

Fonctions à deux variables

Feuille 3 : Différentiabilité seconde et optimisation

1 Dérivées secondes

Exercice 1. Calculer les matrices hessiennes (si elles existent) des fonctions suivantes :

1. $f_1: (x, y) \in \mathbb{R} \mapsto x^m y^n \in \mathbb{R}$ avec $(m, n) \in \mathbb{N}^2$;
2. $f_2: (x, y) \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \cos(xy) \in \mathbb{R}$;
3. $f_3: (x, y) \in]0, +\infty[^2 \mapsto x^y \in \mathbb{R}$
4. $f_4: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mapsto \|(x, y)\|_2 \in \mathbb{R}$

Exercice 2. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 et les calculer.
2. Montrer que

$$\partial_{xy}^2 f(0, 0) = 1, \quad \partial_{yx}^2 f(0, 0) = -1$$
3. En déduire que f n'est pas \mathcal{C}^2 en $(0, 0)$.

Exercice 3. Déterminer les solutions de classe \mathcal{C}^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

Exercice 4. Soit $c \neq 0$. Déterminer les solutions de classe \mathcal{C}^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

en calculant $\partial_{uv}(f \circ \varphi)$ avec $\varphi: (u, v) \mapsto \left(\frac{u-v}{2c}, \frac{u+v}{2}\right)$.

Exercice 5. Si $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 , on appelle laplacien de f la fonction

$$\Delta f := \partial_x^2 f + \partial_y^2 f.$$

1. Montrer que $\Delta: \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ est une application linéaire.
2. Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Montrer que

$$\forall x \in U, \Delta(fg)(x) = \Delta f(x)g(x) + 2 \langle \nabla_x f, \nabla_x g \rangle + f(x)\Delta g(x).$$

3. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $\int_a^b f(x)f''(x) dx \leq 0$
Avec les mêmes idées, et une théorie de l'intégration dans \mathbb{R}^2 , on pourrait montrer qu'une fonction f de classe \mathcal{C}^2 définie sur un ouvert contenant un compact K et s'annulant sur le bord $K \setminus \overset{\circ}{K}$ (avec des hypothèses de régularité) vérifie $\int_K f \Delta(f) \leq 0$.
4. Soient $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire (de matrice représentative dans la base canonique M). Soit $x \in \mathbb{R}^2$.
- Calculer $d_x(f \circ L)$;
 - Calculer $\text{Hess}_x(f \circ L)$;
On pourra remarquer que $\text{Hess}_x(f \circ L) = \text{Jac}_x(t \mapsto \nabla_t(f \circ L))$
 - Si M est une matrice orthogonale, c'est-à-dire si $MM^T = I_2$, montrer que $\Delta(f \circ L) = (\Delta f) \circ L$.
On pourra utiliser que $\text{tr}(\text{Hess}_x(f)) = \Delta f(x)$.
5. Notons $\Phi : (r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2$.
- Montrer que Φ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 .
 - Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que

$$\forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[, \Delta(f) \circ \Phi(r, \theta) = \frac{\partial^2(f \circ \Phi)}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(f \circ \Phi)}{\partial \theta^2}(r, \theta)$$

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique radiale, c'est-à-dire une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que
 - $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \|x\|_2 = \|y\|_2 \Rightarrow f(x) = f(y)$;
 - $\Delta(f) = 0$.
 i. Justifier l'existence et l'unicité d'une fonction $g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[, f \circ \Phi(r, \theta) = g(r).$$

- Calculer $\partial_\theta(f \circ \Phi)$.
- Montrer que g vérifie l'équation différentielle suivante : $g'' + \frac{1}{r}g' = 0$.
- En conclure l'ensemble des fonctions harmoniques radiales $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Que peut-on dire sur les fonctions harmoniques radiales $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

2 Extrema locaux et hessiennes

Exercice 6. Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

Exercice 7. Écrire la réduction de la hessienne de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := x^3 - x^2 + y^3 - xy^2 + 5y + 3xy$$

en $(1, 1)$.

Exercice 8.

- Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive ou négative si, et seulement si, $\det(A) > 0$.
- Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est définie positive (resp. négative) si, et seulement si, $\det(A) > 0$ et $\text{tr}(A) > 0$ (resp. $\text{tr}(A) < 0$).

Exercice 9. Déterminer les extrema locaux des fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

- $(x, y) \mapsto y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$
- $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$
- $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On suppose que f est constante sur $B_f(0, 1) \setminus B(0, 1)$. Démontrer l'existence de $x_0 \in B(0, 1)$ tel que $d_{x_0}f = 0$.

Exercice 11 (Fonctions convexes). Soit U un ouvert convexe de \mathbb{R}^n i.e. pour tout $t \in [0, 1]$, pour tout $x, y \in U$, $(1-t)x + ty \in U$. On dit qu'une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe si

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Elle est dite strictement convexe si

$$\forall x, y \in U, x \neq y, \forall t \in]0, 1[, f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y).$$

Elle est dite (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

1. Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ sont des fonctions convexes.
2. Montrer que $\|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + xy + y^2$ sont des fonctions convexes.
3. Montrer que la somme de deux fonctions convexes est convexe.
4. Soient $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions convexes avec g croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
5. Montrer que f est convexe si, et seulement si, son épigraphe $\{(x, y) \in U \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}$ est convexe.
6. Supposons que f est une fonction différentiable.

