

Topologie et calcul différentiel

TD n°1 : topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 1.

Dessiner la boule fermée unité, i.e. centrée en 0 de rayon 1, pour $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 2.

Soient E un espace vectoriel et $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

- (i) $\forall x \in E \setminus \{0\}, N(x) > 0$
- (ii) $N(0) = 0$
- (iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E, N(x + \lambda y) \leq N(x) + |\lambda|N(y)$

Montrer que N est une norme sur E .

Exercice 3.

Soient $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p > 1$. On définit $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\|(x_1, \dots, x_d)\|_p := \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

1. On pose $q := \frac{p}{p-1}$ de sorte que $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Montrer que $\forall a, b \geq 0, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

2. Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \sum_{k=1}^d |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^d |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^d |y_k|^q \right)^{1/q}$$

On pourra commencer par appliquer la question précédente à $a := \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ et $b := \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$.

Le cas $p = q = 2$ est appelé inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

4. Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Exercice 4.

Soient $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$.

On définit $\|\cdot\|_p : C^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$.

On pourra adapter les solutions de l'Exercice 3 en remplaçant $\sum$ par $\int$.

2. Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice 5.

Montrer que les couples $(E, \|\cdot\|)$ suivants sont des espaces vectoriels normés :

1. $E = \mathbb{R}[X]$ et $\|\cdot\|_m : \sum a_i X^i \mapsto \sum |a_i| m^i$ où $m \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. $E = \mathbb{R}\{x\}_\rho$ l'espace vectoriel des séries entières réelles de rayon de convergence $\geq \rho$ et

$$\|\cdot\|_m : \sum_{i \geq 0} a_i x^i \mapsto \sum_{i \geq 0} |a_i| m^i$$

où $m, \rho \in \mathbb{R}_{>0}$ et $m < \rho$.

3. $E = \text{Lip}([a, b])$ l'espace vectoriel des fonctions lipschitziennes sur $[a, b]$, où $a < b$, et

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}.$$

4. $E = \ell^p := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ et $\|(x_n)_n\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$ où $p \in [1, \infty[$.
5. $E = \ell^\infty := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$ et $\|(x_n)_n\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.
6. $E = C^0([a, b], F)$ l'espace vectoriel des fonctions $[a, b] \rightarrow F$ continues $\|f\| := \sup_{x \in [a, b]} \|f(x)\|_F$ où $a < b$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé.
7. $E = B(X, F)$ l'espace vectoriel des fonctions $X \rightarrow F$ bornées et $\|f\| := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_F$ où X est un ensemble non-vidé et $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace vectoriel normé.

Exercice 6.

- Soient $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces vectoriels normés.
Montrer que $(E := E_1 \times \dots \times E_n, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, où $\|(u_1, \dots, u_n)\| := \max_{i=1, \dots, n} (\|u_i\|_i)$.
- Soit $(E_i, \|\cdot\|_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels normés.
Montrer que l'espace vectoriel

$$E := \left\{ (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i : \sup_{i \in I} \|f_i\|_i < \infty \right\}$$

muni de l'application

$$\|\cdot\| : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (f_i)_{i \in I} & \mapsto & \sup_{i \in I} \|f_i\|_i \end{array}$$

est un espace vectoriel normé.

Exercice 7.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel fermé de E . Montrer que l'espace vectoriel E/F muni de l'application

$$\|\cdot\|_{E/F} : \begin{array}{ccc} E/F & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \bar{x} & \mapsto & \inf_{u \in \bar{x}} \|u\| \end{array}$$

est un espace vectoriel normé.

Exercice 8.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé.

Montrer que l'application $\|\cdot\|_E : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ est une application continue.

Exercice 9.

- On considère l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
 - Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $\mathbb{Q}$.
 - Les parties suivantes sont-elles ouvertes? fermées?
 - $\emptyset$
 - $[42, +\infty[$
 - $] -17, 10]$
 - $] -\pi, \pi [$
 - $\mathbb{Q}$
 - $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x+1| < 2\}$
- Les parties suivantes de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ sont-elles ouvertes? fermées?
 - $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x+1| < 2\}$
 - $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\}$
 - $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$
 - $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$
 - $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\}$
 - $F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$

Exercice 10.

