

Cours : Fonctions à deux variables

Antoine Boivin

12 avril 2026

1 Continuité

Cette section étend la notion de continuité à des fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pour remplacer la valeur absolue qu'on utilise pour \mathbb{R} , on va considérer la fonction suivante :

$$\|\cdot\| : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \max(|x|, |y|) \in \mathbb{R}.$$

qu'on appellera « norme » (de \mathbb{R}^2). On la note habituellement $\|\cdot\|_\infty$ et on l'appelle « norme infinie ».

Dans toute la suite, on écrira \mathbb{R}^2 pour l'espace vectoriel (usuel) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et plus généralement \mathbb{R}^m ou \mathbb{R}^n pour l'espace vectoriel (usuel).

1.1 Topologie de \mathbb{R}^2

Proposition 1.1.1.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^2, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^2, \|x\| = 0 \implies x = 0$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

Démonstration. 1) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors comme $|\lambda x_i| = |\lambda| |x_i|$ pour $i \in \{1, 2\}$ et que la multiplication par un réel positif conserve l'ordre, on obtient bien $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

2) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $\|x\| = 0$. Alors, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$0 \leq |x_i| \leq \max(|x_1|, |x_2|) = \|x\| = 0$$

et donc $|x_i| = 0$ et $x_i = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Donc $x = 0$.

3) Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$|x_i + y_i| \stackrel{\text{IT dans } \mathbb{R}}{\leq} |x_i| + |y_i| \leq \underbrace{\|x\| + \|y\|}_{\text{ne dépend pas de } i}.$$

et donc

$$\|x + y\| = \max(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|) \leq \|x\| + \|y\|.$$

□

Remarque 1.1.2. On dit que le couple $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Remarque 1.1.3. Pour généraliser la valeur absolue, on aurait pu utiliser n'importe quelle fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant ces propriétés. Ces fonctions sont appelés « normes » sur \mathbb{R}^2 . Tous les résultats fonctionnent de la même façon avec n'importe quel autre choix de norme. Les exercices 1.1.4 et 1.1.6 présentent les normes usuelles sur \mathbb{R}^2 . On utilisera l'exercice 1.1.4 dans la section ??

 **Exercice 1.1.4.** Montrer que la fonction

$$\|\cdot\|_2: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}.$$

est une norme de \mathbb{R}^2 .

Indication : On pourra montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |\langle x, y \rangle| := |x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \quad (1)$$

en considérant la fonction polynomiale $t \mapsto \|x + ty\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|_2^2$ avec $x, y \in \mathbb{R}^2$ fixés.

Remarque 1.1.5. On pourra aussi montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si les deux vecteurs sont colinéaires.

Exercice 1.1.6. 1. Soit $p \geq 1$. Montrer que les fonctions

$$\|\cdot\|_p: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}.$$

sont des normes de \mathbb{R}^2 .

Indication : On pourra montrer que pour $p, q \geq 1$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

on a :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

puis l'inégalité de Hölder :

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1 y_1 + x_2 y_2| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\|x\| \leq \|x\|_p \leq 2^{1/p} \|x\|$$

et en déduire

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|.$$

Corollaire 1.1.7 (inégalité triangulaire inversée). $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$. En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient les deux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \|x\| \leq \|y + (x - y)\| \stackrel{IT}{\leq} \|y\| + \|x - y\| \\ \|y\| \leq \|x + (y - x)\| \stackrel{IT}{\leq} \|x\| + \|y - x\| = \|x\| + \|x - y\| \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \\ \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|) \leq \|x - y\|.$$


□


Définition 1.1.8 (Boule). Soient $a \in E$ et $r > 0$.
On appelle *boule ouverte centrée en a de rayon r* la partie

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| < r\}$$

et *boule fermée centrée en a de rayon r* la partie

$$B_f(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| \leq r\}.$$

 **Exercice 1.1.9.** Dessiner la boule unité $B(0, 1)$.

 **Exercice 1.1.10.** Soient $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrer que

$$B(a, r) =]a_1 - r, a_1 + r[\times]a_2 - r, a_2 + r[$$

et


$$B_f(a, r) = [a_1 - r, a_1 + r] \times [a_2 - r, a_2 + r].$$


Définition 1.1.11. On dit que la partie $U \subset \mathbb{R}^2$ est *ouverte dans \mathbb{R}^2* (ou *un ouvert de \mathbb{R}^2*) si


$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset U$$

et que $C \subset \mathbb{R}^2$ est *fermée dans \mathbb{R}^2* (ou *un fermé de \mathbb{R}^2*) si $\mathbb{R}^2 \setminus C$ est ouverte dans \mathbb{R}^2 .

Remarque 1.1.12. Dans la suite, on omettra « de \mathbb{R}^2 » car cela sera implicite.

 **Exercice 1.1.13.** Montrer qu'un singleton est fermé mais n'est pas ouvert.

 **Exercice 1.1.14.** Montrer qu'une boule ouverte est ouverte et qu'une boule fermée est fermée (d'où la terminologie).

 **Exercice 1.1.15.** Montrer que $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert et $D_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ est fermé.

Proposition 1.1.16.

1. L'ensemble vide \emptyset et \mathbb{R}^2 sont ouverts et fermés.
2. L'union quelconque d'ouverts est ouverte.
3. L'intersection finie d'ouverts est ouverte.
4. L'intersection quelconque de fermés est fermée.
5. L'union finie de fermés est fermée.

Démonstration. 1) L'ensemble \emptyset est trivialement ouvert. Et pour $x \in \mathbb{R}^2$, $B(x, 1) \subset \mathbb{R}^2$ par définition et donc \mathbb{R}^2 est ouvert. Par passage au complémentaire, \mathbb{R}^2 et \emptyset sont aussi fermés.

2) Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts. Montrons que $\bigcup_{i \in I} U_i$ est ouvert.

Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Fixons $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$ (qui existe car U_{i_0} est ouvert). Alors $B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

3) Soient U_1, \dots, U_n des ouverts. Montrons que $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est ouvert.

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. Comme $x \in U_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et que les U_i sont ouverts pour tout i alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists \varepsilon_i > 0, B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$$

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, fixons un tel ε_i . Posons $\varepsilon := \min(\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n) > 0$. Alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$$

et donc $B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$.

4)5) découlent de 2) et 3) par passage au complémentaire. □

Remarque 1.1.17. L'intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement ouverte et l'union quelconque de fermés n'est pas nécessairement fermée.

Exercice 1.1.18. — Montrer que $\bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ est ouvert pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mais que $\bigcap_{n \geq 1} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ ne l'est pas.

— Montrer que $\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mais que $\bigcup_{n \geq 1} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$ ne l'est pas.

Définition 1.1.19. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$.


On définit l'intérieur de S par

$$\overset{\circ}{S} := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset S \right\},$$


l'adhérence de S par

$$\bar{S} := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset \right\}.$$

Définition 1.1.20. On dit que S est *dense dans* E si $\bar{S} = E$

 **Exercice 1.1.21.** Soient $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrer les égalités suivantes :

- $\overset{\circ}{B_f(a, r)} = B(a, r)$;
- $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$.

 **Exercice 1.1.22.** Montrer que l'adhérence de $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et que l'intérieur de $D_f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ est D .

Proposition 1.1.23. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$.

On a les égalités suivantes :

1. $\overline{S^c} = (\overset{\circ}{S})^c$;
2. $\overset{\circ}{S^c} = (\bar{S})^c$.

