, g : S \rightarrow F$ deux fonctions continues.

On suppose qu'il existe $T \subset S$ tel que $S \subset \bar{T}$ et $f|_T = g|_T$.

Montrer que $f = g$.

1.4 Compacité

Définition 1.31. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$.

On dit que K est *compacte* (ou *un compact*) si de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e. si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ alors il existe $J \subset I$ finie telle que $K \subset \bigcup_{i \in J} O_i$.

 **Exercice 1.32.** Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact. Soit $S \subset K$.

Montrer que si S est fermée alors S est compacte.

 **Exercice 1.33.** Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact.

Montrer que K est borné.

Exercice 1.34. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact.

1. On fixe $x \in E \setminus K$.

(a) Montrer que pour tout $y \in K$, il existe $U_y, V_y \subset E$ deux ouverts tels que $x \in U_y, y \in V_y$ et $U_y \cap V_y = \emptyset$.

(b) Montrer qu'il existe une partie $A \subset K$ finie telle que $K \subset \bigcup_{y \in A} V_y$.

(c) On pose $\Omega := \bigcap_{y \in A} U_y$.

i. Montrer que Ω est un ouvert contenant x .

ii. Montrer que $\Omega \cap K = \emptyset$.

 2. Dédurre de la question précédente que K est fermé.

Exercice 1.35.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de compacts est compacte.

2. Montrer qu'une union finie de compacts est compacte.

3. Une union quelconque de compacts est-elle nécessairement compacte?

Exercice 1.36. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact.

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés telle que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \cap K \neq \emptyset$.

Montrer que $K \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Exercice 1.37. Les parties suivantes de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont-elles compactes ?

1. $\mathbb{Z}$
2. $[0, 1[$
3. $\{-42, \pi, 17\}$
4. $[e, 17] \cup]17, 42]$

 **Exercice 1.38.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Soient $S \subset E$ et $f : S \rightarrow F$ une fonction continue.

Montrer que si K est un compact de E alors $f(K)$ est compacte.

Exercice 1.39. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$ et $f : S \rightarrow F$ une application continue.

1. Si K est un compact de F , $f^{-1}(K)$ est-il nécessairement un compact de E ?
2. Montrer que c'est toujours le cas si S est compact.

Exercice 1.40. On considère $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

1. Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'ouverts telle que $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ où $a \leq b$.

Considérons l'ensemble A des $x \in [a, b]$ tels que $[a, x]$ admet un sous-recouvrement fini, i.e.

$$A := \left\{ x \in [a, b] : \exists \Lambda' \subset \Lambda \text{ finie telle que } [a, x] \subset \bigcup_{\lambda' \in \Lambda'} I_{\lambda'} \right\}.$$

- (a) Montrer que A admet une borne supérieure que l'on note $S := \sup(A)$.
- (b) Montrer que $\sup(A) = b$.

On pourra raisonner par l'absurde et utiliser que $S \in [a, b]$.

2. En déduire qu'un segment est compact.

1.5 Comparaison de normes

Définition 1.41. Soit E un espace vectoriel. Soient N et N' deux normes sur E .

On dit que N et N' sont *équivalentes* si

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$

Exercice 1.42.

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E .

 **Exercice 1.43.** Soit E un espace vectoriel. Montrer que deux normes N et N' sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie¹ sur E .

Exercice 1.44.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$.
3. En déduire que $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1.45. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$.

1. Montrer que $\forall x \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$.
2. Montrer que $\forall x \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.
3. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux non-équivalentes sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$.
Indice : pour $n \in \mathbb{N}$, on pourra considérer $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (x-a)^n$.

Exercice 1.46. On considère E l'espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on note

$$N(f) := \int_0^1 |f'(x)| dx \quad \text{et} \quad M(f) := \int_0^1 |f(x) + f'(x)| dx.$$

¹i.e. une partie est ouverte pour N si et seulement si elle est ouverte pour N' .

1. Montrer que N et M sont deux normes sur E .
2. Montrer que N et M sont équivalentes.

Indice : on pourra remarquer que la dérivée de la fonction $x \mapsto e^x f(x)$ est $x \mapsto e^x(f(x) + f'(x))$ et utiliser le théorème fondamental de l'analyse.