Dans cet exercice E désigne l'espace des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ donnée par

$$\|M\|_\infty := \max_{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2} |m_{ij}|.$$

1. Montrer que (A_n) converge vers $L = (\ell_{ij}) \in E$ si et seulement si pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{ij,n} = \ell_{ij}$.
2. Établir que

$$\sum_{n \geq 0} \|M_n\|_\infty < +\infty \implies \sum_{n \geq 0} M_n \text{ converge.}$$

3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E . Établir que

$$\sum_{n \geq 0} \|M_n\|_\infty < +\infty \iff \sum_{n \geq 0} \|M_n\| < +\infty.$$

4. Montrer qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E qui est sous-multiplicative i.e. une norme telle que

$$\forall A, B \in E, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Indice : À toute matrice de E , on peut lui associer une application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

5. Montrer que l'ensemble des matrices inversibles, noté $GL_n(\mathbb{R})$, est un ouvert de E .

Indice : On pourra considérer une matrice A inversible, remarquer que $A + M = A(\text{Id} + A^{-1}M)$, choisir M de sorte que $\|A^{-1}M\| < 1$ pour une norme sous-multiplicative et utiliser une série géométrique.

6. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans E .

Exercice 11.

On considère $E := \ell^\infty$ l'espace vectoriel des suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornées muni de la norme

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

On définit l'opérateur de Cesàro $T : E \rightarrow E$ par $T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $y_n := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i$.

1. Montrer que T est bien défini.
2. Montrer que T est une application linéaire continue et déterminer sa norme d'opérateur.

Exercice 12.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.

Montrer que S est bornée si et seulement s'il existe $a \in E$ et $r \geq 0$ tels que $S \subset B(a, r)$.

Exercice 13.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de compacts est compacte.
2. Montrer qu'une union finie de compacts est compacte.
3. Une union quelconque de compacts est-elle nécessairement compacte ?

Exercice 14.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact.

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés telle que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \cap K \neq \emptyset$.

Montrer que $K \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Exercice 15.

Les parties suivantes de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ sont-elles compactes ?

1. $\mathbb{Z}$
2. $[0, 1[$
3. $] - \infty, 1]$
4. $[0, 1]$
5. $\{-42, \pi, 17\}$
6. $[e, 17] \cup]17, 42]$

Exercice 16.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$ et $f : S \rightarrow F$ une application continue.

1. Si K est un compact de F , $f^{-1}(K)$ est-il nécessairement un compact de E ?
2. Montrer que c'est toujours le cas si S est compact.

Exercice 17.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$.

1. Montrer que $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2$.
2. Montrer que $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R}), \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_\infty$.
3. Montrer que les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux non-équivalentes sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$.
Indice : pour $n \in \mathbb{N}$, on pourra considérer $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = (x-a)^n$.

Exercice 18.

Soit $E := \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes réels.

1. On définit $N_1 : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $N_1\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k\right) := \sum_{k=0}^n \frac{|a_k|}{2^k}$.
Montrer que N_1 est une norme sur E .
2. Montrer que $X^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour la norme N_1 .
3. On définit $N_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $N_2\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k\right) := \left|\sum_{k=0}^n a_k\right| + \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{2^k}$.
Montrer que N_2 est une norme sur E .
4. Montrer que $X^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ pour la norme N_2 .
5. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes?

Exercice 19.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. On suppose que E est de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Pour $a \in E$, on note

$$d(a, F) := \inf_{x \in F} \|x - a\|.$$

- (a) Montrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
 - (b) On suppose que $F \neq E$. Soit $a \in E \setminus F$ et $x \in F$ tel que $d(a, F) = \|x - a\|$.
Montrer qu'il existe $b \in E$ tel que $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$.
2. On suppose maintenant que E est de dimension infinie. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_n$ d'éléments de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|b_n\| = 1$ et $d(b_n, \text{Vect}(b_0, \dots, b_{n-1})) = 1$.
 3. En déduire que E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte (lemme de Riesz).

Exercice 20.

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Montrer que F est fermé dans E .

Exercice 21.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ telle que

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

Montrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe par arcs.

Exercice 22.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Que peut-on dire d'une partie A de E qui est à la fois ouverte et fermée?