

Fonctions à deux variables

Feuille 3bis : Réduction des matrices symétriques

Exercice 1. Montrer qu'une base $(e_1 = (x_1, y_1), e_2 = (x_2, y_2))$ de $\mathbb{R}^2$ est orthonormée si, et seulement si, $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = I_2$.

Exercice 2. Montrer que si une base (e_1, e_2) est orthonormée alors $\det(e_1, e_2) = \pm 1$.

Exercice 3. Montrer qu'une base (e_1, e_2) est orthonormée si, et seulement si, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(e_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta)), e_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta)))$ (si $\det(e_1, e_2) = 1$) ou $((e_1 = -\cos(\theta), \sin(\theta)), e_2 = (\sin(\theta), \cos(\theta)))$ (si $\det(e_1, e_2) = -1$).

Exercice 4. Soient $a \in \mathbb{R}^2$.

Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Notons (x, y) les coordonnées de a dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que

$$\|a\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

C'est-à-dire changer la base orthonormée que l'on considère ne change pas le calcul de la norme 2

Exercice 5. On se propose de démontrer le théorème spectral. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A s'écrit sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ quelconque.

2. Montrer que le polynôme caractéristique de A a deux racines réelles λ et μ telles que $\lambda\mu = ac - b^2$ et $\lambda + \mu = a + c$.
3. Montrer que $\lambda = \mu$ si, et seulement si, A est un multiple de la matrice identité (et est donc diagonalisable dans une base orthonormée).
4. Montrer que A est diagonalisable même si $\lambda \neq \mu$.
5. Donner une base orthonormée de vecteurs propres de A .