L3 PPPE
2024-2025

Séries

Feuille 5 : Séries entières

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$
2. $\sum \frac{n!}{(2n)!} x^n$
3. $\sum \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$
4. $\sum_{n\geq 1} (\ln n) x^n$
5. $\sum \frac{\sqrt{n}}{2^n+1} x^{2n}$
6. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1\times 3\times \cdots \times (2n-1)} x^n$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes puis calculer les sommes dans leur intervalle (ouvert) de convergence.

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} x^n$
3. $\sum \frac{3n}{n+2} x^n$
4. $\sum (n+1) x^n$
5. $\sum \frac{1}{n!(n+2)} x^n$
6. $\sum \frac{n^2+4n-1}{n!(n+2)} x^n$
7. $\sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$
8. $\sum (n^2+1) 2^{n+1} x^n$
9. $\sum (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes puis calculer les sommes dans leur intervalle (ouvert) de convergence.

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^n$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n)!} x^{4n}$
4. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$
5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n} x^{4n-1}$
6. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$.

Exercice 4. Soit (F_n) la suite de Fibonacci, c'est-à-dire $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Le but de cet exercice est de retrouver la formule pour F_n grâce aux séries entières. Pour cela, on va considérer la série entière $\sum F_n x^n$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \leq 2^{n-1}$
2. En déduire que le rayon de convergence de $\sum F_n x^n$ est supérieur à $\frac{1}{2}$.
3. Pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, calculer
$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^{n+1}$$
et en déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2}$.
Indication : On pourra utiliser le fait que $F_0 = 0$ et faire un changement d'indice dans la somme $\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^{n+1}$
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que
$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \frac{1}{x-\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^k$$
5. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$.
Indication : On pourra faire une décomposition en éléments simples.

Exercice 5. Soient $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Le but de cet exercice est de trouver une formule pour le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $\sum_{i=1}^p x_i = n$ grâce aux séries entières.
Notons $E_{p,n}$ l'ensemble des solutions $(x_1, \dots, x_p)$ dans $\mathbb{N}^p$ de l'équation $\sum_{i=1}^p x_i = n$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $E_{1,n}$ et $E_{2,n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,
$$E_{p,n} = \bigcup_{k=0}^{p} \left\{ (x_1, \dots, x_{n-1}, k) \in \mathbb{N}^p \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i = p - k \right\}$$
et en déduire que
$$\mathrm{card}(E_{p,n}) = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{card}(E_{p-k,n-1})$$
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,
$$\sum_p E_{p,n} x^p = \left(\sum_m E_{m,n-1} x^m \right) \left(\sum_k x^k \right).$$
puis que le rayon de convergence de la série $\sum_n E_{p,n} x^n$ est 1 et
$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_n E_{p,n} x^n = \frac{1}{(1-x)^p}$$
4. Soit $f : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{(1-x)} \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall x \in]-1, 1[, f^{(p)}(x) = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$
5. Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$$\mathrm{card}(E_{p,n}) = \binom{n+p-1}{p-1}.$$

Exercice 6. Le but de cet exercice est de montrer que les fonctions cos et sin sont développables en série entière.

1. Calculer $\cos^{(n)}(0)$ et $\sin^{(n)}(0)$ pour $0 \leq n \leq 4$.
2. Donner une formule fermée pour $\cos^{(n)}(0)$ et $\sin^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$,
$$\cos((a+b)x) = \cos(ax)\cos(bx) - \sin(ax)\sin(bx)$$
et
$$\sin((a+b)x) = \cos(ax)\sin(bx) + \sin(ax)\cos(bx).$$

Exercice 7. Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'il existe $C, A > 0$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|f^{(n)}\|_\infty \leq C \cdot A^n \cdot n!$$
(on a noté $\|g\|_\infty = \sup_{x \in [-a,a]} |g(x)|$). Démontrer que f est développable en série entière en 0.

Exercice 8. Montrer que la fonction arctan est développable en série entière sur $]-1, 1[$.
Indication : On pourra utiliser la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.