Exercices sur les suites

Exercice 1. En utilisant les définitions du cours, montrer que

1. la suite de terme général $u_n = \frac{3n+17}{n+4}$ tend vers 3 ;
2. la suite de terme général $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ tend vers $+\infty$;
3. la suite de terme général $u_n = \frac{n+7}{3n+2}$ tend vers $\frac{1}{3}$;
4. la suite de terme général $u_n = \frac{3^n+1}{2^{n+1}-1}$ tend vers $+\infty$;
5. Démontrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n^2-4}{n^2+3}$ converge vers 1
6. Démontrer que la suite de terme général $u_n = n^3 + 7$ converge vers $+\infty$.
7. Démontrer que la suite de terme général $u_n = \frac{2+n}{n^2-3}$ converge vers 0
8. Démontrer que la suite de terme général $u_n = n^4 - 7$ converge vers $+\infty$.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $2u_{n+1} = -u_n + 6$ pour tout $n \geq 0$.

1. Étudier la monotonie de (u_n).
2. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - 2$ est géométrique, en donner une expression en fonction de n et montrer qu'elle est convergente.
3. En déduire que (u_n) converge et donner la limite de (u_n).
4. Soit (T_n) la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
Déterminer l'expression de T_n en fonction de n et en donner un équivalent simple.

Exercice 3. Donner un équivalent simple des suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et (v_n) définies par

1. $u_n \coloneqq n \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)$
2. $v_n \coloneqq \sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}$

Exercice 4. Soit (P_n) la suite (dite de Pell) définie par $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n. \qquad (*)$$

1. Déterminer les deux suites géométriques (a_n) et (b_n) de valeur initiale $a_0 = b_0 = 1$ vérifiant la relation de récurrence (*).
On supposera dans la suite que la raison de (a_n) est supérieure à celle de (b_n).
2. Déterminer l'unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 = P_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 = P_1 \end{cases}$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

4. Trouver un équivalent simple de (P_n).

Exercice 5. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $2u_{n+1} = u_n + 3$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que $u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - 3$ est géométrique et convergente.
5. En déduire la limite de (u_n).
6. Soit (T_n) la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
Déterminer l'expression de T_n en fonction de n et en donner un équivalent simple.

Exercice 6.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$
sont convergentes et de même limite.
3. En déduire que la suite de terme général
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
est équivalente à la suite de terme général $2\sqrt{n}$

Exercice 7. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$
ont la même limite