

Suites et séries numériques

1 Suites

Exercice 1. Montrer qu'une suite géométrique (u_n) de raison q vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n u_0$$

Exercice 2. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 3. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

si $q \neq 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k = u_0(n+1)$$

sinon.

Exercice 4. En utilisant les définitions du cours, montrer que

1. la suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ converge vers 1,
2. la suite de terme général $u_n = \frac{3}{2^n}$ converge vers 0,
3. la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 1,
4. la suite de terme général $u_n = \frac{n}{n^3+1}$ converge vers 0,
5. la suite de terme général $u_n = \frac{n^2+1}{n+1}$ tend vers $+\infty$,
6. la suite de terme général $u_n = -n + \frac{1}{n+1}$ tend vers $-\infty$.

Exercice 5. 1. Écrire avec des quantificateurs la négation de "il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que la suite (u_n) converge vers ℓ ".

2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ ne converge pas.
3. La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + 2^{-n}$ est-elle convergente ?

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon$ alors $x \leq 0$
2. En déduire que si $\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon$ alors $x = 0$

Exercice 7. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes :

$$u_n = 3 - \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = 3 + \frac{2}{n+3}.$$

Puis

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Exercice 8. Montrer que pour tout $n \geq 1, n! \geq 2^{n-1}$.

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

1. Montrer que ces suites convergent et ont la même limite, qu'on notera e .
2. Donner une valeur approchée de e à 10^{-6} près.
3. Montrer que e n'est pas un nombre rationnel.

Indication : Supposer par l'absurde que e est rationnel c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme d'une fraction p/q où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, puis observer que $u_q < e < v_q$.

Exercice 10. (*) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 > 0, v_0 > 0, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

sont adjacentes (leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de u_0 et v_0).

Exercice 11. Calculer la limite d'une suite arithmétique.

Exercice 12. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et $3u_{n+1} = u_n + 4$ pour tout $n \geq 0$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que $u_n \geq 2$ pour tout $n \geq 2$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que (u_n) est convergente.
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = u_n - 2$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et donner l'expression de v_n en fonction de n . En déduire la limite de (u_n)
6. Soient $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Déterminer l'expression de S_n et de T_n en fonction de n .
7. Déterminer la limite de (S_n) et celle de (T_n) .

Exercice 13. Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ avec $u_0 = a, u_1 = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique convergente.

2. Calculer $w_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n+1}{2^{2n}}$.

1. En calculant de deux façons différentes $S_n - \frac{S_n}{4}$, donner une expression simplifiée de S_n .
2. En déduire la limite de la suite (S_n) .

Exercice 15. Soit (F_n) la suite (dite de Fibonacci) définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \quad (*)$$

1. Calculer F_n pour $2 \leq n \leq 5$.
2. Déterminer les deux suites géométriques (a_n) et (b_n) de valeur initiale $a_0 = b_0 = 1$ vérifiant la relation de récurrence $(*)$.
3. Déterminer l'unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} \alpha a_0 + \beta b_0 = F_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 = F_1 \end{cases}$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

Exercice 16. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}\right)$ est convergente.

Exercice 17. 1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|), \quad \min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

Indication : Distinguer les cas $a < b$ et $a \geq b$.

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$M_n = \max(u_n, v_n) \quad \text{et} \quad m_n = \min(u_n, v_n).$$

Montrer que les suites (M_n) et (m_n) convergent et préciser la limite de chacune d'elles en fonction de celle des suites (u_n) et (v_n) .

Exercice 18. Soient I un intervalle non vide et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue tels que

$$f(I) \subset I. \text{ Soit } (u_n) \text{ la suite définie par } \begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
2. Montrons que si (u_n) converge vers $\ell \in I$ alors $f(\ell) = \ell$.
3. Redémontrer que si (u_n) est une suite géométrique de raison $q \in]0, 1[$ alors u_n converge vers 0.
4. Soit $a > 0$. On considère la suite (u_n) où $u_0 > 0$ et où

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

On va montrer que (u_n) tend vers $\sqrt{a}$.

