Cours : Fonctions à deux variables

Antoine Boivin

26 janvier 2026

1 Continuité

Cette section étend la notion de continuité à des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour remplacer la valeur absolue qu'on utilise pour $\mathbb{R}$, on va considérer la fonction suivante :

$$\|\cdot\| : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \max(|x|, |y|) \in \mathbb{R}.$$

qu'on appelera « norme » (de $\mathbb{R}^2$). On la note habituellement $\|\cdot\|_\infty$ et on l'appelle « norme infinie ».

Dans toute la suite, on écrira $\mathbb{R}^2$ pour l'espace vectoriel (usuel) $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ et plus généralement $\mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{R}^n$ pour l'espace vectoriel (usuel).

1.1 Topologie de $\mathbb{R}^2$

Proposition 1.1.1.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = 0 \implies x = 0$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

Démonstration. 1) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors comme $|\lambda x_i| = |\lambda||x_i|$ pour $i \in \{1, 2\}$ et que la multiplication par un réel positif conserve l'ordre, on obtient bien $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

2) Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $\|x\| = 0$. Alors, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$0 \leq |x_i| \leq \max(|x_1|, |x_2|) = \|x\| = 0$$

et donc $|x_i| = 0$ et $x_i = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Donc $x = 0$.

3) Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$|x_i + y_i| \overset{\text{IT dans } \mathbb{R}}{\leq} |x_i| + |y_i| \leq \underbrace{\|x\| + \|y\|}_{\text{ne dépend pas de } i}.$$

et donc

$$\|x + y\| = \max(|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|) \leq \|x\| + \|y\|.$$

□

Remarque 1.1.2. On dit que le couple $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Remarque 1.1.3. Pour généraliser la valeur absolue, on aurait pu utiliser n'importe quelle fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant ces propriétés. Ces fonctions sont appelés « normes » sur $\mathbb{R}^2$. Tous les résultats fonctionne de la même façon avec n'importe quel autre choix de norme. Les exercices 1.1.4 et 1.1.6 présentent les normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$. On utilisera l'exercice 1.1.4 dans la section **??**

Exercice 1.1.4. Montrer que la fonction

$$\|\cdot\|_2 \colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{x^2+y^2}.$$

est une norme de $\mathbb{R}^2$.

Indication : On pourra montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |\langle x, y\rangle| \coloneqq |x_1y_1 + x_2y_2| \le \|x\|_2\|y\|_2 \tag{1}$$

en considérant la fonction polynomiale $t \mapsto \|x+ty\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2t\langle x,y\rangle + t^2\|y\|_2^2$ *avec* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *fixés.*

Remarque 1.1.5. On pourra aussi montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si les deux vecteurs sont colinéaires.

Exercice 1.1.6.

1. Soit $p \ge 1$. Montrer que les fonctions

$$\|\cdot\|_p \colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt[p]{|x|^p + |y|^p}.$$

sont des normes de $\mathbb{R}^2$.

Indication : On pourra montrer que pour $p, q \ge 1$ *tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

on a :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

puis l'inégalité de Hölder :

$$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1y_1 + x_2y_2| \le \|x\|_p\|y\|_q$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\|x\| \le \|x\|_p \le 2^{1/p}\|x\|$$

et en déduire

$$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|.$$

Corollaire 1.1.7 (inégalité triangulaire inversée)**.** $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \left|\|x\| - \|y\|\right| \le \|x - y\|$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$. En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient les deux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \|x\| \le \|y + (x-y)\| \overset{\text{IT}}{\le} \|y\| + \|x-y\| \\ \|y\| \le \|x + (y-x)\| \overset{\text{IT}}{\le} \|x\| + \|y-x\| = \|x\| + |-1|\|x-y\| = \|x\| + \|x-y\| \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \|x\| - \|y\| \le \|x-y\| \\ \|y\| - \|x\| \le \|x-y\| \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$\left|\|x\| - \|y\|\right| = \max(\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|) \le \|x-y\|.$$

□

Définition 1.1.8 (Boule)**.** Soient $a \in E$ et $r > 0$.
On appelle *boule ouverte centrée en* a *de rayon* r la partie

$$B(a,r) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\| < r\}$$

et *boule fermée centrée en* a *de rayon* r la partie

$$B_f(a,r) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\| \leq r\}.$$

Exercice 1.1.9. Dessiner la boule unité $B(0,1)$.