1.6 Suites dans un espace vectoriel normé

Définition 1.47. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.

Soient $(x_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de E et $\ell \in E$.

On dit que $(x_n)_n$ tend vers ℓ , ou que $(x_n)_n$ admet ℓ pour limite, noté $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \geq N \implies \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.48. Une suite est *convergente* si elle admet une limite.

Exercice 1.49. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.

Soient $(x_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de E et $\ell_1, \ell_2 \in E$.

Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell_2$ alors $\ell_1 = \ell_2$.

 **Exercice 1.50.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.

1. Montrer que toute suite convergente d'éléments de S converge vers un élément de $\overline{S}$.
2. En déduire que S est fermée si et seulement si pour toute suite convergente d'éléments de S , la limite est dans S , i.e.

$$\forall (x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}, \left(\exists \ell \in E, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \ell \right) \implies \ell \in S.$$

Définition 1.51. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de E .

On appelle *sous-suite* (ou *suite extraite*) de $(x_n)_{n \geq n_0}$ toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n \geq n_0}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

 **Exercice 1.52.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.

Soit $(x_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de E convergeant vers ℓ .

Montrer que si $(x_{\varphi(n)})_{n \geq n_0}$ est une suite extraite de $(x_n)_{n \geq n_0}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = \ell$.

Exercice 1.53. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact.

Soit $(x_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'éléments de K .

1. On définit $F_p := \overline{\{x_n : n \geq p\}}$ pour $p \geq n_0$.
Montrer que F_p est une suite décroissante de fermés.

2. Montrer que $K \cap \bigcap_{p \geq n_0} F_p \neq \emptyset$.

Indice : on pourra utiliser l'Exercice 1.36.

3. On considère $\ell \in K \cap \bigcap_{p \geq n_0} F_p$.

Montrer que l'on peut extraire de $(x_n)_{n \geq n_0}$ une sous-suite convergeant vers ℓ .

Exercice 1.54. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.

On suppose que de toute suite d'éléments de S on peut extraire une sous-suite convergente dans S .

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. On suppose que S est fermé et que $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts telle que $S \subset \bigcup_{i \in I} O_i$.

Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $\forall x \in S, \exists i \in I, B(x, \rho) \subset O_i$.

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0, x_1, \dots, x_s \in S$ tel que $S \subset \bigcup_{n=0}^s B(x_n, \varepsilon)$.

Indice : on pourra raisonner par l'absurde afin de construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S deux à deux distants d'au moins ε telle que $S \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_n, \varepsilon)$.

-  **Exercice 1.55.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
Montrer que S est compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de S on peut extraire une sous-suite convergente dans S .
-  **Exercice 1.56.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.
Soient $S \subset E$, $a \in S$ et $f : S \rightarrow F$.
Montrer que f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a , $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.
-  **Exercice 1.57.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.
Soient $K \subset E$ un compact et $f : K \rightarrow F$ une fonction continue.
Montrer que si f est continue alors f est uniformément continue, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in K, \|x - y\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

1.7 Cas de la dimension finie

Exercice 1.58.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, $[-a, a]^n$ est un compact de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\infty})$.
2. En déduire que les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\infty})$ sont les fermés bornés.

-  **Exercice 1.59.** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

On fixe $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et on considère $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ définie par $\varphi(x) := \sum_{k=1}^n x_k e_k$.

1. Montrer que φ est un isomorphisme linéaire.
2. On rappelle que $\|\cdot\|_E$ induit une norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par $\|\cdot\| := \|\varphi(\cdot)\|_E$ (Exercice 1.6) et que $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (Exercice 1.27).
 - (a) Montrer que $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{\infty} = 1\}$ est compact.
 - (b) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x \in S, \alpha \leq \|x\| \leq \beta$.
 - (c) En déduire que $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\|\cdot\|$ sont deux normes équivalentes de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que toutes les normes sur E sont équivalentes.
4. Montrer que les compacts de E sont les fermés bornés.

-  **Exercice 1.60.** Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés avec E de dimension finie.
Montrer que toutes les applications linéaires $E \rightarrow F$ sont continues.

-  **Exercice 1.61.** Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E .

Exercice 1.62. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie. On suppose que $B_f(0, 1)$ est compacte.

1. Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que $B_f(0, 1) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1)$.
2. On définit $F := \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in E \setminus F$.
3. Montrer qu'il existe $y_0 \in F$ tel que $\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in F} \|x_0 - y\|$.
4. On définit $x := \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$.
Montrer que $\inf_{y \in F} \|x - y\| = 1$.
5. Montrer qu'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $d(x, x_i) < 1$.
6. Conclure de ce qui précède qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte (*lemme de Riesz*).

1.8 Quelques evn supplémentaires à connaître

Exercice 1.63. Montrer que les couples $(E, \|\cdot\|)$ suivants sont des espaces vectoriels normés :

1. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\|\cdot\|_m : \sum a_i X^i \mapsto \sum |a_i| m^i$ où $m \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. $E = \mathbb{R}\{x\}_\rho$ l'espace vectoriel des séries entières de rayon de convergence $\geq \rho$ et

$$\|\cdot\|_m : \sum_{i \geq 0} a_i x^i \mapsto \sum_{i \geq 0} |a_i| m^i$$

où $m, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$ et $m < \rho$.

3. $E = \text{Lip}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes sur $[a, b]$, où $a < b$, et

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

4. $E = \ell^p := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ et $\|(x_n)_n\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$ où $p \in [1, \infty[$.

5. $E = \ell^\infty := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \text{ bornée}\}$ et $\|(x_n)_n\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

6. $E = C^0([a, b], F)$ l'espace vectoriel des fonctions $[a, b] \rightarrow F$ continues $\|f\| := \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|_F$ où $a < b$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé.

7. $E = B(X, F)$ l'espace vectoriel des fonctions $X \rightarrow F$ bornées et $\|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_F$ où X est un ensemble et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé.

8. $E = \mathcal{L}_c(G, F)$ l'espace vectoriel des fonctions linéaires continues et $\|L\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_G}$ où $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sont des espaces vectoriels normés.

Exercice 1.64.

1. Soient $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces vectoriels normés. Montrer que $(E := E_1 \times \dots \times E_n, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, où $\|(u_1, \dots, u_n)\| := \max_{i=1, \dots, n} (\|u_i\|_i)$.
2. Soit $(E_i, \|\cdot\|_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels normés. Montrer que l'espace vectoriel

$$E := \left\{ (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i : \sup_{i \in I} \|f_i\|_i < \infty \right\}$$

muni de l'application

$$\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (f_i)_{i \in I} & \mapsto & \sup_{i \in I} \|f_i\|_i \end{array}$$

est un espace vectoriel normé.

Exercice 1.65. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E . Montrer que l'espace vectoriel E/F muni de l'application

$$\|\cdot\|_{E/F} : \begin{array}{ccc} E/F & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \bar{x} & \mapsto & \inf_{u \in \bar{x}} \|u\| \end{array}$$

est un espace vectoriel normé.

2 Espaces de Banach

Définition 2.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de E est de *Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$

 **Exercice 2.2.** Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de Cauchy de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E .
2. Montrer que $(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E .
3. Montrer que $(\|x_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$.

 **Exercice 2.3.** Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.

 **Exercice 2.4.** Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

 **Exercice 2.5.** Montrer qu'une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

Exercice 2.6. Soit E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

Montrer que $(x_n)_n$ est de Cauchy pour $\|\cdot\|$ si et seulement si c'est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|'$.

Exercice 2.7. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés.

Soient $f : E \rightarrow F$ une application uniformément continue et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

Montrer que si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy de E alors $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy de F .

Exercice 2.8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de E .

On suppose que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

Montrer que $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Définition 2.9. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.

On dit que A est *complet* si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A .

 **Exercice 2.10.** Montrer qu'une partie complète d'un espace vectoriel normé est fermée

 **Exercice 2.11.** Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset B \subset E$.

On suppose que A est fermé et que B est complet. Montrer que A est complet.

 **Exercice 2.12.** Montrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est complète.

Définition 2.13. Un *espace de Banach* est un espace vectoriel normé complet.

 **Exercice 2.14.** Montrer qu'un espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

On pourra utiliser les exercices 2.3, 1.55 et 2.5.

En particulier, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}$, sont des espaces complets (quelque soit la norme considérée).

Exercice 2.15. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $A \subset E$.