(a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$

(c) Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

(d) En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 19. (*) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite et soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite des moyennes de Cesàro, c'est-à-dire la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. On veut démontrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors (v_n) converge aussi vers ℓ .

(a) À l'aide de la définition de la limite d'une suite, établir le résultat dans le cas où $\ell = 0$.

(b) En considérant la suite $(u_n - \ell)$ établir le résultat pour ℓ quelconque dans $\mathbb{R}$.

2. En prenant la suite de terme général $(-1)^n$, montrer que la réciproque de cet énoncé est fausse en général.

Exercice 20. Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} & 2. v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \\ 3. w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2} & 4. z_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right). \end{array}$$

Exercice 21. Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ un polynôme à coefficients réels, avec $a_p \neq 0$. Déterminer un équivalent simple de la suite $(P(n))$.

Exercice 22. 1. Donner un contre-exemple aux implications suivantes pour des suites réelles quelconques

(a) $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n \Rightarrow u_n + w_n \sim v_n + t_n$

(b) $u_n \sim v_n \Rightarrow \ln(u_n) \sim \ln(v_n)$ (supposons que les suites sont strictement positives)

(c) $u_n \sim v_n \Rightarrow e^{u_n} \sim e^{v_n}$

2. (a) (*) Supposons que $u_n \sim v_n$, $w_n \sim t_n$ et que v_n et t_n soient de même signe et ne s'annulent pas simultanément à partir d'un certain rang. Montrer que $u_n + w_n \sim v_n + t_n$

(b) Supposons que $u_n \sim v_n$, que les deux suites soient à valeurs strictement positives et qu'elles convergent vers un réel différent de 1 ou vers $+\infty$. Montrer que $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

(c) Supposons que $u_n \sim v_n$. Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n} \Leftrightarrow u_n - v_n \rightarrow 0$.

3. Montrer que si $u_n \sim 0$ alors u_n est nulle à partir d'un certain rang.

Exercice 23. Donner un équivalent des suites suivantes :

1. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

2. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$

3. $(1 + \sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$
4. $\ln\left(\cos \frac{1}{n}\right) \ln\left(\sin \frac{1}{n}\right)$
5. $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

Exercice 24. Montrer que $\sum_{k=1}^n k! \sim n!$.

Exercice 25. Donner un équivalent de la suite de Fibonacci.

2 Écriture décimale des réels

Exercice 26. 1. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.
3. Montrer que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c \text{ et } b = d$.

Exercice 27. 1. Montrer que la somme et le produit de deux nombres rationnels sont rationnels.

2. La somme de deux nombres irrationnels est-elle nécessairement irrationnelle ?
3. Le produit de deux nombres irrationnels est-il nécessairement irrationnel ?
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, x + y \notin \mathbb{Q}$.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, xy \notin \mathbb{Q}$.
6. (*) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $a^b \in \mathbb{Q}$.

Exercice 28. Les nombres suivants sont-ils irrationnels ?

- | | | |
|--|------------------------------|------------------------------|
| 1. $\sqrt{p}$ où p est un nombre premier | 4. $\sqrt[3]{6}$ | 8. $\sqrt[3]{7 + \sqrt{11}}$ |
| 2. $\sqrt{pk}$ où p est premier et $\text{pgcd}(p, k) = 1$. | 5. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ | 9. $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ |
| 3. $\sqrt{9}$ | 7. $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ | 10. $\frac{\ln(8)}{\ln(2)}$ |

Exercice 29. (*) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-\frac{n(n+1)}{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 30. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sqrt{n}$ est rationnel si, et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = p^2$.

Indication : on pourra commencer par montrer que si n ne s'écrit pas comme le carré d'un entier alors il peut s'écrire comme le produit de nombres premiers distincts et d'un tel carré.