Exercice 1.1.10. Soient $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrer que

$$B(a,r) =]a_1 - r, a_1 + r[\times]a_2 - r, a_2 + r[$$

et

$$B_f(a,r) = [a_1 - r, a_1 + r] \times [a_2 - r, a_2 + r].$$

Définition 1.1.11. On dit que la partie $U \subset \mathbb{R}^2$ est *ouverte dans* $\mathbb{R}^2$ (ou *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$) si

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \subset U$$

et que $C \subset \mathbb{R}^2$ est *fermée* dans $\mathbb{R}^2$ (ou *un fermé* de $\mathbb{R}^2$) si $\mathbb{R}^2 \setminus C$ est ouverte dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque 1.1.12. Dans la suite, on omettra « de $\mathbb{R}^2$ » car cela sera implicite.

Exercice 1.1.13. Montrer qu'un singleton est fermé mais n'est pas ouvert.

Exercice 1.1.14. Montrer qu'une boule ouverte est ouverte et qu'une boule fermée est fermée (d'où la terminologie).

Exercice 1.1.15. Montrer que $D \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert et $D_f \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ est fermé.

Proposition 1.1.16.

1. *L'ensemble vide* $\emptyset$ *et* $\mathbb{R}^2$ *sont ouverts et fermés.*
2. *L'union quelconque d'ouverts est ouverte.*
3. *L'intersection finie d'ouverts est ouverte.*
4. *L'intersection quelconque de fermés est fermée.*
5. *L'union finie de fermés est fermée.*

Démonstration. 1) L'ensemble $\emptyset$ est trivialement ouvert. Et pour $x \in \mathbb{R}^2$, $B(x,1) \subset \mathbb{R}^2$ par définition et donc $\mathbb{R}^2$ est ouvert. Par passage au complémentaire, $\mathbb{R}^2$ et $\emptyset$ sont aussi fermés.

2) Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts. Montrons que $\bigcup_{i \in I} U_i$ est ouvert.
Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Fixons $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U_{i_0}$ (qui existe car U_{i_0} est ouvert). Alors $B(x,\varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

3) Soient $U_1, \dots, U_n$ des ouverts. Montrons que $\bigcap_{i=1}^n U_i$ est ouvert.
Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. Comme $x \in U_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et que les U_i sont ouverts pour tout i alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \exists \varepsilon_i > 0, B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$$

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, fixons un tel ε_i. Posons $\varepsilon \coloneqq \min(\varepsilon_i, 1 \leq i \leq n) > 0$. Alors

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, B(x,\varepsilon) \subset B(x,\varepsilon_i) \subset U_i$$

et donc $B(x,\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$.

4)5) découlent de 2) et 3) par passage au complémentaire. □

Remarque 1.1.17. L'intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement ouverte et l'union quelconque de fermés n'est pas nécessairement fermée.

Exercice 1.1.18. — Montrer que $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[^2$ est ouvert pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mais que $\bigcap_{n\geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[^2$ ne l'est pas.

— Montrer que $\left[-1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$ est fermé pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mais que $\bigcup_{n\geq 1} \left[-1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$ ne l'est pas.

Définition 1.1.19. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$.
On définit l'*intérieur* de S par

$$\mathring{S} := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \subset S\right\},$$

l'*adhérence* de S par

$$\overline{S} := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset\right\}.$$

Définition 1.1.20. On dit que S est *dense dans* E si $\overline{S} = E$

Exercice 1.1.21. Soient $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrer les égalités suivantes :

— $\mathring{\widehat{B_f(a, r)}} = B(a, r)$;
— $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$.

Exercice 1.1.22. Montrer que l'adhérence de $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et que l'intérieur de $D_f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ est D.