Montrer que A est fermé si et seulement si A est complet.

Exercice 2.16. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés avec F complet. Soit X une partie dense de E et $f : X \rightarrow F$ une application uniformément continue.

1. Montrer que f se prolonge de façon unique en une application continue $\bar{f} : E \rightarrow F$.
2. Montrer que $\bar{f}$ est uniformément continue.

Exercice 2.17.

- Montrer que les espaces vectoriels normés des questions suivantes sont complets : 1.63.(2), 1.63.(3), 1.63.(4), 1.63.(5), 1.63.(6) (où $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet), 1.63.(7) (où $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet), 1.63.(8) (où $(F, \|\cdot\|_F)$ est complet).
- En considérant la famille de polynômes $\left(P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{p^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $p \in \mathbb{R}_{>0}$ fixé, montrer que l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_m)$ (c.f. 1.63.(1)) n'est pas complet pour $m < p$.
On pourra commencer par montrer que si une suite de polynômes converge vers un polynôme alors les suites de coefficients convergent.
- Considérons maintenant l'espace vectoriel normé $(C^0([-1, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$.
Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in [-1, 1], f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

- Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy.
- Supposons que cette suite converge vers une fonction f .
 - Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) - f(t)| dt = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^1 |f_n(t) - f(t)| dt = 0$$

- Montrer que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{-\alpha} |f_n(t) + 1| dt = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^1 |f_n(t) - 1| dt = 0$$

- En déduire que, pour tout $t \in]0, 1]$, $f(t) = 1$ et pour $t \in [-1, 0[$, $f(t) = -1$.

- Conclure.

- Montrer que si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ sont deux espaces de Banach alors $(E \times F, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach pour la norme $\|(x, y)\| := \max(\|x\|_E, \|y\|_F)$.
- Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel fermé de E .
Montrer que l'espace vectoriel normé E/F est complet pour la norme de l'Exercice 1.65.

Exercice 2.18. L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'un espace vectoriel normé est complet si et seulement toute série absolument convergente est convergente.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$ est convergente (dans $\mathbb{R}$).

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente (dans E).

- On suppose que toute série absolument convergente de $(E, \|\cdot\|)$ est convergente.
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E .
 - Montrer que l'on peut extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_{\sigma(n+1)} - u_{\sigma(n)}\| \leq 2^{-n}.$$

- Montrer que $(u_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Conclure.

Exercice 2.19. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension dénombrable. On fixe $\mathcal{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ une base de E .

On note $F_0 = \{0\}$ et, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $F_n := \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

On considère la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ définie par $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ et, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_{n+1} := \frac{1}{3} \inf_{x \in F_{n-1}} \left\| \frac{\lambda_n}{\|e_n\|} e_n - x \right\|$.

1. Justifier que $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est bien définie.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_n > 0$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_{n+1} \leq \frac{\lambda_n}{3}$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_n \leq 3^{-n}$.
5. On suppose par l'absurde que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

(a) Montrer qu'il existe $\ell \in E$ tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{\|e_n\|} e_n = \ell$.

(b) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{\|e_n\|} e_n \in F_N$.

(c) Montrer que $3\lambda_{N+2} \leq \frac{3}{2}\lambda_{N+2}$.

6. Conclure qu'un espace vectoriel normé de dimension dénombrable n'est jamais complet.
7. En déduire une nouvelle démonstration pour la question 2.17.(2).

Exercice 2.20. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

- (i) $f_n(x) = 0$ pour $x \in [0, 1] \setminus \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right]$
- (ii) f_n est affine par morceaux sur les intervalles $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+2}} \right]$ et $\left[\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n} \right]$
- (iii) $f_n\left(\frac{3}{2^{n+2}}\right) = n$

1. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est absolument convergente et divergente pour la norme $\|\cdot\|_1$.
2. Que peut-on en déduire sur $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$?

Exercice 2.21. Soient E un espace vectoriel et N une application $E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

- (i) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$;
- (ii) $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

On dit que N est une *semi-norme*.