2. Soient $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ deux entiers avec $q \neq 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{\ln(p)}{\ln(q)}$ soit rationnel.

Indication : on pourra commencer par supposer que p ou q est premier.

Exercice 31. Donner une expression fermée du nombre de chiffres d'un entier strictement positif à l'aide du logarithme décimal et de la partie entière.

Exercice 32. Écrire le développement décimal des fractions suivantes :

- | | | |
|-------------------------|---------------------|------------------------------|
| 1. $\frac{1}{7}$; | 3. $\frac{6}{11}$; | 5. $\frac{97}{135}$; |
| 2. $\frac{1710}{625}$; | 4. $\frac{3}{13}$; | 6. $\frac{1529327}{24975}$. |

Exercice 33. Écrire sous forme de fraction irréductible les nombres rationnels suivants :

- | | | |
|----------------------|------------------------|------------------------------|
| 1. $0.\underline{3}$ | 3. $0.02\underline{5}$ | 5. $1.\underline{45}$ |
| 2. 0.245 | 4. $0.1\underline{23}$ | 6. $0.\underline{123456789}$ |

3 Séries numériques

Exercice 34. Soit (u_n) une suite telle qu'il existe une suite (v_n) et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0, u_n = v_{n+1} - v_n$$

Montrer que pour $N \geq n_0$,

$$\sum_{n=n_0}^N u_n = v_{N+1} - v_{n_0}$$

Exercice 35. Pour chacune des séries suivantes, indiquer la nature et en cas de convergence calculer la somme :

$$\sum \frac{1}{7^n}, \quad \sum \frac{2^n}{5n+2}, \quad \sum \frac{4^n}{3n-1}, \quad \sum e^{-n-1}.$$

Exercice 36. Notons $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général $\frac{1}{n^2}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général $\frac{1}{n^3}$.

1. Montrer que pour $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

2. En déduire que $\sum u_n$ converge.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $v_n \leq u_n$ et en déduire que $\sum v_n$ converge.
Notons (R_n) la suite des restes de la série $\sum v_n$. On se fixe $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

4. Montrer que pour $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n_0 n(n-1)}$$

5. En déduire une majoration de R_{n_0} par une expression "simple" en n_0 .

6. Application numérique : Trouver un n_0 pour que $R_{n_0} \leq 10^{-6}$.

Exercice 37. Établir la divergence des séries suivantes :

$$\sum n!, \quad \sum (-1)^n, \quad \sum_{n \geq 1} n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right), \quad \sum_{n \geq 1} 1 - \frac{\sin n}{n}.$$

Indication : Pour la première série, on pourra montrer que pour $n \geq 2$, $n! \geq 2^{n-1}$.

Exercice 38. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose $u_n = \frac{n-1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = \frac{-1/2}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{3/2}{n+2}.$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{3}{2(n+2)}.$$

3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 39. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 40. On se propose de démontrer le “critère de Riemann” : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

3. En déduire que $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est une série divergente.

4. En déduire que si $\alpha \leq 1$, $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ est une série divergente.

5. En reprenant les questions précédentes, montrer que si $\alpha > 1$, $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ est une série convergente.

Exercice 41. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{n}{n^3+1}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \quad \sum \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}, \quad \sum \frac{1}{n!}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n}.$$

Exercice 42. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{2n^3 - n}{n^4 + n + 2}, \quad \sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right), \quad \sum \frac{1 + \cos n}{2n^3 + 1}, \quad \sum \frac{1}{e^n + n}, \quad \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n.$$

Exercice 43. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum e^{-n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2}, \quad \sum \frac{n^4}{3^n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{n^4 + n - 1}{3^n - 1}, \quad \sum 3^{n(-1)^n}.$$

Exercice 44. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum \frac{1 - \sin n}{1 + n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{e^n - 1}{\sqrt{n}}, \quad \sum e^{-\sqrt{2+n}}, \quad \sum_{n \geq 1} 1 - \cos \frac{1}{n}.$$