Proposition 1.1.23. *Soit* $S \subset \mathbb{R}^2$.
On a les égalités suivantes :

1. $\overline{S^c} = (\mathring{S})^c$;
2. $\mathring{\widehat{S^c}} = (\overline{S})^c$.

Démonstration. Nous allons montrer que $\left(\overline{S^c}\right)^c = \mathring{S}$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes

i) $x \in \left(\overline{S^c}\right)^c$;
ii) $x \notin \overline{S^c}$;
iii) $\neg\,(\forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap S^c \neq \emptyset)$;
iv) $\exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap S^c = \emptyset$;
v) $\exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \subset S$;
vi) $x \in \mathring{S}$.

iii) équivalent à iv) vient du fait ensembliste suivant[1] : $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$.

On déduit de ces équivalences que $\left(\overline{S^c}\right)^c = \mathring{S}$. En utilisant cette égalité avec S^c, on obtient :

$$\overline{S} = \left(\mathring{\widehat{S^c}}\right)^c$$

et donc par passage au complémentaire

$$\overline{S}^c = \mathring{\widehat{S^c}}$$

et donc 2). □

1. $\Rightarrow$: $A \cap B \subset B^c \cap B = \emptyset$ et donc $A \cap B = \emptyset$ et $\Leftarrow$: si $A \cap B = \emptyset$ alors si $x \in A$, x ne peut pas être dans B car sinon $x \in A \cap B = \emptyset$ et donc $x \in B^c$.

Exercice 1.1.24. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\mathring{S} \subset S \subset \overline{S}$.
2. (a) Montrer que $\mathring{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S.
   (b) En déduire que S est un ouvert si et seulement si $\mathring{S} = S$.
3. (a) Montrer que $\overline{S}$ est le plus petit fermé contenant S.
   (b) En déduire que S est fermé si et seulement si $\overline{S} = S$.

Exercice 1.1.25.

1. Montrer les propriétés suivantes :

i) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ S \subset T \implies \overline{S} \subset \overline{T}$	i′) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ S \subset T \implies \mathring{S} \subset \mathring{T}$
ii) $\forall S \subset \mathbb{R}^2,\ \overline{\overline{S}} = \overline{S}$	ii′) $\forall S \subset \mathbb{R}^2,\ \mathring{\mathring{S}} = \mathring{S}$
iii) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ \overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$	iii′) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ \overset{\circ}{\widehat{S \cap T}} = \mathring{S} \cap \mathring{T}$
iv) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ \overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$	iv′) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ \overset{\circ}{\widehat{S \cup T}} \supset \mathring{S} \cup \mathring{T}$

2. Que dire des inclusions réciproques de iv) et iv′) ?

1.2 Suites dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.2.1. Une *suite dans* $\mathbb{R}^2$ est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$. On écrit u_n au lieu de $u(n)$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera $\left(u_n^{(1)}\right)$ et $\left(u_n^{(2)}\right)$ les suites de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}\right).$$

Ce sont les composées de u avec les deux projections $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$.

Définition 1.2.2. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$. Une *suite d'éléments de* S, ou dans S, est une suite (u_n) de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in S.$$

Si $S = \mathbb{R}^2$, on omettra « de $\mathbb{R}^2$ ».

Définition 1.2.3. Soit (u_n) une suite et soit $\ell \in \mathbb{R}^2$. On dit que (u_n) *admet* ℓ *comme limite* ou *converge vers* ℓ ou *tend vers* ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

Dans ce cas on utilisera indifféremment les notations suivantes $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$.

Proposition 1.2.4. *Soient* (u_n) *une suite de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $u_n \to \ell$;
2. $\|u_n - \ell\| \to 0$;
3. $|u_n^{(i)} - \ell_i| \to 0$, $i \in \{1, 2\}$;
4. $u_n^{(i)} \to \ell_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Démonstration. Les équivalences 1) ⇔ 2) et 3) ⇔ 4) viennent du fait que les définitions quantifiées sont identiques (car $\|u_n - \ell\| = |\|u_n - \ell\| - 0|$ et $|u_n^{(i)} - \ell_i| = ||u_n^{(i)} - \ell_i| - 0|$ pour tout n).