1. Montrer que $N^{-1}(0)$ est un sous-espace vectoriel.
2. Montrer que l'application $\|\cdot\| : E/N^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\|\bar{u}\| := N(u)$, pour n'importe quel représentant u de la classe d'équivalence $\bar{u}$, est bien définie et est une norme sur l'espace vectoriel quotient $E/N^{-1}(0)$.
3. (a) Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \geq 1$. Notons $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $|f|^p$ soit intégrable. Montrer que l'application

$$N : f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \mapsto \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \in \mathbb{R}$$

est une semi-norme mais n'est pas une norme. Montrer que $L^p(X, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)/N^{-1}(0)$ est un espace de Banach.

- (b) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Notons $\text{Cauchy}(E)$ l'espace vectoriel des suites de Cauchy de E et N l'application $\text{Cauchy}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N((x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$. Montrer que N est une semi-norme et pas une norme, $\hat{E} := \text{Cauchy}(E)/N^{-1}(0)$ est un espace de Banach et que l'application

$$E \xrightarrow{u \mapsto (u)_{n \in \mathbb{N}}} \text{Cauchy}(E) \xrightarrow{(u_n) \mapsto \overline{(u_n)}} \hat{E}$$

est une injection dont l'image est dense.

3 Théorème du point fixe de Banach–Picard

 **Exercice 3.1.** Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $F \subset E$ une partie fermée.

Soit $f : F \rightarrow F$ une fonction contractante (i.e. une fonction lipschitzienne de constante $q \in [0, 1[$, autrement dit on suppose qu'il existe $q \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in F, \|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|$).

1. Montrer que f est continue.

Soit $x_0 \in F$. On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ en posant $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{n+1} - x_n\| \leq q^n \|x_1 - x_0\|$.

3. Montrer que $\forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \implies \|x_m - x_n\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|$.

4. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

5. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F .

6. Montrer que f admet un unique point fixe, i.e. $\exists! x \in F, f(x) = x$.

On vient de montrer :

 **Théorème 3.2** (Théorème du point fixe de Banach–Picard).

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $F \subset E$ une partie fermée. Alors toute fonction contractante $f : F \rightarrow F$ admet un unique point fixe.

3.1 Applications au calcul différentiel

Exercice 3.3. On considère $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ munis de leurs normes euclidiennes que l'on notera indifféremment $\|\cdot\|$.

1. (a) Montrer que $\|A\| := \sup_{\|v\| \leq 1} \|Av\|$ définit une norme sur $M_{p,n}(\mathbb{R})$ (appelée *norme subordonnée*).

(b) Montrer que $\forall A \in M_{p,n}(\mathbb{R}), \forall v \in \mathbb{R}^n, \|Av\| \leq \|A\| \|v\|$.

2. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1 .

Pour $x \in U$, on note la matrice jacobienne de $f = (f_1, \dots, f_p)$ en x par

$$\text{Jac}_f(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, n}} \in M_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Soient $a, b \in U$ tels que $\forall t \in [0, 1], (1-t)a + tb \in U$.

(a) Montrer que $f(b) - f(a) = \int_0^1 \text{Jac}_f((1-t)a + tb)(b-a) dt$ où l'intégrale est calculée composante par composante.

(b) Montrer que si $g = (g_1, \dots, g_p) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^p$ est continue alors

$$\left\| \left(\int_0^1 g_1(t) dt, \dots, \int_0^1 g_p(t) dt \right) \right\| \leq \int_0^1 \|g_1(t), \dots, g_p(t)\| dt.$$

(c) En déduire que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \left(\sup_{t \in [0,1]} \|\text{Jac}_f((1-t)a + tb)\| \right) \|b - a\|.$$

Exercice 3.4. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne que l'on note $\|\cdot\|$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $\text{Jac}_f(0) = I_n$.

1. Montrer qu'il existe $t > 0$ tel que $B(0, t) \subset U$ et $\forall x \in B(0, t), \det(\text{Jac}_f(x)) \neq 0$.

2. On définit $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $F(x) = f(x) - x$.

(a) Calculer $\text{Jac}_F(0)$.

(b) Montrer qu'il existe $r \in]0, t[$ tel que $\forall x \in B(0, r), \|\text{Jac}_F(x)\| \leq \frac{1}{2}$.