Démonstration. Nous allons montrer que $(\overline{S^c})^c = \overset{\circ}{S}$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- i) $x \in (\overline{S^c})^c$;
- ii) $x \notin \overline{S^c}$;
- iii) $\neg(\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S^c \neq \emptyset)$;
- iv) $\exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S^c = \emptyset$;
- v) $\exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset S$;
- vi) $x \in \overset{\circ}{S}$.

iii) équivaut à iv) vient du fait ensembliste suivant¹ : $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$.

On déduit de ces équivalences que $(\overline{S^c})^c = \overset{\circ}{S}$. En utilisant cette égalité avec S^c , on obtient :


$$\bar{S} = \left(\overset{\circ}{S^c} \right)^c$$

et donc par passage au complémentaire


$$\bar{S}^c = \overset{\circ}{S}$$

et donc 2). □

1. \Rightarrow : $A \cap B \subset B^c \cap B = \emptyset$ et donc $A \cap B = \emptyset$ et \Leftarrow : si $A \cap B = \emptyset$ alors si $x \in A$, x ne peut pas être dans B car sinon $x \in A \cap B = \emptyset$ et donc $x \in B^c$.

 **Exercice 1.1.24.** Soit $S \subset \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\overset{\circ}{S} \subset S \subset \bar{S}$.
2. (a) Montrer que $\overset{\circ}{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S .
(b) En déduire que S est un ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{S} = S$.
3. (a) Montrer que \bar{S} est le plus petit fermé contenant S .
(b) En déduire que S est fermé si et seulement si $\bar{S} = S$.

 **Exercice 1.1.25.**

1. Montrer les propriétés suivantes :

i) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2, S \subset T \implies \bar{S} \subset \bar{T}$	i') $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2, S \subset T \implies \overset{\circ}{S} \subset \overset{\circ}{T}$
ii) $\forall S \subset \mathbb{R}^2, \bar{\bar{S}} = \bar{S}$	ii') $\forall S \subset \mathbb{R}^2, \overset{\circ}{\overset{\circ}{S}} = \overset{\circ}{S}$
iii) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2, \overline{S \cup T} = \bar{S} \cup \bar{T}$	iii') $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2, \widehat{S \cap T} = \overset{\circ}{S} \cap \overset{\circ}{T}$
iv) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2, \overline{S \cap T} \subset \bar{S} \cap \bar{T}$	iv') $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2, \widehat{S \cup T} \supset \overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{T}$
2. Que dire des inclusions réciproques de iv) et iv') ?

1.2 Suites dans \mathbb{R}^2

Définition 1.2.1. Une *suite dans \mathbb{R}^2* est une fonction $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^2$. On écrit u_n au lieu de $u(n)$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On notera $(u_n^{(1)})$ et $(u_n^{(2)})$ les suites de \mathbb{R} telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (u_n^{(1)}, u_n^{(2)}).$$

Ce sont les composées de u avec les deux projections $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$.

Définition 1.2.2. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$. Une *suite d'éléments de S* , ou dans S , est une suite (u_n) de \mathbb{R}^2 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in S.$$

Si $S = \mathbb{R}^2$, on omettra « de \mathbb{R}^2 ».

Définition 1.2.3. Soit (u_n) une suite et soit $\ell \in \mathbb{R}^2$. On dit que (u_n) *admet ℓ comme limite* ou *converge vers ℓ* ou *tend vers ℓ* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on utilisera indifféremment les notations suivantes $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, $\lim u_n = \ell$ ou $u_n \rightarrow \ell$.

Proposition 1.2.4. Soient (u_n) une suite de \mathbb{R}^2 et $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u_n \rightarrow \ell$;
2. $\|u_n - \ell\| \rightarrow 0$;
3. $|u_n^{(i)} - \ell_i| \rightarrow 0, i \in \{1, 2\}$;
4. $u_n^{(i)} \rightarrow \ell_i, i \in \{1, 2\}$.

Démonstration. Les équivalences 1) \Leftrightarrow 2) et 3) \Leftrightarrow 4) viennent du fait que les définitions quantifiées sont identiques (car $\|u_n - \ell\| = \|\|u_n - \ell\| - 0\|$ et $|u_n^{(i)} - \ell_i| = \|\|u_n^{(i)} - \ell_i\| - 0\|$ pour tout n).

Montrons maintenant l'équivalence 2) \Leftrightarrow 3)

Supposons 2). Soit $i \in \{1, 2\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n^{(i)} - \ell_i| \leq \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

On en déduit donc que $|u_n^{(i)} - \ell_i| \rightarrow 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Réciproquement, supposons que $|u_n^{(i)} - \ell_i| \rightarrow 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_n^{(1)} - \ell_1| < \varepsilon$$

et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |u_n^{(2)} - \ell_2| < \varepsilon.$$

On en déduit que pour $n \geq \max(N_1, N_2)$,

$$\|u_n - \ell\| = \max(|u_n^{(1)} - \ell_1|, |u_n^{(2)} - \ell_2|) < \varepsilon.$$

et donc $\|u_n - \ell\| \rightarrow 0$. □

Corollaire 1.2.5. *La limite, quand elle existe, est unique.*

Exercice 1.2.6. Démontrer le corollaire 1.2.5.

Corollaire 1.2.7. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de limite respective ℓ et ℓ' . Alors*

$$- u_n + v_n \rightarrow \ell + \ell'$$

$$- \|u_n\| \rightarrow \|\ell\|.$$

Exercice 1.2.8. Démontrer le corollaire 1.2.7.

Définition 1.2.9. Une suite (u_n) de \mathbb{R}^2 est dite *bornée* si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M.$$

Proposition 1.2.10. *Une suite convergente est bornée.*

Exercice 1.2.11. Démontrer la proposition 1.2.10.

Proposition 1.2.12. *Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ et (u_n) une suite convergente d'éléments de S . Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \in \bar{S}.$$

Démonstration. Notons ℓ la limite de (u_n) . Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_N - \ell| < \varepsilon$ et donc

$$B(\ell, \varepsilon) \cap \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset.$$

Comme (u_n) est une suite d'éléments de S alors

$$B(\ell, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset.$$

et donc $\ell \in \bar{S}$. □

Corollaire 1.2.13. *Soit $S \subset \mathbb{R}^2$. La partie S est fermée si, et seulement si, toute suite convergente de S converge dans S .*

Démonstration. Rappelons que S est fermée si, et seulement si, $S = \bar{S}$ (cf. 1.1.24).

Si S est fermée alors $S \subset \bar{S}$ et donc par 1.2.12, toute suite convergente de S converge dans $\bar{S} = S$.

Réciproquement, supposons que toute suite convergente de S converge dans S . On sait que $S \subset \bar{S}$ (cf. 1.1.24). Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \bar{S}$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons un $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap S$. Alors (x_n) est une suite de S convergeant vers x (on utilise le théorème d'encadrement de \mathbb{R} et 1.2.4). Par hypothèse, $x = \lim x_n \in S$ et donc $\bar{S} \subset S$. \square

Dans la démonstration, on a montré le résultat suivant :

Corollaire 1.2.14. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$. Si $x \in \bar{S}$ alors il existe une suite (x_n) de S tel que $x_n \rightarrow x$.

Remarque 1.2.15. Dans le cas de \mathbb{R} , comme une suite convergente de $[a, b]$ a une limite dans $[a, b]$ (par passage à la limite des inégalités), les intervalles « fermés » $[a, b]$ sont fermés (dans \mathbb{R}).