Montrons maintenant l'équivalence 2) ⇔ 3)

Supposons 2). Soit $i \in \{1,2\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n^{(i)} - \ell_i| \leq \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

On en déduit donc que $|u_n^{(i)} - \ell_i| \to 0$ pour $i \in \{1,2\}$.

Réciproquement, supposons que $|u_n^{(i)} - \ell_i| \to 0$ pour $i \in \{1,2\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_n^{(1)} - \ell_1| < \varepsilon$$

et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |u_n^{(2)} - \ell_2| < \varepsilon.$$

On en déduit que pour $n \geq \max(N_1, N_2)$,

$$\|u_n - \ell\| = \max(|u_n^{(1)} - \ell_1|, |u_n^{(2)} - \ell_2|) < \varepsilon.$$

et donc $\|u_n - \ell\| \to 0$. □

Corollaire 1.2.5. *La limite, quand elle existe, est unique.*

Exercice 1.2.6. Démontrer le corollaire 1.2.5.

Corollaire 1.2.7. *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites convergentes de limite respective* ℓ *et* ℓ'. *Alors*

— $u_n + v_n \to \ell + \ell'$

— $\|u_n\| \to \|\ell\|$.

Exercice 1.2.8. Démontrer le corollaire 1.2.7.

Définition 1.2.9. Une suite (u_n) de $\mathbb{R}^2$ est dite *bornée* si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M.$$

Proposition 1.2.10. *Une suite convergente est bornée.*

Exercice 1.2.11. Démontrer la proposition 1.2.10.

Proposition 1.2.12. *Soit* $S \subset \mathbb{R}^2$ *et* (u_n) *une suite convergente d'éléments de* S. *Alors*

$$\lim_{n \to \infty} u_n \in \overline{S}.$$

Démonstration. Notons ℓ la limite de (u_n). Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| < \varepsilon.$$

En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_N - \ell| < \varepsilon$ et donc

$$B(\ell, \varepsilon) \cap \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset.$$

Comme (u_n) est une suite d'éléments de S alors

$$B(\ell, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset.$$

et donc $\ell \in \overline{S}$. □

Corollaire 1.2.13. *Soit* $S \subset \mathbb{R}^2$. *La partie* S *est fermée si, et seulement si, toute suite convergente de* S *converge dans* S.

Démonstration. Rappelons que S est fermée si, et seulement si, $S = \overline{S}$ (cf. 1.1.24).
Si S est fermée alors $S \subset \overline{S}$ et donc par 1.2.12, toute suite convergente de S converge dans $\overline{S} = S$.
Réciproquement, supposons que toute suite convergente de S converge dans S. On sait que $S \subset \overline{S}$ (cf. 1.1.24). Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \overline{S}$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S = \emptyset.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, fixons un $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap S$. Alors (x_n) est une suite de S convergeant vers x (on utilise le théorème d'encadrement de $\mathbb{R}$ et 1.2.4). Par hypothèse, $x = \lim x_n \in S$ et donc $\overline{S} \subset S$. □

Dans la démonstration, on a montré le résultat suivant :

Corollaire 1.2.14. *Soit $S \subset \mathbb{R}^2$. Si $x \in \overline{S}$ alors il existe une suite (x_n) de S tel que $x_n \to x$.*

Remarque 1.2.15. Dans le cas de $\mathbb{R}$, comme une suite convergente de $[a, b]$ a une limite dans $[a, b]$ (par passage à la limite des inégalités), les intervalles « fermés » $[a, b]$ sont fermés (dans $\mathbb{R}$).

1.3 Fonctions continues de $\mathbb{R}^2$

Notation 1.3.1. Soit $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Pour la définition suivante, on considèrera sur $\mathbb{R}^m$ la « norme » suivante :

$$\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m} : (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mapsto \max(|x_1|, \ldots, |x_m|) \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1.3.2. Vérifier que cette fonction vérifie (mutatis mutandis) la proposition 1.1.1.

Remarque 1.3.3. Les notions de « boule ouverte », « boule fermé », « ouvert », « fermé » s'étendent à l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^m})$.