(a) Supposons que $n = 1$ et que U est un intervalle (ouvert) que l'on notera I .

i. Montrer que f est convexe sur I si et seulement si, pour tous $x < y < z$ éléments de I ,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

(la convexité stricte se trouve en remplaçant \leq par $<$). On appelle cette inégalité l'*inégalité des (trois) pentes*.

ii. En déduire que les conditions suivantes sont équivalentes :

- La fonction f est convexe sur I .
- La courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur I .
- La dérivée de f est croissante sur I .

(b) Montrer que $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est (strictement) convexe si, et seulement si, pour tout $x, y \in U$, $x \neq y$, la fonction $t \in]0, 1[\mapsto f((1-t)x + ty) \in \mathbb{R}$ est une fonction (strictement) convexe.

(c) En déduire que $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe si, et seulement si,

$$\forall x, y \in U, f(y) \geq f(x) + d_x f(y - x).$$

(d) En reprenant les questions précédentes, montrer que $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction strictement convexe si, et seulement si,

$$\forall x, y \in U, x \neq y, f(y) > f(x) + d_x f(y - x).$$

7. Supposons que f est de classe \mathcal{C}^2 .

(a) Supposons que $n = 1$ et U est un intervalle ouvert I . En utilisant la question 6(a)ii, montrer que f est une fonction convexe si, et seulement si, f'' est positive sur I .

(b) En déduire que $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, $\text{Hess}(f)$ est positive sur U .

(c) Montrer que si $\text{Hess}(f)$ est définie positive alors f est strictement convexe.

(d) Montrer que la réciproque est fautive.

On pourra essayer de trouver un contre-exemple en dimension 1.

8. Montrer que :

$$\forall x \in [0, \pi/2], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

9. Soient a_1, \dots, a_n des réels strictement positifs. Montrer l'inégalité suivante :

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

10. Supposons que f est une fonction convexe. Soit $a \in U$.

- (a) Montrer que si f admet un minimum local en a alors f admet un minimum global en a .
- (b) Montrer que si f est strictement convexe alors le minimum global de f (s'il existe) est atteint en un unique point.
- (c) Supposons que f est différentiable en a et que a est un point critique de f . Montrer que a est un minimum global de f .

Exercice 12. Soit A un fermé de \mathbb{R}^2 . Soit f une fonction continue $A \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \geq 0, \forall x \in A, \|x\| > N \Rightarrow f(x) > M.$$

Montrer que f admet un minimum global.

Exercice 13 (Théorème du point fixe). Soit $F \subset \mathbb{R}^2$ une partie fermée.

Soit $f : F \rightarrow F$ une fonction contractante (i.e. une fonction lipschitzienne de constante $q \in [0, 1[$, autrement dit on suppose qu'il existe $q \in [0, 1[$ tel que $\forall x, y \in F, \|f(x) - f(y)\| \leq q\|x - y\|$).

1. Montrer que f est continue.

Soit $x_0 \in F$. On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F en posant $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_{n+1} - x_n\| \leq q^n \|x_1 - x_0\|$.
3. Montrer que $\forall m, n \in \mathbb{N}, m > n \implies \|x_m - x_n\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|$.
4. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
5. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F .

On pourra remarquer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy implique qu'elle est convergente.

6. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 14 (Descente de gradient). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose qu'il existe ℓ et L dans $]0, +\infty[$ tels que, pour tout $a \in \mathbb{R}^2$ les valeurs propres de $\text{Hess}_a(f)$ sont comprises entre ℓ et L .

Soit $x \in \mathbb{R}^2$ et $\tau \in]0, \frac{2}{L}[$. On définit la suite (x_n) par :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_{n+1} = x_n - \tau \nabla_{x_n} f. \end{cases}$$

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, F(x) := x - \tau \nabla_x f.$$

1. Montrer que f a un minimum global atteint en un unique point x^* .
2. Montrer que x^* est l'unique point fixe de F .
3. On va montrer que F est contractante.
 - (a) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 et pour tout $x, h \in \mathbb{R}^2$,

$$d_x F(h) = h - \tau \text{Hess}_x f(h);$$

- (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\text{Jac}_x f$ est symétrique (réelle) puis qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée (v, w) ;
- (c) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall h \in \mathbb{R}^2, \|d_x F(h)\|_2^2 \leq \left(\max_{\lambda \in \text{Sp}(\text{Jac}_x f)} \lambda^2 \right) \|h\|_2^2$$

- (d) Montrer que

$$\max_{\lambda \in \text{Sp}(\text{Jac}_x f)} |\lambda| \leq \max(|1 - \tau \ell|, |1 - \tau L|) < 1;$$

- (e) En déduire que F est contractante puis que (x_k) converge vers x^* et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \|x_k - x^*\| \leq \left(\max_{\lambda \in \text{Sp}(\text{Jac}_x f)} |\lambda| \right)^k \|x_0 - x^*\|$$