Exercice 45. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \sin n^5}, \quad \sum \frac{e^{-2n} + \sqrt{n}}{n^2 + 1}, \quad \sum \left(\frac{4n+1}{3n+2} \right)^n, \quad \sum n^{100} e^{-\sqrt{n+100}}.$$

Exercice 46. Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^n, \quad \sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \ln(n) e^{-\sqrt{n}}$$

Exercice 47. (*) Soit $(p_k)_{k \geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers. Le but de l'exercice est d'étudier la divergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$. Pour $n \geq 1$, on pose $V_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$.

1. Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.
2. Montrer que la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est convergente si et seulement si la suite $(\ln V_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
3. En déduire que la suite $(V_n)_{n \geq 1}$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ est convergente.
4. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, V_n = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^j} \right).$$

5. En déduire que $V_n \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ pour $n \geq 1$.
6. Quelle est la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$?
7. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k^\alpha}$?

Exercice 48. Donner une primitive de chacune de ces fonctions (l'ensemble de départ de ces fonctions est un intervalle ouvert maximal où elles sont définies) :

$$f_1: x \mapsto x^\alpha \text{ avec } \alpha \neq -1, f_2: x \mapsto \frac{1}{x}, f_3: x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, f_4 = \cos, f_5 = \sin, f_6 = \ln, f_7 = \exp, f_8 = \tan$$

Exercice 49. Soit $a \in \mathbb{R}$, soient $f, g: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\int_a^\infty f(x) dx$ et $\int_a^\infty g(x) dx$ existent et sont finies, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que

1. si pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^\infty f(x) dx \geq 0$.
2. si, pour tout $x \geq a$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$ (croissance de l'intégrale)
3. $\int_a^\infty f(x) + \lambda g(x) dx$ existe et $\int_a^\infty f(x) + \lambda g(x) dx = \int_a^\infty f(x) dx + \lambda \int_a^\infty g(x) dx$
4. si $c \geq a$ alors $\int_c^\infty f(x) dx$ existe et $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_c^{+\infty} f(x) dx + \int_a^c f(x) dx$
5. si F est une primitive de f alors l'intégrale impropre $\int_a^\infty f(x) dx$ existe si, et seulement si, F a une limite finie en $+\infty$.

Exercice 50. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables.

1. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$ avec $x = \sqrt{t}$;
2. $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)^2} dt$ avec $x = \cos(t)$.
3. $\int_0^1 \frac{1}{1+e^t} dt$;
4. $\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{t+1} dt$.

Exercice 51. Calculer, si elles sont bien définies, les intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ avec } \alpha \neq 1, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int_1^{+\infty} x e^{-x} dx, \quad \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx, \quad \int_1^{+\infty} \ln x dx$$

Exercice 52. Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ continue et décroissante. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ et $\Delta_n := u_n - \int_n^{n+1} f(t) dt$

1. Montrer que (u_n) est convergente.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \Delta_n \leq u_n - u_{n+1}$.
3. En déduire que $\sum \Delta_n$ est convergente.
4. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N u_n = \sum_{n=0}^N \Delta_n + \int_0^{N+1} f(t)dt$
5. En déduire que la suite $\left(\sum_{n=0}^N u_n - \int_0^{N+1} f(t)dt\right)$ converge.

Exercice 53. On souhaite étudier, suivant la valeur de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.$$

1. Démontrer que la série converge si $\alpha > 1$.
2. Déterminer la nature de cette série dans le cas $\alpha < 1$.
3. On suppose que $\alpha = 1$.
 - (a) Montrer si $\beta \leq 0$, alors la série est divergente.
On pose $T_n = \int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
 - (b) Montrer que si $\beta > 1$, alors la suite (T_n) est convergente et si $\beta \leq 1$, la suite (T_n) tend vers $+\infty$.
 - (c) Conclure pour $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$.