Définition 1.3.4. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.
On dit que $f : S \to \mathbb{R}^m$ est *continue* en $x \in S$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in S,\ \|x - y\| < \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

On dit qu'elle est continue si elle est continue en tout point de S.

Remarque 1.3.5. Comme la définition ne porte pas sur le domaine d'arrivée (mise à part qu'on demande que f soit une fonction), on peut restreindre le domaine d'arrivée à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ contenant l'image de f. On peut donc parler de continuité pour une fonction $S \to T \supset f(S)$.

Remarque 1.3.6. On peut remplacer la norme $\|\cdot\|$ par la norme $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ afin de définir la notion de continuité pour une fonction $S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Remarque 1.3.7. On peut définir[2] de façon analogue la limite d'une fonction $S \to \mathbb{R}$ en un point de $\overline{S}$ (ce qui a un sens grâce à la définition d'adhérence) : on dit que f converge vers $\ell \in \mathbb{R}^2$ en $a \in \overline{S}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in S,\ \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - \ell\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon.$$

Remarque 1.3.8. Cette définition est équivalente à celle où on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges (quitte à remplacer ε par 2ε ou $\frac{\varepsilon}{2}$ selon le sens désiré).

2. Dans ce cours, on s'intéressera, pour l'essentiel, qu'à la continuité des fonctions ou à calculer des limites sur $\overline{S} \setminus S$. Ainsi, le sempiternel débat sur la caractère pointé/épointé de la limite n'a pas lieu d'être ici.

Exercice 1.3.9. Montrer qu'une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ est continue.

Exercice 1.3.10. Montrer que $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue.

Proposition 1.3.11. *Soient* $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$, $g : T \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *deux fonctions. Supposons que* $f(S) \subset T$, f *est continue en* $a \in S$ *et* g *est continue en* $f(a)$*. Alors* $g \circ f$ *est continue en* a.

Exercice 1.3.12. Démontrer la proposition 1.3.11.

Proposition 1.3.13. *Soit* $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$*. Soient* $f_1, \dots, f_m : S \to \mathbb{R}$ *les fonctions coordonnées de* f*, c'est-à-dire*

$$\forall x \in S, f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

La fonction f *est continue (en* $x \in S$*) si, et seulement si, les fonctions* $f_1, \dots, f_m$ *sont continues (en* x*).*

Démonstration. C'est la même démonstration que 1.2.4 □

Remarque 1.3.14. De la même façon, le calcul de limite se fait coordonnées par coordonnées.

Proposition 1.3.15. *Soient* $f, g : S \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues (en* $a \in S$*) et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors*

1. $f + \lambda g$ *est continue (en* $a \in S$*) ;*
2. fg *est continue (en* $a \in S$*).*

Exercice 1.3.16. Démontrer la proposition 1.3.15.

Proposition 1.3.17. *Soit* $f : S \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $T \subset S$*. Alors* $f_{|T}$ *est une fonction continue.*

Démonstration. Cela vient du fait que pour une famille d'assertions $(\mathscr{P}(x))_{x \in S}$, si $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in S$ alors elle est vraie pour tout $x \in T \subset S$. □

Remarque 1.3.18. La notion de continuité d'une fonction en un point est locale. En effet, $f : S \to \mathbb{R}^m$ est continue en x si, et seulement si, il existe $\delta > 0$ tel que $f_{|S \cap B(x,\delta)}$ est continue en x.

Exercice 1.3.19. Soient $S \subset \mathbb{R}^2$ et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction.
Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. f est continue ;
2. Pour tout ouvert[3] U de $\mathbb{R}$, il existe un ouvert V de E tel que $f^{-1}(U) = V \cap S$;
3. Pour tout fermé[4] C de $\mathbb{R}$, il existe un fermé D de E tel que $f^{-1}(C) = D \cap S$.