1.3 Fonctions continues de \mathbb{R}^2

Notation 1.3.1. Soit $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Pour la définition suivante, on considèrera sur \mathbb{R}^m la « norme » suivante :

$$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m} : (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto \max(|x_1|, \dots, |x_m|) \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.3.2. Vérifier que cette fonction vérifie (mutatis mutandis) la proposition 1.1.1.

Remarque 1.3.3. Les notions de « boule ouverte », « boule fermée », « ouvert », « fermé » s'étendent à l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^m})$.

Définition 1.3.4. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 .

On dit que $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ est *continue* en $x \in S$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in S, \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

On dit qu'elle est continue si elle est continue en tout point de S .

Remarque 1.3.5. Comme la définition ne porte pas sur le domaine d'arrivée (mise à part qu'on demande que f soit une fonction), on peut restreindre le domaine d'arrivée à un sous-ensemble de \mathbb{R}^m contenant l'image de f . On peut donc parler de continuité pour une fonction $S \rightarrow T \supset f(S)$.

Remarque 1.3.6. On peut remplacer la norme $\|\cdot\|$ par la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ afin de définir la notion de continuité pour une fonction $S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.


Remarque 1.3.7. On peut définir² de façon analogue la limite d'une fonction $S \rightarrow \mathbb{R}$ en un point de \bar{S} (ce qui a un sens grâce à la définition d'adhérence) : on dit que f converge vers $\ell \in \mathbb{R}^2$ en $a \in \bar{S}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in S, \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - \ell\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

Remarque 1.3.8. Cette définition est équivalente à celle où on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges (quitte à remplacer ε par 2ε ou $\frac{\varepsilon}{2}$ selon le sens désiré).

2. Dans ce cours, on s'intéressera, pour l'essentiel, qu'à la continuité des fonctions ou à calculer des limites sur $\bar{S} \setminus S$. Ainsi, le sempiternel débat sur la caractère pointé/épointé de la limite n'a pas lieu d'être ici.

 **Exercice 1.3.9.** Montrer qu'une application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue.

 **Exercice 1.3.10.** Montrer que $\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Proposition 1.3.11. Soient $f : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : T \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions. Supposons que $f(S) \subset T$, f est continue en $a \in S$ et g est continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a .

Exercice 1.3.12. Démontrer la proposition 1.3.11.

Proposition 1.3.13. Soit $f : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Soient $f_1, \dots, f_m : S \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées de f , c'est-à-dire

$$\forall x \in S, f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

La fonction f est continue (en $x \in S$) si, et seulement si, les fonctions f_1, \dots, f_m sont continues (en x).

Démonstration. C'est la même démonstration que 1.2.4 □

Remarque 1.3.14. De la même façon, le calcul de limite se fait coordonnées par coordonnées.

Proposition 1.3.15. Soient $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues (en $a \in S$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors


1. $f + \lambda g$ est continue (en $a \in S$);
2. fg est continue (en $a \in S$).

Exercice 1.3.16. Démontrer la proposition 1.3.15.

Proposition 1.3.17. Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $T \subset S$. Alors $f|_T$ est une fonction continue.

Démonstration. Cela vient du fait que pour une famille d'assertions $(\mathcal{P}(x))_{x \in S}$, si $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in S$ alors elle est vraie pour tout $x \in T \subset S$. □

Remarque 1.3.18. La notion de continuité d'une fonction en un point est locale. En effet, $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ est continue en x si, et seulement si, il existe $\delta > 0$ tel que $f|_{S \cap B(x, \delta)}$ est continue en x .

 **Exercice 1.3.19.** Soient $S \subset \mathbb{R}^2$ et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. f est continue;
2. Pour tout ouvert³ U de \mathbb{R} , il existe un ouvert V de E tel que $f^{-1}(U) = V \cap S$;
3. Pour tout fermé⁴ C de \mathbb{R} , il existe un fermé D de E tel que $f^{-1}(C) = D \cap S$.

Proposition 1.3.20 (Critère séquentiel de continuité). Soit $f : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est continue en $a \in S$ si, et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de S qui converge vers a , $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Démonstration. \Rightarrow : Supposons que f est continue en a . Soit $\varepsilon > 0$. On peut se fixer $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in S, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Soit (u_n) une suite qui converge vers a . Fixons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_n - a\| < \delta.$$

³. on rappelle que $U \subset \mathbb{R}$ est ouvert si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$

⁴. le complémentaire d'un ouvert de \mathbb{R}

Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

et donc $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

\Leftarrow : On va le démontrer par contraposée : supposons donc que f n'est pas continue en a i.e.


$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in S, \|x - a\| < \delta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Fixons un tel ε . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc choisir (en prenant $\delta = \frac{1}{n+1}$ pour chaque n) un x_n tel que

$$\|x_n - a\| < \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

On a ainsi construit une suite (x_n) qui converge vers a mais telle que $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(a)$. \square

Remarque 1.3.21. Ce critère est utilisé de deux façons : calculer la limite d'une suite à valeur réelles (comme dans le cas dans \mathbb{R}) et surtout permettre de montrer qu'une fonction n'est pas continue. Pour cela, il faut exhiber une suite qui converge vers un point donné mais tel que l'image de cette suite ne converge pas vers la limite du point

 **Exercice 1.3.22.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y}{x^2 + y} & \text{si } y \neq -x^2 \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0, 0)$ pour n'importe quel choix de $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.3.23. Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Supposons qu'il existe une fonction $\eta : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en 0 telle que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall r > 0, |f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - f(0, 0)| < \eta(r)$$

Alors f est continue en $(0, 0)$.

Démonstration. Fixons une telle fonction η . Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\eta(r) \rightarrow 0$ alors fixons $\delta > 0$ tel que

$$\forall r \in \mathbb{R}_{>0}, r < \delta \Rightarrow \eta(r) < \varepsilon.$$

Soit $(x, y) \in S \setminus \{0\}$ avec $\|(x, y)\| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Comme $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in]0, \delta[$ tels que $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Alors

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) - f(0, 0)| < \eta(r) < \varepsilon$$

\square

Avertissement 1.3.24. La convergence pour tout θ de $f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ pour $r \rightarrow 0$ n'est pas suffisante pour conclure à la continuité de f . On a besoin de la majoration uniforme en θ donnée dans la proposition 1.3.23.

 **Exercice 1.3.25.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = 0$$

2. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Définition 1.3.26. Une fonction $f : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ est un *homéomorphisme* si

- f est continue;
- f est une bijection;
- f^{-1} est continue.


On dit que S et D sont homéomorphes.

Remarque 1.3.27. Un homéomorphisme $S \rightarrow D$ induit une bijection entre les ensembles d'ouverts (resp. fermés) de S et D . Cependant un homéomorphisme ne préserve la norme (on parlerait alors d'isométrie).

Exemple 1.3.28. Soit $f : D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow B(0, 1)$ définie par


$$\forall \mathbf{u} \in D, f(\mathbf{u}) := \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Cette fonction est un homéomorphisme.

 **Exercice 1.3.29.** Montrer que $B(0, 1)$ et $B(a, R)$ sont homéomorphes pour n'importe quel choix de $a \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$.

 **Exercice 1.3.30.** Montrer que $B(0, 1)$ et \mathbb{R}^2 sont homéomorphes.

Remarque 1.3.31. Pour les fonctions de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les deux premières conditions impliquent la troisième (car une fonction continue et bijective est strictement monotone grâce à des considérations utilisant le théorème de la limite monotone). Ce n'est pas le cas dans le cas général.