Exercice 54. On définit la fonction $f: x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \in \mathbb{R}$ et pour $n \geq 1$, on pose $u_n := f(n)$

1. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$$

est bien définie et exprimer I_n en fonction de n .

2. En déduire que $I_n \sim \frac{1}{n}$.
3. Montrer que la série $\sum f(n)$ est convergente.
4. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

- (b) En déduire un équivalent simple de

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}.$$

Exercice 55. Pour $\alpha > 1$, posons

$$\zeta(\alpha) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

1. Par une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de la suite $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha})$.
2. En déduire la limite de $(\alpha - 1)\zeta(\alpha)$ quand α tend vers 1^+ .

Exercice 56. Établir, grâce à une comparaison série-intégrale, les équivalences suivantes

1. $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$
2. $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n \sqrt{n}$
3. $\ln(n!) \sim n \ln(n)$

Exercice 57. On définit la fonction $f: x \in [2; +\infty[\mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \geq 2$:

$$\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_2^n f(x) dx.$$

- (a) Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.
- (b) On définit la fonction

$$F: x \in [2; +\infty[\mapsto \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \in \mathbb{R}.$$

Calculer la dérivée de F , et en déduire une expression de I_n en fonction de n .

- (c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.
3. On définit, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

- (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- (b) Trouver un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 58. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+n}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n^2-5n}$

Exercice 59. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos(n+1) - \cos(n) \geq -1$$

Indication 1 : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Indication 2 : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leq |t|$.

2. Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n + \cos(n)}.$$

Exercice 60. 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin(x)$

2. Déterminer la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right).$$

Exercice 61. Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $u_n \sim v_n$.
2. Montrer que $\sum u_n$ diverge et que $\sum v_n$ converge.
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice 62. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

1. Vérifier que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$.
3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente (et est donc semi-convergente).

Exercice 63. Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente. Montrer que les séries $\sum \min(0, u_n)$ et $\sum \max(0, u_n)$ divergent.

Exercice 64. Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.
2. Notons (u'_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = u_{4n+1} + u_{4n+3} + u_{2n}.$$

Montrer que $\sum u'_n$ est divergente.

3. Montrer que le produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ avec elle-même diverge.

Exercice 65. Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

1. Montrer que $\sum u_n$ est semi-convergente.

Par comparaison série-intégrale, on montre que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge vers un réel γ c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1) \quad (*)$$

pour $n \rightarrow \infty$

2. En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \ln(2)$.

Indication : Montrer que pour $N \in \mathbb{N}$ pair

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{k=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{n}$$

et trouver un résultat similaire pour N impair puis utiliser ()*.

Soit σ la fonction $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma(n) = \begin{cases} 2k & \text{si } n = 3k \\ 4k + 1 & \text{si } n = 3k + 1 \\ 4k + 3 & \text{si } n = 3k + 2 \end{cases}$$

3. Calculer $\sigma(n)$ pour $0 \leq n \leq 6$.
4. Montrer que la fonction σ est une bijection et déterminer la nature de la série $\sum u_{\sigma(n)}$ et si elle converge, en donner la somme.
Indication : On pourra grouper les termes avec $n = 3k$ et $n = 3k + 1$.
5. Refaire les questions 3) et 4) avec l'application $\sigma_{a,b} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie, avec $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixés, par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_{a,b}(n) := \begin{cases} 2ak + \ell & \text{si } n = (a+b)k + 2\ell \text{ avec } 0 \leq \ell \leq a-1 \\ 2bk + 1 + 2\ell & \text{si } n = (a+b)k + a + \ell \text{ avec } 0 \leq \ell \leq b-1 \end{cases}$$

C'est une généralisation des calculs précédents : $\sigma_{1,1} = id_{\mathbb{N}}$ et $\sigma_{1,2} = \sigma$.

Indication : On pourra montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_{k=0}^{(a+b)n-1} u_{\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{an-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{bn} \frac{1}{2k}$$