Proposition 1.3.20 (Critère séquentiel de continuité)**.** *Soit* $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction. Alors* f *est continue en* $a \in S$ *si, et seulement si, pour toute suite* (u_n) *d'éléments de* S *qui converge vers* a*,* $(f(u_n))$ *converge vers* $f(a)$*.*

Démonstration. $\Rightarrow$: Supposons que f est continue en a. Soit $\varepsilon > 0$. On peut se fixer $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Soit (u_n) une suite qui converge vers a. Fixons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_n - a\| < \delta.$$

3. on rappelle que $U \subset \mathbb{R}$ est ouvert si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$
4. le complémentaire d'un ouvert de $\mathbb{R}$

Ainsi, pour tout $n \geq N$,
$$|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon.$$
et donc $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

$\Leftarrow$: On va le démontrer par contraposée : supposons donc que f n'est pas continue en a i.e.
$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \|x - a\| < \delta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$
Fixons un tel ε. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc choisir (en prenant $\delta = \frac{1}{n+1}$ pour chaque n) un x_n tel que
$$\|x_n - a\| < \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon.$$
On a ainsi construit une suite (x_n) qui converge vers a mais telle que $(f(x_n))$ ne converge pas vers $f(a)$. $\square$

Remarque 1.3.21. Ce critère est utilisé de deux façons : calculer la limite d'une suite à valeur réelles (comme dans le cas dans $\mathbb{R}$) et surtout permettre de montrer qu'une fonction n'est pas continue. Pour cela, il faut exhiber une suite qui converge vers un point donné mais tel que l'image de cette suite ne converge pas vers la limite du point

Exercice 1.3.22. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y}{x^2 + y} & \text{si } y \neq -x^2 \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$
n'est pas continue en $(0, 0)$ pour n'importe quel choix de $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.3.23. *Soit* $f : S \to \mathbb{R}$ *une fonction. Supposons qu'il existe une fonction* $\eta : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ *qui tend vers* 0 *en* 0 *telle que*
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall r > 0, |f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - f(0, 0)| < \eta(r)$$
Alors f *est continue en* $(0, 0)$.

Démonstration. Fixons une telle fonction η. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\eta(r) \to 0$ alors fixons $\delta > 0$ tel que
$$\forall r \in \mathbb{R}_{>0}, r < \delta \Rightarrow \eta(r) < \varepsilon.$$
Soit $(x, y) \in S \setminus \{0\}$ avec $\|(x, y)\| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Comme $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$ alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in]0, \delta[$ tels que $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Alors
$$|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - f(0, 0)| < \eta(r) < \varepsilon$$
$\square$

Avertissement 1.3.24. La convergence pour tout θ de $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ pour $r \to 0$ n'est pas suffisante pour conclure à la continuité de f. On a besoin de la majoration uniforme en θ donnée dans la proposition 1.3.23.

Exercice 1.3.25. Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{r \to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0$$

2. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Définition 1.3.26. Une fonction $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2$ est un *homéomorphisme* si

— f est continue ;

— f est une bijection ;

— f^{-1} est continue.

On dit que S et D sont homéomorphes.

Remarque 1.3.27. Un homéomorphisme $S \to D$ induit une bijection entre les ensembles d'ouverts (resp. fermés) de S et D. Cependant un homéomorphisme ne préserve la norme (on parlerait alors d'isométrie).

Exemple 1.3.28. Soit $f : D \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \to B(0, 1)$ définie par

$$\forall u \in D, f(u) \coloneqq \frac{u}{\|u\|}.$$

Cette fonction est un homéomorphisme.

Exercice 1.3.29. Montrer que $B(0, 1)$ et $B(a, R)$ sont homéomorphes pour n'importe quel choix de $a \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$.

Exercice 1.3.30. Montrer que $B(0, 1)$ et $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes.

Remarque 1.3.31. Pour les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les deux premières conditions impliquent la troisième (car une fonction continue et bijective est strictement monotone grâce à des considérations utilisant le théorème de la limite monotone). Ce n'est pas le cas dans le cas général.

Exercice 1.3.32. Montrer que

$$\theta \in [0, 2\pi[\mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in S^1 \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

est une fonction continue bijective mais n'est pas un homéomorphisme.

