

Fonctions à deux variables

Feuille 2 : Différentiabilité

1 Différentielle

Exercice 1. Montrer que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est dérivable.

Exercice 2. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur différentielle

1. $(x, y) \mapsto e^{xy}(x + y)$

2. $(x, y) \mapsto (y \sin(x), \cos(x))$

Exercice 3. Étudier la différentiabilité et le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une forme quadratique i.e. une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $\ell_1, \dots, \ell_n$ des formes linéaires de $\mathbb{R}^2$ et des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ell_i(x)^2$$

Exercice 4. Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable et $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, u(x) := \langle f(x), f(x) \rangle.$$

Montrer que u est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 5. Soient $f, g: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables en $a \in U$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f + \lambda g$ et $f g$ sont différentiables en $a \in U$, et on a :

$$d_a(f + \lambda g) = d_a f + \lambda d_a g$$

et

$$d_a(fg) = g(a)d_a f + f(a)d_a g.$$

Exercice 6. Soient $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^2)}$. Étudier la différentiabilité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de la fonction $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $f: (x, y) \in B(0, \sqrt{7}) \mapsto \sqrt{14 - x^2 - y^2} \in \mathbb{R}$. Calculer le plan tangent de son graphe en $(1, 2, 3)$.

Exercice 8. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable. On suppose que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

1. Démontrer que $f(0) = 0$.

2. Démontrer que f est linéaire.

2 Dérivées partielles

Exercice 9. Justifier que les fonctions suivantes sont différentiables, et calculer leur matrice jacobienne.

1. $f: (x, y) \mapsto (12(x^2 - y^2), \sin(x) \sin(y))$ 2. $g: (x, y) \mapsto (12x^2 + y, \ln(1 + x^2))$

Exercice 10. Montrer que la fonction $\Phi:]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(r, \theta) := (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

est différentiable et calculer sa matrice jacobienne.

Exercice 11. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
2. Montrer que f est continue en $(0, 0)$.
3. Montrer que ses deux dérivées partielles existent en tout point.
4. Montrer qu'elle n'est pas différentiable en 0.

Exercice 12. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
2. Montrer que f n'est pas continue en 0.

Exercice 13. Étudier les droites tangentes associées à la fonction $(x, y) \mapsto xy$. Que se passe-t-il pour l'ensemble de niveau avec $a = (0, 0)$?

Exercice 14. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On considère $c \in \mathbb{R}$ et on pose

$$M := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = c\}$$

On considère une fonction dérivable $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

1. Calculer la dérivée de $f \circ \gamma$.
2. Si γ est à valeurs dans M , que dire des vecteurs $\nabla_{\gamma(t)} f$ et $\gamma'(t)$? Représenter cette propriété sur un dessin.

Exercice 15. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que la fonction

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 16 (Quelques EDP).

1. Résoudre les équations

$$\partial_x f = 0; \quad \partial_y f = 0$$

d'inconnue une fonction différentiable $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Résoudre les équations

$$\partial_x f = b; \quad \partial_y f = a$$

d'inconnue une fonction différentiable $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et où $a: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \tilde{a}(x)$ et $b: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \tilde{b}(y)$ sont des fonctions ne dépendant que d'une variable avec $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ dérivables.

3. Calculer les dérivées partielles de la fonction $g: (u, v) \mapsto f(au + bv, cu + dv)$ où $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
4. En déduire les solutions de l'équation (dite de transport)

$$\begin{cases} \partial_t f + c \partial_x f = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

où l'inconnue $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ et la condition initiale $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions différentiables et $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. Soit $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On appelle fonction homogène de degré α une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^2, f(tx) = t^\alpha f(x)$$

- Donner des exemples (pas uniquement polynomiaux) de fonctions homogènes de degré 3.
- Soit f une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, x \partial_x f(x, y) + y \partial_y f(x, y) = \alpha f(x, y).$$

3 Inégalité des accroissements finis

Exercice 18. Soient $f, g: I := [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(a) = g(a)$. Montrer que

$$A := \{c \in I \mid \forall x \in [a, c], f(x) \leq g(x)\}$$

est un intervalle fermé (inclus dans I). Plus précisément, montrer que $A = [a, \sup A]$.

Exercice 19. Soit $g: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 1\}, g(x, y) := \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Calculer sa différentielle.
- Montrer que $U^+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, xy > 1\}$, $U^- := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, xy > 1\}$, $[0, +\infty[\times]-\infty, 0]$ et $] -\infty, 0] \times [0, +\infty[$ sont convexes.
Indication : U est convexe si $\forall x, y \in U, \forall t \in [0, 1], tx + (1-t)y \in U$.
- Représenter les différents ensembles de la question précédente.
- Montrer que deux points de $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1, x > 0, y > 0\}$ et $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1, x < 0, y < 0\}$ peuvent être reliés par un chemin différentiable.
- Conclure.

Exercice 20. Le but de cet exercice est de montrer que le système d'équations

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \sin(x+y) \\ y = \frac{1}{3} \cos(x-y) \end{cases}$$

admet au plus une solution.

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) := \left(\frac{1}{3} \sin(x+y), \frac{1}{3} \cos(x-y) \right)$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|d_{(x,y)}f(h, k)\|_2^2 \leq \frac{1}{9} \|(h, k)\|_2^2$$

et donner les cas d'égalité.

3. En déduire que

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \|f(x, y) - f(x', y')\| \leq \frac{2}{3} \|(x, y) - (x', y')\|.$$

4. Conclure.

Exercice 21. (*) Soit $n \geq 1$. Un nombre réel est dit algébrique de degré au plus n s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers de degré n . Il est dit transcendant dans le cas contraire.

1. Déterminer tous les nombres algébriques de degré au plus 1.
2. Montrer que
 - (a) $\sqrt{2}$ est algébrique de degré au plus 2. Est-il de degré au plus 1 ?
 - (b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébriques de degré au plus 4
3. Montrer que e est un nombre transcendant.
4. Soit x un nombre irrationnel algébrique de degré au plus n . Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^n}.$$

Indication : on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis à une fonction bien choisie.

5. En déduire que le nombre de Liouville

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$$

est un nombre transcendant (évidemment après avoir vérifié que cette expression a un sens).

Indication : Si x_k est la kème somme partielle, on pourra montrer que

$$0 < x - x_k < \left(\frac{1}{2^{k!}} \right)^k$$