 **Exercice 1.3.32.** Montrer que

$$\theta \in [0, 2\pi[\mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

est une fonction continue bijective mais n'est pas un homéomorphisme.

1.4 Théorème des bornes atteintes et compacité

Définition 1.4.1. On appelle (*fonction*) *extractrice* une fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Proposition 1.4.2. Une fonction extractrice φ vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$$

Exercice 1.4.3. Démontrer la proposition 1.4.2.

Définition 1.4.4. Soit (u_n) une suite. Alors une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$, où φ est une fonction extractrice, est appelée *sous-suite* ou *suite extraite* de (u_n) .

Proposition 1.4.5. Soit (u_n) une suite de \mathbb{R}^2 convergente vers $\ell \in \mathbb{R}^2$. Alors toute sous-suite de (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

Comme une fonction extractrice φ vérifie $\varphi(\llbracket N, +\infty \rrbracket) \subset \llbracket N, +\infty \rrbracket$ (par la proposition 1.4.2) alors

$$\forall n \geq N, \|u_{\varphi(n)} - \ell\| < \varepsilon$$

et donc $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ . \square

Définition 1.4.6. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$. On dit que S est une *partie compacte* (ou est un *compact*) si de toute suite d'éléments de S on peut en extraire une sous-suite convergente dans S .

Remarque 1.4.7. On peut remplacer dans la proposition 1.4.5 et dans la définition 1.4.6 \mathbb{R}^2 par \mathbb{R}^m et remplacer $\|\cdot\|$ par $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$.

Proposition 1.4.8 (Bolzano-Weierstraß). *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Exemple 1.4.9. Montrons que $B_f(0, R)$ est une partie compacte de \mathbb{R}^2 .

Soit $(u_n = (u_n^{(1)}, u_n^{(2)}))$ une suite de $B_f(0, R)$. On en déduit que les deux suites $(u_n^{(1)})$ et $(u_n^{(2)})$ sont des suites de $[-R, R]$ et sont donc bornées. Par Bolzano-Weierstraß, on peut fixer une extractrice φ_1 telle que $(u_{\varphi_1(n)}^{(1)})$ soit convergente vers un élément de $[-R, R]$ (cf. 1.2.15).

Comme la suite $(u_{\varphi_1(n)}^{(2)})$ est aussi bornée alors on peut fixer une extractrice φ_2 telle que $(u_{\varphi_1(\varphi_2(n))}^{(2)})$ converge (vers un élément de $[-R, R]$). Comme $(u_{\varphi_1(\varphi_2(n))}^{(1)})$ est une sous-suite d'une suite convergente alors elle converge aussi.

En conclusion, par 1.2.4, la suite $(u_{\varphi_1(\varphi_2(n))})$ converge vers un élément de $B_f(0, R)$. Ce qui conclut la démonstration de la compacité de $B_f(0, R)$.

Proposition 1.4.10. *Soit K un compact et $S \subset K$. Si S est fermée alors S est compacte.*

Démonstration. Supposons que S est fermée. Soit (u_n) une suite de S . Comme (u_n) est, en particulier, une suite de K alors, par compacité de K , on peut fixer une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge. Comme $(u_{\varphi(n)})$ est une suite convergente de S alors sa limite est dans S (cf. 1.2.13). La suite (u_n) admet donc une sous-suite convergente dans S . On en déduit donc que S est compacte. \square

Définition 1.4.11. Soit $S \subset \mathbb{R}^m$. On dit que S est une *partie bornée* (ou est un *borné*) s'il existe $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que

$$\forall x \in S, \|x\|_{\mathbb{R}^m} \leq M.$$

Exercice 1.4.12. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrer que $B_f(a, r)$ est bornée.

Proposition 1.4.13. *Soit $K \subset \mathbb{R}^2$. Si K est compacte alors elle est fermée et bornée.*

Démonstration. Supposons K compacte. Soit (u_n) une suite convergente de K . Notons ℓ sa limite. Alors par compacité, (u_n) admet une sous-suite convergeant dans K . Mais toutes les sous-suites de (u_n) converge vers ℓ (cf. 1.4.5). Donc $\ell \in K$.

Supposons que K n'est pas bornée i.e.

$$\forall M \geq 0, \exists x \in K, \|x\| > M$$

On peut donc considérer une suite (u_n) de K telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| > n$$

Supposons qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge. Par 1.2.10, cette sous-suite est bornée, ce qui absurde car

$$\|u_{\varphi(n)}\| > \varphi(n) \geq n \rightarrow \infty.$$

□

La réciproque de cette proposition est vraie⁵ :

Proposition 1.4.14. *Soit $S \subset \mathbb{R}^2$. Si S est fermée et bornée alors elle est compacte.*

Démonstration. Supposons S fermée et bornée.

Soit (u_n) une suite de S . Comme (u_n) est bornée alors ses coordonnées $(u_n^{(1)})$ et $(u_n^{(2)})$ sont aussi bornées. De la même façon que dans 1.4.9, on peut utiliser le théorème de Bolzano-Weierstraß pour obtenir une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge. Comme c'est une suite de S alors sa limite est aussi dans S (car S est fermé). En conclusion, on a trouvé une sous-suite (u_n) qui converge dans S . La partie S est donc compacte. □

Corollaire 1.4.15. *Soit K un compact non-vide de \mathbb{R}^m . Alors l'ensemble $\{\|x\|, x \in K\} \subset \mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum.*

Démonstration. On va faire le cas « maximum ». Le minimum se fait de la même façon. L'ensemble $\{\|x\|, x \in K\} \subset \mathbb{R}$ est une partie non-vide (car K est non-vide) et majorée (car K est bornée car compacte, cf. 1.4.13). Elle a donc une borne supérieure $\sup_{x \in K} \|x\|$ que l'on notera dans la suite M . Montrons que cette borne supérieure est atteinte.

Par les propriétés de la borne supérieure, on peut trouver une suite (u_n) dans $\{\|x\|, x \in K\} \subset \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} < u_n \leq M.$$

Comme $u_n \in \{\|x\|, x \in K\}$ pour tout n alors on peut trouver une suite (x_n) de K telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} < \|x_n\| \leq M.$$

Comme K est compacte alors on peut choisir une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $\ell \in K$. On a les inégalités suivantes grâce à la proposition 1.4.2

$$\forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} \leq M - \frac{1}{\varphi(n)+1} < \|x_{\varphi(n)}\| \leq M.$$

En passant à la limite, on obtient avec le corollaire 1.2.7 et le théorème des gendarmes,

$$\|\ell\| = M$$

La borne supérieure $\sup_{x \in K} \|x\|$ est donc atteinte et est donc un maximum. □

Exercice 1.4.16. En reprenant cette démonstration, montrer que si $K \subset \mathbb{R}$ est compact alors K admet un minimum et un maximum.

Proposition 1.4.17. *Soient S une partie de \mathbb{R}^2 , $K \subset S$ et $f: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Si K est compacte alors $f(K)$ est compacte.*

5. mais contrairement à la proposition précédente, elle n'est vraie que dans des espaces vectoriels normés qui sont de dimension finie.