1.4 Théorème des bornes atteintes et compacité

Définition 1.4.1. On appelle *(fonction) extractrice* une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Proposition 1.4.2. *Une fonction extractrice φ vérifie*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$$

Exercice 1.4.3. Démontrer la proposition 1.4.2.

Définition 1.4.4. Soit (u_n) une suite. Alors une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$, où φ est une fonction extractrice, est appelée *sous-suite* ou *suite extraite* de (u_n).

Proposition 1.4.5. *Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}^2$ convergente vers $\ell \in \mathbb{R}^2$. Alors toute sous-suite de (u_n) converge vers ℓ.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

Comme une fonction extractrice φ vérifie $\varphi([\![N, +\infty[\![) \subset [\![N, +\infty[\![$ (par la la proposition 1.4.2) alors

$$\forall n \geq N, \|u_{\varphi(n)} - \ell\| < \varepsilon$$

et donc $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ. $\square$

Définition 1.4.6. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$. On dit que S est une *partie compacte* (ou est un *compact*) si de toute suite d'éléments de S on peut en extraire une sous-suite convergente dans S.

Remarque 1.4.7. On peut remplacer dans la proposition 1.4.5 et dans la définition 1.4.6 $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^m$ et remplacer $\|\cdot\|$ par $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$.

Proposition 1.4.8 (Bolzano-Weierstraß)**.** *De toute suite bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Exemple 1.4.9. Montrons que $B_f(0, R)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\left(u_n = \left(u_n^{(1)}, u_n^{(2)}\right)\right)$ une suite de $B_f(0, R)$. On en déduit que les deux suites $(u_n^{(1)})$ et $(u_n^{(2)})$ sont des suites de $[-R, R]$ et sont donc bornées. Par Bolzano-Weierstraß, on peut fixer une extractrice φ_1 telle que $(u^{(1)}_{\varphi_1(n)})$ soit convergente vers un élément de $[-R, R]$ (cf. 1.2.15).

Comme la suite $(u^{(2)}_{\varphi_1(n)})$ est aussi bornée alors on peut fixer une extractrice φ_2 telle que $(u^{(2)}_{\varphi_1(\varphi_2(n))})$ converge (vers un élément de $[-R, R]$). Comme $(u^{(1)}_{\varphi_1(\varphi_2(n))})$ est une sous-suite d'une suite convergente alors elle converge aussi.

En conclusion, par 1.2.4, la suite $(u_{\varphi_1(\varphi_2(n))})$ converge vers un élément de $B_f(0, R)$. Ce qui conclut la démonstration de la compacité de $B_f(0, R)$.

Proposition 1.4.10. *Soit K un compact et $S \subset K$. Si S est fermée alors S est compacte.*

Démonstration. Supposons que S est fermée. Soit (u_n) une suite de S. Comme (u_n) est, en particulier, une suite de K alors, par compacité de K, on peut fixer une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge. Comme $(u_{\varphi(n)})$ est une suite convergente de S alors sa limite est dans S (cf. 1.2.13). La suite (u_n) admet donc une sous-suite convergente dans S. On en déduit donc que S est compacte. $\square$

Définition 1.4.11. Soit $S \subset \mathbb{R}^m$. On dit que S est une *partie bornée* (ou est un *borné*) s'il existe $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que

$$\forall x \in S, \|x\|_{\mathbb{R}^m} \leq M.$$

Exercice 1.4.12. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrer que $B_f(a, r)$ est bornée.

Proposition 1.4.13. *Soit $K \subset \mathbb{R}^2$. Si K est compacte alors elle est fermée et bornée.*

Démonstration. Supposons K compacte. Soit (u_n) une suite convergente de K. Notons ℓ sa limite. Alors par compacité, (u_n) admet une sous-suite convergeant dans K. Mais toutes les sous-suites de (u_n) converge vers ℓ (cf. 1.4.5). Donc $\ell \in K$.

