

# Variétés toriques semi-normales

Antoine BOIVIN

13 juin 2025

## Résumé

Les variétés toriques sont habituellement supposées normales afin d'avoir une description combinatoire complète par des éventails de cônes dans  $\mathbb{R}^n$ . On obtient ainsi un dictionnaire entre les propriétés géométriques de ces variétés toriques et les propriétés combinatoires des éventails. Pedro Daniel Gonzalez Perez et Bernard Teissier ont étendu cette équivalence aux variétés toriques non-normales en considérant des éventails avec la donnée supplémentaire d'une famille de monoïdes compatibles.

Dans un travail avec François Bernard, nous étudions une classe intermédiaire de variétés toriques, dites "semi-normales" et montrons, grâce à un résultat de Les Reid et Leslie Roberts sur la semi-normalisation des monoïdes, qu'elles sont équivalentes à la donnée d'un objet combinatoire que nous avons appelé "éventail à groupes". On obtient ainsi une classe de variétés toriques ayant des singularités plus générales que les variétés normales, tout en ayant une structure combinatoire beaucoup plus simple que les variétés toriques générales non-normales.

## 1 Introduction

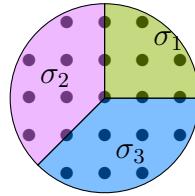
Soit  $k$  un corps commutatif.

**Definition 1.1.** Une variété torique est une variété algébrique sur  $k$  avec une action effective d'un tore  $T \simeq \mathbb{G}_{m,k}^n$  avec une orbite ouverte dense.

**Example 1.2.**  $\mathbb{G}_{m,k}^n, \mathbb{A}_k^n, \mathbb{P}_k^n, V(y^2-x^3) \subset \mathbb{A}_k^2, V(x^2-y^2z) \subset \mathbb{A}_k^3, V(xt-yz) \subset \mathbb{A}_k^4$

**Cas normal :** Complétement décrite par la combinatoire d'un éventail de cônes rationnels de  $\mathbb{R}^n \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{Gr-}\mathfrak{alg}}(\mathbb{G}_m, T) \otimes \mathbb{R}$ . On note  $N$  le groupe abélien  $\text{Hom}_{\mathfrak{Gr-}\mathfrak{alg}}(\mathbb{G}_m, T)$ .

**Example 1.3.** Description combinatoire de  $\mathbb{P}_k^2$  :



Les cônes maximaux décrivent les cartes de la variété et leurs intersections donnent les changements de cartes.

**Théorème 1.4.** *L'association  $\Sigma \mapsto X_\Sigma$  induit une équivalence de catégories  $\mathfrak{Fans} \rightarrow \mathfrak{VarTor}^n$  entre la catégorie des éventails et celles des variétés toriques normales*

**Cas général (Gonzalez-Perez et Teissier)**  $\rightsquigarrow$  Nécessite plus de données

Si  $X$  est une variété torique (+hypothèses techniques) alors la normalisation  $X'$  est aussi une variété torique et est donc de la forme  $X_\Sigma$ .

$X$  est décrite par la donnée  $\Sigma$  et d'une famille de monoïdes "compatibles"  $(\Gamma_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$  où  $\Gamma_\sigma \subset \sigma^\vee \cap M \rightsquigarrow$  "éventails à monoïdes"

**Théorème 1.5.** *L'association  $(\Sigma, \Gamma) \mapsto X_\Sigma^\Gamma$  induit une équivalence de catégories  $\mathfrak{Fans}^{mon} \rightarrow \mathfrak{VarTor}$  entre la catégorie des éventails à monoïdes et celles des variétés toriques.*

*Remarque 1.6.* Conditions de compatibilité difficiles à vérifier

On va se restreindre à une classe intermédiaire de variétés toriques, celles qui sont semi-normales, pour simplifier ces conditions.

**But de notre travail** : réécrire les conditions de compatibilité en se restreignant aux variétés considérées.

## 2 Variétés toriques affines semi-normales et monoïdes semi-saturés

### 2.1 Description des variétés toriques affines

$V$  variété torique affine de tore  $T$ .