Démonstration. Supposons que K est compacte. Soit (y_n) une suite de $f(K)$. Soit (x_n) une suite de K telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = f(x_n)$$

Comme (x_n) est une suite dans le compact K alors on peut fixer une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $\ell \in K$. Alors, par continuité de f (cf. 1.3.20), $(y_{\varphi(n)}) = (f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(\ell) \in f(K)$. On a donc trouvé une sous-suite de (y_n) convergeant dans $f(K)$, ce qui permet de conclure. \square

Définition 1.4.18. Une fonction $f : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite bornée si $f(S)$ est une partie bornée de \mathbb{R}^m .

Corollaire 1.4.19. Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un compact K non-vide. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Comme K est compacte et f est continue alors $f(K)$ est compacte (par 1.4.17). Elle est en particulier bornée (par 1.4.13). Grâce à 1.4.16, $f(K)$ a un minimum $m = f(x_{\min}) \in f(K)$ et un maximum $M = f(x_{\max}) \in f(K)$. Les réels m et M sont les bornes de f et sont respectivement atteints en x_{\min} et x_{\max} \square

2 Différentiabilité

2.1 Différentiabilité

Définition 2.1.1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. On dit que f est *différentiable en* $a \in U$ s'il existe une application linéaire $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ et une fonction $\varepsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que $\|\varepsilon(h)\|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow 0$ et

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, a+h \in U \Rightarrow f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

On dit que f est différentiable si elle est différentiable en tout point de U .

Proposition 2.1.2. Si $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable en a alors l'application linéaire L apparaissant dans la définition est unique.

Démonstration. Supposons que f est différentiable en a .

Soient $L_1, L_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ des applications linéaires telles que

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, a+h \in U \Rightarrow f(a+h) = f(a) + L_i(h) + \|h\|\varepsilon_i(h)$$

avec $\|\varepsilon_i(h)\|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. On a alors

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, a+h \in U \Rightarrow \|L_1(h) - L_2(h)\|_{\mathbb{R}^m} = \|h\| \|\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)\|_{\mathbb{R}^m} \quad (2)$$

et $\|\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)\|_{\mathbb{R}^m} \rightarrow 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $\delta > 0$ tel que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \|\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon \quad (3)$$

Alors pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|v\| < 1$, on a :

$$\begin{aligned} \|L_1(v) - L_2(v)\| &= \left\| L_1\left(\frac{\delta v}{\delta}\right) - L_2\left(\frac{\delta v}{\delta}\right) \right\| \stackrel{L_i \text{ lin+}\|\cdot\|}{=} \frac{1}{|\delta|} \|L_1(\delta v) - L_2(\delta v)\| \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{|\delta|} \|\delta v\| \|\varepsilon_1(\delta v) - \varepsilon_2(\delta v)\|_{\mathbb{R}^m} = \|v\| \|\varepsilon_1(\delta v) - \varepsilon_2(\delta v)\|_{\mathbb{R}^m} \stackrel{(3)}{<} \|v\| \varepsilon < \varepsilon \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $L_1(v) - L_2(v) = 0$ pour tout $v \in B(0, 1)$. Comme ce sont des applications linéaires, on en déduit que $L_1 = L_2$ (car $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(B(0, 1)) \subset \ker(L_1 - L_2) \subset \mathbb{R}^2$ et donc $\ker(L_1 - L_2) = \mathbb{R}^2$). \square

Remarque 2.1.3. Cela généralise la dérivabilité des fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$ (où I est un intervalle ouvert). En effet, par la définition avec le taux d'accroissement, une fonction $I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si, il existe une fonction $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 telle que :

$$\forall h \in \mathbb{R}, a+h \in \mathbb{R} \Rightarrow f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h)$$

Notation 2.1.4. On note $d_a f$ cette application (ou $df(a)$, $D_a f$, $Df(a)$...) et on l'appelle différentielle, ou application linéaire tangente, de f en a .

Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable, on considérera la fonction

$$df: a \in U \mapsto d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$$

Remarque 2.1.5. On peut étendre la définition de différentiabilité aux fonctions $U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Remarque 2.1.6. La notion de différentiabilité en un point est une notion locale : une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable en $a \in U$ si, et seulement, il existe $\delta > 0$ tel que $f|_{U \cap B(a, \delta)}$ est différentiable en a .

Exemple 2.1.7. — Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est constante alors $d_a f = 0$ pour tout $a \in U$. En effet, on a

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, a + h \in U \Rightarrow f(a + h) = f(a)$$

(la fonction ε est la fonction nulle qui converge effectivement vers 0 quand h tend vers 0)

— Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est (la restriction d') une application linéaire $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ alors $d_a f = L$ pour tout $a \in U$. En effet, on a

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, a + h \in U \Rightarrow f(a + h) = f(a) + f(h) = f(a) + L(h)$$

(la fonction ε est la fonction nulle).

Exemple 2.1.8. Montrons que la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy \in \mathbb{R}$ est différentiable en tout point.

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(a + h) = (a_1 + h_1)(a_2 + h_2) = a_1 a_2 + a_1 h_1 + h_1 a_2 + h_1 h_2$$

Notons L l'application linéaire $(h_1, h_2) \mapsto a_1 h_1 + h_1 a_2$. On a alors

$$f(a + h) = (a_1 + h_1)(a_2 + h_2) = a_1 a_2 + L(h) + h_1 h_2$$

Étudions maintenant le terme $h_1 h_2$.

Soit ε la fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon(h) = \begin{cases} \frac{h_1 h_2}{\|h\|} & \text{si } h \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, on a, pour $h \in \mathbb{R}^2$,


$$f(a + h) = f(a) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

La fonction $\varepsilon(h)$ tend vers 0 en 0 car $\varepsilon(0) = 0$ et


$$\forall h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, |\varepsilon(h)| = \frac{|h_1| |h_2|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\|$$

La fonction f est bien différentiable en a et de différentielle

$$(h_1, h_2) \mapsto a_1 h_1 + h_1 a_2$$

 **Exercice 2.1.9.** Étudier la différentiabilité d'une forme quadratique i.e. une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe ℓ_1, \dots, ℓ_n des formes linéaires de \mathbb{R}^2 et des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_i(x)^2$$

 **Exercice 2.1.10.** Soient $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^2)}$. Étudier la différentiabilité de la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{R}$.


Définition 2.1.11. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a = (x_0, y_0) \in U$. Soit $\Gamma_f := \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$ son graphe. Le plan (affine) défini par l'équation (en x, y, z)

$$z = f(x_0, y_0) + d_a f(x - x_0, y - y_0)$$

est appelé *plan tangent de Γ en $(a, f(a))$* et on le note $T_{(a, f(a))}\Gamma_f$.

Remarque 2.1.12. C'est une généralisation du cas à une variable où la tangente du graphe d'une fonction dérivable f en a est donnée par :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

 **Exercice 2.1.13.** Soit $f : (x, y) \in B(0, \sqrt{7}) \mapsto \sqrt{14 - x^2 - y^2} \in \mathbb{R}$. Calculer le plan tangent de son graphe en $(1, 2, 3)$.

Proposition 2.1.14. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Soient $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U, f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Alors f est différentiable en a si, et seulement si, les fonctions f_1, \dots, f_m sont différentiables en a . Et alors

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, d_a f(h) = (d_a f_1(h), \dots, d_a f_m(h)).$$

Exercice 2.1.15. Montrer la proposition 2.1.14

Notation 2.1.16. Si $f = (f_1, \dots, f_m) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$, on notera f' la fonction $(f'_1, \dots, f'_m) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Proposition 2.1.17. Une fonction $U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$ est continue en $a \in U$.