Supposons que K n'est pas bornée i.e.

$$\forall M \geq 0, \exists x \in K, \|x\| > M$$

On peut donc considérer une suite (u_n) de K telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| > n$$

Supposons qu'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge. Par 1.2.10, cette sous-suite est bornée, ce qui absurde car

$$\|u_{\varphi(n)}\| > \varphi(n) \geq n \to \infty.$$

□

La réciproque de cette proposition est vraie[5] :

Proposition 1.4.14. *Soit $S \subset \mathbb{R}^2$. Si S est fermée et bornée alors elle est compacte.*

Démonstration. Supposons S fermée et bornée.

Soit (u_n) une suite de S. Comme (u_n) est bornée alors ses coordonnées $(u_n^{(1)})$ et $(u_n^{(2)})$ sont aussi bornées. De la même façon que dans 1.4.9, on peut utiliser le théorème de Bolzano-Weierstraß pour obtenir une extractrice φ telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge. Comme c'est une suite de S alors sa limite est aussi dans S (car S est fermé). En conclusion, on a trouvé une sous-suite (u_n) qui converge dans S. La partie S est donc compacte. □

Corollaire 1.4.15. *Soit K un compact non-vide de $\mathbb{R}^m$. Alors l'ensemble $\{\|x\|, x \in K\} \subset \mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum.*

Démonstration. On va faire le cas « maximum ». Le minimum se fait de la même façon. L'ensemble $\{\|x\|, x \in K\} \subset \mathbb{R}$ est une partie non-vide (car K est non-vide) et majorée (car K est bornée car compacte, cf. 1.4.13). Elle a donc une borne supérieure $\sup_{x \in K} \|x\|$ que l'on notera dans la suite M. Montrons que cette borne supérieure est atteinte.

Par les propriétés de la borne supérieure, on peut trouver une suite (u_n) dans $\{\|x\|, x \in K\} \subset \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} < u_n \leq M.$$

Comme $u_n \in \{\|x\|, x \in K\}$ pour tout n alors on peut trouver une suite (x_n) de K telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} < \|x_n\| \leq M.$$

Comme K est compacte alors on peut choisir une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $\ell \in K$. On a les inégalités suivantes grâce à la proposition 1.4.2

$$\forall n \in \mathbb{N}, M - \frac{1}{n+1} \leq M - \frac{1}{\varphi(n)+1} < \|x_{\varphi(n)}\| \leq M.$$

En passant à la limite, on obtient avec le corollaire 1.2.7 et le théorème des gendarmes,

$$\|\ell\| = M$$

La borne supérieure $\sup_{x \in K} \|x\|$ est donc atteinte et est donc un maximum. □

Exercice 1.4.16. En reprenant cette démonstration, montrer que si $K \subset \mathbb{R}$ est compact alors K admet un minimum et un maximum.

Proposition 1.4.17. *Soient S une partie de $\mathbb{R}^2$, $K \subset S$ et $f \colon S \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Si K est compacte alors $f(K)$ est compacte.*

5. mais contrairement à la proposition précédente, elle n'est vraie que dans des espaces vectoriels normés qui sont de dimension finie.

Démonstration. Supposons que K est compacte. Soit (y_n) une suite de $f(K)$. Soit (x_n) une suite de K telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n = f(x_n)$$

Comme (x_n) est une suite dans le compact K alors on peut fixer une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $\ell \in K$. Alors, par continuité de f (cf. 1.3.20), $(y_{\varphi(n)}) = (f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(\ell) \in f(K)$. On a donc trouvé une sous-suite de (y_n) convergeant dans $f(K)$, ce qui permet de conclure. □

Définition 1.4.18. Une fonction $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ est dite bornée si $f(S)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^m$.

Corollaire 1.4.19. *Soit* $f \colon K \to \mathbb{R}$ *une fonction continue définie sur un compact* K *non-vide. Alors* f *est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. Comme K est compacte et f est continue alors $f(K)$ est compacte (par 1.4.17). Elle est en particulier bornée (par 1.4.13). Grâce à 1.4.16, $f(K)$ a un minimum $m = f(x_{\min}) \in f(K)$ et un maximum $M = f(x_{\max}) \in f(K)$. Les réels m et M sont les bornes de f et sont respectivement atteints en $x_{\min}$ et $x_{\max}$ □