Fonctions à deux variables

Feuille 1 : Continuité dans $\mathbb{R}^2$

1 Topologie de $\mathbb{R}^2$

Exercice 1. Dessiner la boule unité $B(0,1)$.

Exercice 2. Soient $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrer que

$$B(a,r) =]a_1 - r, a_1 + r[\times]a_2 - r, a_2 + r[$$

et

$$B_f(a,r) = [a_1 - r, a_1 + r] \times [a_2 - r, a_2 + r].$$

Exercice 3. Montrer qu'un singleton est fermé et n'est pas ouvert. Que peut-on dire sur un ensemble fini de points ? Un ensemble infini de points ?

Exercice 4. Montrer qu'une boule ouverte est ouverte et qu'une boule fermée est fermée.

Exercice 5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$\|(x,y)\|_2 \coloneqq \sqrt{x^2 + y^2}$$

et pour tout couple $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in (\mathbb{R}^2)^2$, on pose :

$$\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2) \rangle \coloneqq x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

1. Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\|u+v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|_2^2.$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$. En remarquant que la fonction polynomiale

$$t \mapsto \|x + ty\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2\|y\|_2^2$$

est positive, montrer que

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Exercice 6. Montrer que la fonction

$$\|\cdot\|_2 \colon (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}.$$

est une norme de $\mathbb{R}^2$.

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 7. Montrer que $D \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert et $D_f \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ est fermé.

Exercice 8. Soient $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrer les égalités suivantes :

- $\overset{\circ}{\widehat{B_f(a,r)}} = B(a,r)$;
- $\overline{B(a,r)} = B_f(a,r)$.

Exercice 9. Montrer que l'adhérence de $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$ est $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ et que l'intérieur de $D_f = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ est D.

Exercice 10. Soit $S \subset \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\mathring{S} \subset S \subset \overline{S}$.
2. (a) Montrer que $\mathring{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S (c'est-à-dire pour tout ouvert U contenu dans S, $U \subset \mathring{S}$).
   (b) En déduire que S est un ouvert si et seulement si $\mathring{S} = S$.
3. (a) Montrer que $\overline{S}$ est le plus petit fermé contenant S (c'est-à-dire pour tout fermé F contenant S, $\overline{S} \subset F$).
   (b) En déduire que S est fermé si et seulement si $\overline{S} = S$.

Exercice 11.
1. Montrer les propriétés suivantes :
   i) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ S \subset T \implies \overline{S} \subset \overline{T}$
   i') $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ S \subset T \implies \mathring{S} \subset \mathring{T}$
   ii) $\forall S \subset \mathbb{R}^2,\ \overline{\overline{S}} = \overline{S}$
   ii') $\forall S \subset \mathbb{R}^2,\ \mathring{\mathring{S}} = \mathring{S}$
   iii) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ \overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$
   iii') $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ \overset{\circ}{\widehat{S \cap T}} = \mathring{S} \cap \mathring{T}$
   iv) $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ \overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$
   iv') $\forall S, T \subset \mathbb{R}^2,\ \overset{\circ}{\widehat{S \cup T}} \supset \mathring{S} \cup \mathring{T}$
2. Que dire des inclusions réciproques de iv) et iv')?

Exercice 12 ($\mathbb{R}^2$ est séparé)**.** Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que

$$B(a,\varepsilon) \cap B(b,\eta) = \emptyset.$$

2 Suites dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $\mathbb{R}^2$, de limite $\ell \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14. Soit $x \in [-1,1]^2 \setminus]-1,1[^2$. Donner une suite de $]-1,1[^2$ convergeant vers x.

On fera un dessin des objets considérés.

Exercice 15. On se propose de montrer[1] que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

1. Supposons $\varepsilon > \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe un entier dans $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$;
2. Prenons $\varepsilon > 0$ quelconque. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $q\varepsilon > \frac{1}{2}$.
3. En déduire le résultat.

[1] à partir de l'existence de la partie entière : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.

Exercice 16.

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que pour tout irrationnel α, $\alpha + \mathbb{Q} \coloneqq \{\alpha + x, x \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17.

1. Montrer que $\mathbb{Q}^2$ et $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ sont denses dans $\mathbb{R}^2$.
2. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^2$ tel que $F = \overline{\mathring{F}}$. Montrer que $F \cap \mathbb{Q}^2$ est dense dans F. Est-ce toujours vrai si le fermé F ne vérifie pas l'égalité $F = \overline{\mathring{F}}$?
   Indication 1 : On pourra commencer par se restreindre à $F = B_f(0, 1)$.
   Indication 2 : On pourra chercher un exemple de fermé ne vérifiant pas cette égalité.

3 Fonctions continues dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 18. Montrer qu'une application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ est continue.

Exercice 19. Montrer qu'une application $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ continue est $\mathbb{R}$-linéaire.

Exercice 20. Montrer que $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 21.

1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^m y^n$ est une fonction continue.
2. Soient $f_1, \ldots, f_n \colon S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que $x \in S \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x)$ est une fonction continue.
3. En déduire que pour tout $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^2)}$, la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{R}$ est une fonction continue. *De telles fonctions sont appelées fonctions polynomiales en deux variables.*
4. Soient $f \colon I \subset \mathbb{R}$ et $g \colon J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la fonction $(x, y) \in I \times J \mapsto f(x) + g(y) \in \mathbb{R}$ est continue.
5. Montrer que la fonction $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \mapsto \frac{y}{x} \in \mathbb{R}$ est une fonction continue.
6. En déduire que si p, q sont deux fonctions polynomiales en deux variables alors la fonction $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x, y) \neq 0\} \mapsto \frac{p(x,y)}{q(x,y)} \in \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 22. Soient $S \subset \mathbb{R}^2$ et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction.
Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. f est continue ;
2. Pour tout ouvert[2] U de $\mathbb{R}$, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ tel que $f^{-1}(U) = V \cap S$;
3. Pour tout fermé[3] C de $\mathbb{R}$, il existe un fermé D de $\mathbb{R}^2$ tel que $f^{-1}(C) = D \cap S$.

Exercice 23. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont ouverts, fermés, les deux ou ni l'un ni l'autre :

1. $A \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 2 \text{ et } x - y < 0\}$

[2] on rappelle que $U \subset \mathbb{R}$ est ouvert si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$
[3] est le complémentaire d'un ouvert de $\mathbb{R}$

2. $B \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\}$;
3. $C \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x}\right\}$
4. $D \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 + 1 \leq 4\}$

Exercice 24. Montrer que les fonctions suivantes sont continues :

1. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
3. $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4+y^6} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 25. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{x^2-y}{x^2+y} & \text{si } y \neq -x^2 \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$ pour n'importe quel choix de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 26. Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{r \to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0$$

2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que la fonction

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

est continue si, et seulement si, f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 28. Montrer que $B(0,1)$ et $B(a,R)$ sont homéomorphes pour n'importe quel choix de $a \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$.

Exercice 29. Montrer que $B(0,1)$ et $\mathbb{R}^2$ sont homéomorphes.

Exercice 30. Montrer que

$$\theta \in [0, 2\pi[\mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{S}^1 \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

est une fonction continue bijective mais n'est pas un homéomorphisme.