Démonstration. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$. Soit $h \in \mathbb{R}^2$ tel que $a + h \in U$. Alors il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 tel que

$$f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$


et donc comme $d_a f$ est continue (car linéaire) et $d_a f(0) = 0$ alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$$

Autrement dit,

$$\lim_{h \rightarrow a} f(h) = f(a).$$

i.e. f est continue en a . □

 **Proposition 2.1.18.** Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ deux fonctions différentiables en $a \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + \lambda g$ est différentiable en a et


$$d_a(f + \lambda g) = d_a f + \lambda d_a g.$$

Exercice 2.1.19. Montrer la proposition 2.1.18.

Remarque 2.1.20. On en déduit que le sous-ensemble $\mathcal{D}_a(U, \mathbb{R}^m)$ des fonctions différentiables en $a \in U$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ et la fonction

$$f \in \mathcal{D}_a(U, \mathbb{R}) \mapsto d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$$

est une application linéaire.

 **Proposition 2.1.21.** Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables en $a \in U$. Alors fg est différentiable en a et

$$d_a(fg) = g(a)d_a f + f(a)d_a g.$$

C'est une généralisation de l'exemple 2.1.9.

Exercice 2.1.22. Montrer la proposition 2.1.21.

Proposition 2.1.23. Soient $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions telles que $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Supposons que f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f.$$

Démonstration. Comme f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$ alors on peut fixer une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ et une fonction $\eta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $\varepsilon \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$,

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, a+h \in U \Rightarrow f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

et

$$\forall k \in \mathbb{R}^m, f(a)+k \in V \Rightarrow g(f(a)+k) = g(f(a)) + d_{f(a)}g(k) + \|k\|\eta(k)$$

Comme f est continue (car différentiable par 2.1.17) et V est ouvert alors en prenant h suffisamment petit, on peut supposer $f(a+h) \in V$ (pour $\varepsilon > 0$, si $B(f(a), \varepsilon) \subset V$ alors on peut choisir $\delta > 0$ tel que $\delta > 0$ tel que $\|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \varepsilon$ et donc $f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \subset V$). Pour un tel h , on a :

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g(f(a) + d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \\ &= g(f(a)) + d_{f(a)}g(d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)) + \eta(d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \|d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)\| \\ &= g(f(a)) + d_{f(a)}g(d_a f(h)) + d_{f(a)}g(\|h\|\varepsilon(h)) + \eta(d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \|d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)\| \\ &= g(f(a)) + d_{f(a)}g(d_a f(h)) + \|h\| \underbrace{d_{f(a)}g(\varepsilon(h))}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} + \eta(d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \|d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)\| \end{aligned}$$

On a vu dans le TD qu'il existe $C_a \geq 0$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, \|d_a f(h)\| \leq C_a \|h\|.$$

Pour une telle constante, on en déduit que :

$$\begin{aligned} |\eta(d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \|d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)\|| &= |\eta(d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h))| \|d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)\| \\ &\leq |\eta(d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h))| (C_a \|h\| + \|h\|\varepsilon(h)) \\ &\leq |\eta(d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h))| (C_a \|h\| + \|h\|\varepsilon(h)) \\ &\leq \|h\| \underbrace{|\eta(d_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h))|}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \underbrace{(C_a + \varepsilon(h))}_{\text{bornée}}. \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure. □

Définition 2.1.24. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $a \in U$. On dit qu'une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ différentiable dans une boule ouverte autour de a est (de classe) \mathcal{C}^1 en a ou *continûment différentiable en a* si $df : V \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{2m}$ est continue (pour n'importe quel choix d'isomorphisme linéaire). Elle est dite (de classe) \mathcal{C}^1 ou *continûment différentiable* si elle l'est en tout point de U .


Exemple 2.1.25. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ comme dans l'exemple 2.1.9 i.e. de la forme $x \mapsto \sum_{i=1}^n \ell_i(x)^2$ avec $\ell_i \in (\mathbb{R}^2)^*$. Alors

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, d_a f(h) = 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_i(a) \ell_i(h).$$

Par l'isomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \mapsto (u(e_1), u(e_2)) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$df : a \mapsto \left(2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_i(a) \ell_i(e_1), 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_i(a) \ell_i(e_2) \right)$$

qui est continue (car linéaire).

 **Exercice 2.1.26.** Montrer que les fonctions de l'exercice 2.1.10 sont de classe \mathcal{C}^1 .

Remarque 2.1.27. Une fonction différentiable n'est pas nécessairement \mathcal{C}^1 . Pour le voir, il suffit de prendre une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable mais pas \mathcal{C}^1 (cf. 2.1.3).

Exercice 2.1.28. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est dérivable mais pas de classe \mathcal{C}^1 .

2.2 Dérivées partielles

Définition 2.2.1. Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction et $i \in \{1, 2\}$. La i ème dérivée partielle de f en a est la limite (si elle existe) en 0 de la fonction définie dans une boule ouverte autour de 0

$$t \mapsto \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

où (e_1, e_2) est la base canonique de \mathbb{R}^2 . On la note alors $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ⁶ ou encore $\partial_x f(a)/\partial_y f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

Proposition 2.2.2. Si f est différentiable alors les dérivées partielles de f en a existent et

$$\forall i \in \{1, 2\}, \partial_i f(a) = d_a f(e_i)$$

Démonstration. Soit $i \in \{1, 2\}$.

Comme f est différentiable en a , on peut fixer une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui tend vers 0 en 0 et telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, a + h \in U \Rightarrow f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

Comme U est ouvert alors on peut fixer $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset U$. Pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < \eta$, on a :

$$\frac{d_a f(te_i) + \|te_i\| \varepsilon(te_i)}{t} = \left(d_a f(e_i) + \frac{|t|}{t} \varepsilon(te_i) \right) \xrightarrow{0} d_a f(e_i)$$


car $\varepsilon(te_i) \rightarrow 0$ et $\frac{|t|}{t}$ est borné en t . On en déduit que $\partial_i f(a)$ existe et

$$\partial_i f(a) = d_a f(e_i).$$

□

6. Ici, le "x" est muet

Remarque 2.2.3. La réciproque est fautive.

 **Exercice 2.2.4.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction est \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
2. Montrer que f est continue en $(0, 0)$.
3. Montrer que ses deux dérivées partielles existent en tout point.
4. Montrer qu'elle n'est pas différentiable en 0 .

Corollaire 2.2.5. Si f est différentiable en a alors pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,


$$d_a f(u) = \partial_1 f(a)x + \partial_2 f(a)y.$$

Démonstration. Soit $u = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$d_a f(u) = d_a f(xe_1 + ye_2) = x d_a f(e_1) + y d_a f(e_2) = x \partial_1 f(a) + y \partial_2 f(a)$$

□

Remarque 2.2.6. L'existence des dérivées partielles n'implique pas la différentiabilité (cf. 2.2.4) et n'implique même pas la continuité.

 **Exercice 2.2.7.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 et les calculer.
2. Montrer que f n'est pas continue en 0 .

