

Analyse numérique

Devoir maison

Exercice 1 (Méthode de la fausse position). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante, vérifiant $f(a) < 0 < f(b)$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x^* \in [a, b]$ tel que $f(x^*) = 0$.
2. Soit $\alpha < \beta \in [a, b]$ tels que $f(\alpha) \leq 0 \leq f(\beta)$. Montrer que le segment reliant les points $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, dont on notera l'abscisse $x_{\alpha, \beta}$. Donner une formule explicite pour $x_{\alpha, \beta}$.

Si $\alpha = \beta$, on pose $x_{\alpha, \beta} = \alpha$.

On définit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

$$a_0 = a, \quad b_0 = b$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} (a_{n+1}, b_{n+1}) = (x_{a_n, b_n}, b_n) & \text{si } f(x_{a_n, b_n}) < 0 ; \\ (a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, x_{a_n, b_n}) & \text{si } f(x_{a_n, b_n}) > 0 ; \\ (a_{n+1}, b_{n+1}) = (x_{a_n, b_n}, x_{a_n, b_n}) & \text{si } f(x_{a_n, b_n}) = 0. \end{cases}$$

3. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

On note ℓ_a et ℓ_b leurs limites respectives.

4. Montrer que $f(\ell_a) \leq 0 \leq f(\ell_b)$.
5. On veut montrer qu'au moins une des deux limites ℓ_a, ℓ_b est égale à x^* , c'est-à-dire que $f(\ell_a) = 0$ ou $f(\ell_b) = 0$.
On suppose par l'absurde que $f(\ell_a) < 0$ et $f(\ell_b) > 0$.
 - (a) Montrer que l'application $(\alpha, \beta) \mapsto x_{\alpha, \beta}$ est continue en (ℓ_a, ℓ_b) .
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq \max(x_{a_n, b_n} - a_n, b_n - x_{a_n, b_n}).$$

(c) Conclure.

6. On suppose f strictement convexe. Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^*$.
7. Écrire une fonction Python qui, étant donné une fonction f , deux bornes a, b et un entier naturel n , renvoie a_n et b_n .

Exercice 2. Faire l'exercice 11 du TD3.