(c) Montrer qu'il existe $s \in]0, r[$ tel que

$$\forall x, y \in B_f(0, s), \|F(x) - F(y)\| \leq \left(\sup_{z \in B_f(0, s)} \|\text{Jac}_F(z)\| \right) \|x - y\|$$

(d) Montrer que $\forall x, y \in B_f(0, s), \|F(x) - F(y)\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|$.

3. Soit $y \in B\left(0, \frac{s}{2}\right)$. Définissons $\theta_y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $\theta_y(x) = y - F(x)$.
 - (a) Montrer que $\theta_y(B_f(0, s)) \subset B(0, s)$.
 - (b) Montrer que $\theta_y : B_f(0, s) \rightarrow B_f(0, s)$ est contractante de constante $\frac{1}{2}$.
 - (c) Posons $V := B(0, s) \cap f^{-1}\left(B\left(0, \frac{s}{2}\right)\right)$ et $W = B\left(0, \frac{s}{2}\right)$.
Montrer que $f : V \rightarrow W$ définit une bijection entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ contenant 0.
4.
 - (a) Montrer que $f^{-1} : W \rightarrow V$ est lipschitzienne de constante 2.
 - (b) Montrer que $f^{-1} : W \rightarrow V$ est différentiable.
 - (c) Montrer que $f^{-1} : W \rightarrow V$ est C^1 .

On rappelle les énoncés du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites :

Théorème 3.5 (Théorème d'inversion locale).

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 et $a \in U$ tels que $\text{Jac}_f(a)$ soit inversible.

Alors il existe deux ouverts $V, W \subset \mathbb{R}^n$ tels que $a \in V \subset U$, $f(a) \in W$, $f(V) = W$ et $f|_V : V \rightarrow W$ est un C^1 -difféomorphisme.

Théorème 3.6 (Théorème des fonctions implicites).

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ deux ouverts, $(x_0, y_0) \in U \times V$ et $F = (F_1, \dots, F_p) : \begin{matrix} U \times V & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ (x, y) & \mapsto & F(x, y) \end{matrix}$ une

fonction de classe C^1 tels que $\text{Jac}_F^y(x_0, y_0) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x_0, y_0) \right)_{i,j=1,\dots,p} \in M_{p,p}(\mathbb{R})$ soit inversible.

Alors il existe $r, s > 0$ tels que $B(x_0, r) \subset U$, $B(y_0, s) \subset V$ et il existe $\varphi : B(x_0, r) \rightarrow B(y_0, s)$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\forall (x, y) \in B(x_0, r) \times B(y_0, s), F(x, y) = F(x_0, y_0) \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

Exercice 3.7.

1. Dédurre le théorème d'inversion locale de l'exercice 3.4.
2. Dédurre le théorème des fonctions implicites du théorème d'inversion locale.

3.2 Autres exercices sur le théorème du point fixe de Banach–Picard

Exercice 3.8. Montrer qu'il existe une unique solution au système suivant :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} (2 \sin(x_1) + \cos(x_2)) \\ x_2 = \frac{1}{5} (\cos(x_1) + 3 \sin(x_2)) \end{cases}$$

avec $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 3.9. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, S une partie d'un espace vectoriel normé et $F : E \times S \rightarrow E$ une fonction continue telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall s \in S, \forall x, y \in E, \|F(x, s) - F(y, s)\| \leq k\|x - y\|$$

Montrer que pour tout $s \in S$, l'application $x \mapsto F(x, s)$ admet un unique point fixe x_s et que l'application $s \mapsto x_s$ est continue.

Exercice 3.10. Soient E un espace de Banach et $f : E \rightarrow E$ une application dont une itérée est contractante (i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = f \circ \dots \circ f$ soit contractante). Montrer que f a un unique point fixe x_0 et que pour tout $x \in E$, la suite $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x_0 .

Exercice 3.11. Soit E l'espace vectoriel $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que E est complet.
2. On considère l'application $T: E \rightarrow E$ définie par

$$\forall f \in E, T(f) : [0, 1] \ni x \mapsto 1 + \int_0^x f(t - t^2) dt \in \mathbb{R}$$

- (a) Justifier que T est bien définie.
- (b) Montrer que T^2 est une contraction.
- (c) En déduire que T a un unique point fixe puis qu'il existe une unique solution à l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} y'(t) = y(t - t^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

4 Lemme de Baire et conséquences

TODO