Définition 2.2.8. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction admettant toutes ses dérivées partielles en a . Notons f_1, \dots, f_m ses fonctions coordonnées. On appelle *matrice jacobienne de f en a* , que l'on note $\text{Jac}_a(f)$, la matrice représentative de $d_a f$ dans les bases canoniques \mathcal{B}_{can} , \mathcal{C}_{can} de respectivement \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^m :

$$\text{Jac}_a(f) := \text{Mat}(d_a f, \mathcal{B}_{\text{can}}, \mathcal{C}_{\text{can}}) = \begin{pmatrix} d_a f(e_1) & d_a f(e_2) \\ \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) \\ \vdots & \vdots \\ \partial_m f_1(a) & \partial_2 f_m(a) \end{pmatrix}$$

On peut étendre cette définition aux fonctions $V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dans ce cas, la matrice jacobienne est de la forme

$$\text{Jac}_a(f) := \text{Mat}(d_a f, \mathcal{B}_{\text{can}}, \mathcal{C}_{\text{can}}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_1 f_m(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n f_1(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} = (\partial_i f_j(a))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}.$$

On a alors un énoncé analogue à 2.1.23 :

Proposition 2.2.9. Soient $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions telles que $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Notons (f_1, \dots, f_m) les fonctions coordonnées de f et (g_1, \dots, g_n) celles de g . Supposons que f admette toutes ses dérivées partielles en a et g admette toutes ses dérivées partielles en $f(a)$. Alors $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ admet toutes ses dérivées partielles en a et

$$\text{Jac}_a(g \circ f) = (\text{Jac}_{f(a)}g)(\text{Jac}_a f).$$

En particulier,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \{1, 2\}, \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

Corollaire 2.2.10. Soient $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction dérivable, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\gamma(I) \subset U$ et $a \in I$. Supposons que γ est dérivable en a et f admet ses dérivées partielles en $\gamma(a)$. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable en a et

$$(f \circ \gamma)'(a) = \gamma_1'(a) \partial_1 f(\gamma(a)) + \gamma_2'(a) \partial_2 f(\gamma(a)).$$

Définition 2.2.11. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, la transposée de la matrice jacobienne est appelé gradient de f et on note alors $\nabla_a f$ ou $\text{grad}_a f$. Ainsi,


$$\nabla_a f = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_m f(a) \end{pmatrix}.$$

Définition 2.2.12. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont toutes les dérivées partielles en $a = (x_0, y_0) \in U$ existent et ne s'annulent pas simultanément.

La droite (affine) définie par l'équation (en x, y) par

$$0 = (x_0, y_0) + d_a f(x - x_0, y - y_0) = (x_0, y_0) + \partial_1 f(a)(x - x_0) + \partial_2 f(a)(y - y_0).$$

est appelé droite tangente de l'ensemble de niveau $\{(x, y) \in U \mid f(x, y) = f(a)\}$ en a .

 **Exercice 2.2.13.** Étudier les droites tangentes associées à la fonction $(x, y) \mapsto xy$. Que se passe-t-il pour l'ensemble de niveau avec $a = (0, 0)$?

Proposition 2.2.14. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont toutes les dérivées partielles en $a = (x_0, y_0) \in U$ existent et ne s'annulent pas simultanément. Alors le gradient $\nabla_a f$ est orthogonal à la droite tangente à $\{(x, y) \in U \mid f(x, y) = f(a)\}$ en a .

Démonstration. Le vecteur $u := (\partial_2 f(a), -\partial_1 f(a))$ est un vecteur directeur de cette droite du fait de son équation. Comme

$$\langle u, \nabla_a f \rangle = 0$$

alors le gradient $\nabla_a f$ est bien orthogonal à la droite tangente à $\{(x, y) \in U \mid f(x, y) = f(a)\}$ en a . \square

2.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème 2.3.1 (Théorème des accroissements finis en dimension 1). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corollaire 2.3.2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Supposons que $|f'|$ est majorée par M . Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a).$$

Exercice 2.3.3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer que

$$\exists c \in]a, b[, g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$$

2. Supposons, de plus, que pour tout $x \in]a, b[, |f'(x)| \leq g'(x)$ et $g'(x) \neq 0$. Montrer que

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a).$$

Exemple 2.3.4. Soit $f: t \in \mathbb{R} \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$. On a $f(0) = f(2\pi)$ mais $f': t \mapsto (-\sin(t), \cos(t)) \in \mathbb{R}^2$ ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$.

Exercice 2.3.5. Soient $f, g: I := [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(a) = g(a)$. Montrer que

$$A := \{c \in I \mid \forall x \in [a, c], f(x) \leq g(x)\}$$

est un intervalle fermé (inclus dans I). Plus précisément, montrer que $A = [a, \sup A]$.

Théorème 2.3.6 (Inégalité des accroissements finis). Soit $I := [a, b]$ un segment de \mathbb{R} . Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que

$$\forall x \in I, \|f'(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq g'(x). \quad (4)$$

Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} \leq g(b) - g(a).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$A_\varepsilon := \{c \in I \mid \forall x \in [a, c], \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a)\}.$$

Par 2.3.5, comme f, g et $\|\cdot\|$ sont continues alors $A_\varepsilon = [a, t]$ (par 2.3.5) avec $t := \sup(A_\varepsilon)$. Montrons que $t = b$. Supposons, par l'absurde, que $t < b$. On a

$$\|f(t) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} \leq g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) \quad (5)$$

Comme f et g sont dérivables en t alors on peut fixer $\delta > 0$ tel que $t + \delta \leq b$ et

$$\forall \eta \in [0, \delta], \|f(t + \eta) - f(t) - \eta f'(t)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \frac{\varepsilon}{2}\eta$$

et

$$\forall \eta \in [0, \delta], |g(t + \eta) - g(t) - \eta g'(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\eta.$$

Et en particulier, par inégalité triangulaire, on a :

$$\forall \eta \in [0, \delta], \|f(t + \eta) - f(t)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \eta \|f'(t)\|_{\mathbb{R}^m} + \frac{\varepsilon}{2}\eta \quad (6)$$

et

$$\forall \eta \in [0, \delta], \eta g'(t) \leq \eta |g'(t)| \leq |g(t + \eta) - g(t)| + \frac{\varepsilon}{2}\eta \leq g(t + \eta) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2}\eta \quad (7)$$

(comme $g'(t) \geq 0$ et $\eta > 0$ alors $g(t + \eta) \geq g(t)$).

On va maintenant montrer que $t + \delta \in A_\varepsilon$, ce qui sera une contradiction.

Soit $\eta \in [0, \delta]$. Alors on a les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}
\|f(t + \eta) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} &\stackrel{IT}{\leq} \|f(t + \eta) - f(t)\|_{\mathbb{R}^m} + \|f(t) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} \\
&\stackrel{(5)}{\leq} \|f(t + \eta) - f(t)\|_{\mathbb{R}^m} + g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) \\
&\stackrel{(6)}{\leq} \eta \|f'(t)\|_{\mathbb{R}^m} + \frac{\varepsilon}{2}\eta + g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) \\
&\stackrel{(4)}{\leq} \eta g'(t) + \frac{\varepsilon}{2}\eta + g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) \\
&\stackrel{(7)}{\leq} g(t + \eta) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2}\eta + \frac{\varepsilon}{2}\eta + g(t) - g(a) + \varepsilon(t - a) \\
&\leq g(t + \eta) - g(a) + \varepsilon(t + \eta - a)
\end{aligned}$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $\eta \in [0, \delta]$ et que $t \in A_\varepsilon$ alors $t + \delta \in A_\varepsilon$. Ce qui est une contradiction puisque $t = \sup A_\varepsilon$.

On en déduit que $t = b$ et donc

$$\|f(b) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a).$$

Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ alors

$$\|f(b) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} \leq g(b) - g(a).$$

□

Corollaire 2.3.7. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Supposons que U soit convexe i.e. pour tout $x, y \in U$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $(1 - t)x + ty \in U$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in U, \forall h \in \mathbb{R}^2, x + h \in U \Rightarrow \|d_x f(h)\|_{\mathbb{R}^m} \leq M \|h\|$$

alors

$$\forall x, y \in U, \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^m} \leq M \|x - y\|$$

Démonstration. Soient $x, y \in U$. Considérons la fonction $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto (1 - t)x + ty \in \mathbb{R}^2$. C'est une paramétrisation (dérivable) du segment reliant x et y . On peut donc considérer $\Phi := f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$. Alors, pour $t \in [0, 1]$,

$$\Phi'(t) = d_{(1-t)x+ty} f(\gamma'(t)) = d_{(1-t)x+ty} f(y - x)$$

Ainsi, pour $t \in [0, 1]$,

$$\|\Phi'(t)\|_{\mathbb{R}^m} \leq M \|y - x\|.$$

On a majoré $\|\Phi'\|$ par la dérivée de $\varphi : t \mapsto M \|y - x\|t$. Par l'inégalité des accroissements finis (cf. 2.3.6), on obtient :

$$\|\Phi(1) - \Phi(0)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \varphi(1) - \varphi(0) = M \|y - x\|$$

et donc

$$\|f(y) - f(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq M \|y - x\|.$$

□

Remarque 2.3.8. On peut montrer que $B(0, R)$ est convexe : si $x, y \in B(0, R)$ alors $\gamma : t \mapsto (1-t)x + ty$ est à valeurs dans $B(0, R)$:

$$\forall t \in [0, 1], \|\gamma(t)\| = \|(1-t)x + ty\| \stackrel{IT}{\leq} (1-t)\|x\| + t\|y\| < (1-t)R + tR = R.$$

Corollaire 2.3.9. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Supposons que U soit convexe i.e. pour tout $x, y \in U$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty \in U$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable. Si $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont bornées par M alors

$$\forall x, y \in U, \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^m} \leq 2M\|x - y\|$$

Démonstration. Soient $u \in \mathbb{R}^2$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\|d_u f(h, k)\| = \|\partial_x f(u)h + \partial_y f(u)k\| \stackrel{IT}{\leq} |h|\|\partial_x f(u)\| + |k|\|\partial_y f(u)\| \stackrel{IT}{\leq} M(|h| + |k|) \leq 2M\|(h, k)\|$$

On conclut avec 2.3.7. □

Corollaire 2.3.10. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. Supposons que pour tout $x, y \in U$ tel qu'il existe $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ dérivable tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable. Si $d_a f = 0$ pour tout $a \in U$ alors f constante.

Démonstration. Soient $x, y \in U$. Fixons $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ dérivable tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Posons $\Phi := f \circ \gamma$. Alors Φ est dérivable et

$$\|\Phi'(t)\| = \|d_{\gamma(t)} f(\gamma'(t))\| = 0$$

Par l'inégalité des accroissements finis,

$$\|\Phi(1) - \Phi(0)\| \leq 0$$

et donc $f(x) = \Phi(1) = \Phi(0) = f(y)$. Ce qui montre que f est constante. □

Remarque 2.3.11. On remarque que si U est convexe alors deux points sont reliés par un chemin différentiable. De plus, on peut alors montrer le résultat avec 2.3.7 avec $M = 0$

Remarque 2.3.12. Ce résultat ne fonctionne pas pour un ouvert U quelconque : prenons $S := B(0, 1) \cup B((4, 0), 1)$ et la fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ valant 1 sur $B(0, 1)$ et 0 sur $B((4, 0), 1)$ est différentiable, de différentielle nulle mais n'est pas constante.

Proposition 2.3.13. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 si, et seulement si, f admet toutes ses dérivées partielles $\partial_i f$ et celles-ci sont continues.

Démonstration. Supposons que f est de classe \mathcal{C}^1 i.e. $df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ est continue. Elle est en particulier différentiable et donc toutes ces dérivées partielles existent.

On a montré que, pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $a \in U$

$$\partial_i f(a) = d_a f(e_i) = ev_{e_i} \circ df(a)$$

où (e_1, e_2) est la base canonique de \mathbb{R}^2 et, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $ev_v : L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m) \mapsto L(v)$. Ces dernières applications étant continues (car linéaires), on en déduit que, par composition de fonctions continues, $\partial_i f$ est continue pour tout i .

Réciproquement, supposons que $\partial_i f$ existe et est continue pour tout i .

Soit $a \in U$ et $\varepsilon > 0$. Fixons $\delta_0 > 0$ tel que $B(a, \delta_0) \subset U$. Par continuité des $\partial_i f$, on peut choisir un $\delta \in]0, \delta_0[$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, \|h\| < \delta \Rightarrow \|\partial_i f(a+h) - \partial_i f(a)\| < \varepsilon. \quad (8)$$

Soit $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|h\| < \delta$. Posons, pour $k \in \{0, 1, 2\}$

$$h(k) := \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ (h_1, 0) & \text{si } k = 1 \\ h & \text{si } k = 2 \end{cases}$$

On a alors :

$$f(a+h) - f(a) = f(a+h(2)) - f(a+h(1)) + f(a+h(1)) - f(a+h(0))$$

et donc

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) - \partial_1 f(a)h_1 - \partial_2 f(a)h_2 &= (f(a+h(1)) - f(a+h(0)) - \partial_1 f(a)h_1) \\ &\quad + (f(a+h(2)) - f(a+h(1)) - \partial_2 f(a)h_2). \end{aligned}$$

Soit $k \in \{1, 2\}$. Soit $\Phi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ la fonction définie par

$$\Phi_k(t) := f(a+h(k-1) + th_k e_k) - t \partial_k f(a)h_k$$

Cette fonction est dérivable et

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \Phi'_k(t) &= d_{a+h(k-1)+th_k e_k} f(h_k e_k) - \partial_k f(a)h_k \\ &= h_k (\partial_k f(a+h(k-1) + th_k e_k) - \partial_k f(a)). \end{aligned}$$

Comme $\|h(k-1) + th_k e_k\| \leq \|h\| < \delta$ alors par (8),

$$\forall t \in [0, 1], \|\Phi'_k(t)\| < |h_k| \varepsilon.$$

Considérons la fonction $\varphi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) := |h_k| \varepsilon t$$

et donc

$$\forall t \in [0, 1], \|\Phi'_k(t)\| < \varphi'_k(t).$$

Par l'inégalité des accroissements finis (cf. 2.3.6), on a :

$$\|\Phi_k(1) - \Phi_k(0)\| \leq \varphi_k(1) - \varphi_k(0)$$

c'est-à-dire

$$\|f(a+h(k)) - f(a+h(k-1)) - \partial_k f(a)h_k\| \leq \varepsilon |h_k| \quad (9)$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^2 \partial_k f(a)h_k \right\| &= \left\| \sum_{k=1}^2 f(a+h(k)) - f(a+h(k-1)) - \partial_k f(a)h_k \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^2 \|\partial_k f(a)h_k\| \\ &\stackrel{(9)}{\leq} \varepsilon |h_1| + \varepsilon |h_2| \leq \varepsilon \|h\| + \varepsilon \|h\| = 2\varepsilon \|h\|. \end{aligned}$$

On en déduit que f est différentiable de différentielle

$$h = (h_1, h_2) \mapsto \partial_1 f(a)h_1 + \partial_2 f(a)h_2$$

Comme les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues alors on en déduit que df est continue aussi. □