**Lemme 2.1.** *Il existe un sous-monoïde finiment engendré  $S$  du groupe des caractères  $M = \text{Hom}_{\mathfrak{Gr-}\mathfrak{Alg}}(T, \mathbb{G}_m)$  ( $\simeq N^\vee$ ) tel que  $V = \text{Spec}(k[S])$*

*Démonstration.* Le monoïde  $S$  est le sous-monoïde des caractères de  $T$  qui s'étendent sur  $V$ .  $\square$

**Example 2.2.** —  $V(x^2 - y^3) = \text{Spec}(k[x, y]/(y^2 - x^3)) = \text{Spec}(k[t^2, t^3]) = \text{Spec}(k[2\mathbb{N} + 3\mathbb{N}])$   
—  $V(x^2 - y^\alpha z) = \text{Spec}(k[x, y, x^2 y^{-\alpha}]) = \text{Spec}(k[\mathbb{N}(1, 0) + \mathbb{N}(0, 1) + \mathbb{N}(2, -\alpha)])$

*Slogan 2.3.* Les propriétés géométriques de  $V$  sont données par  $S$ .

**Théorème 2.4.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $V$  est normale<sup>1</sup>.
- $V = \text{Spec}(k[S])$  où  $S$  est un monoïde saturé<sup>2</sup>
- $V = \text{Spec}(k[\sigma^\vee \cap M])$ , où  $\sigma$  est un cône fortement convexe dans  $N \otimes \mathbb{R}$ .

La normalisation de  $\text{Spec}(k[S])$  est  $\text{Spec}(k[\text{Cone}(S) \cap M])$  (et le morphisme entre les deux est induit par l'inclusion  $S \hookrightarrow \text{Cone}(S) \cap M$ ).

**Example 2.5.** —  $V(x^2 - y^3) = \text{Spec}(k[2\mathbb{N} + 3\mathbb{N}])$  n'est pas normale ( $\text{Cone}(2\mathbb{N} + 3\mathbb{N}) \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N} \neq 2\mathbb{N} + 3\mathbb{N} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ).  
—  $V(x^2 - y^\alpha z) = \text{Spec}(k[\mathbb{N}(1, 0) + \mathbb{N}(0, 1) + \mathbb{N}(2, -\alpha)])$  normale si  $\alpha \geq 1$ .  
La normalisation de cette variété pour  $\alpha = 2$  est le spectre premier de la  $k$ -algèbre suivante :

$$k[\mathbb{N}(1, 0) + \mathbb{N}(0, 1) + \mathbb{N}(2, -2)] \left[ \frac{x}{y} \right] = k[\mathbb{N}(1, 0) + \mathbb{N}(0, 1) + \mathbb{N}(1, -1)]$$

---

1. c'est-à-dire pour tout  $x \in V$ ,  $\mathcal{O}_{V,x}$  est intégralement clos i.e. est intègre et pour tout  $\frac{p}{q} \in \text{Frac}(\mathcal{O}_{V,x})$ ,  $(\exists P \in \mathcal{O}_{V,x}[t], P\left(\frac{p}{q}\right) = 0) \Rightarrow \frac{p}{q} \in \mathcal{O}_{V,x}$ . La normalisation est donnée par la clôture intégrale.

2.  $S$  est dit saturé s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :  
—  $\forall m \in M, \forall k \in \mathbb{N}_{>0}, km \in S \Rightarrow m \in S$   
—  $S = \text{Cone}(S) \cap M$

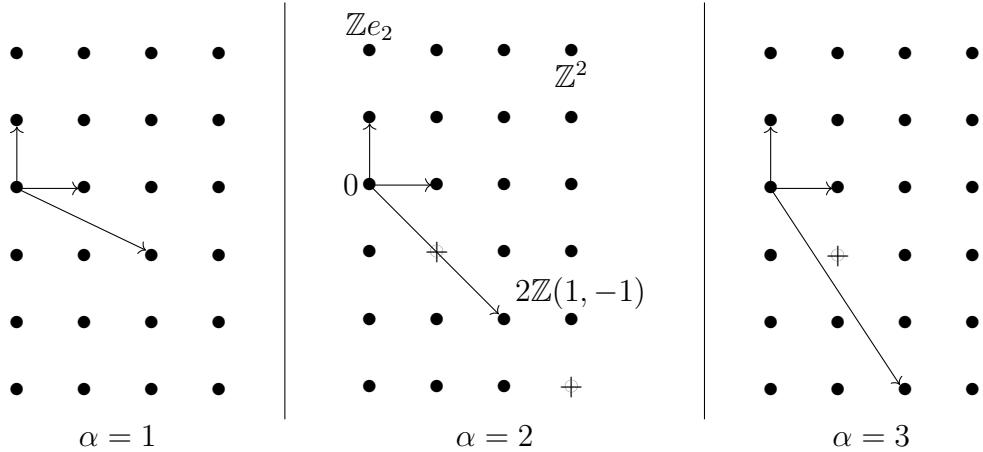


FIGURE 1 –  $\mathbb{N}(1, 0) + \mathbb{N}(0, 1) + \mathbb{N}(2, -\alpha)$

## 2.2 Caractérisation de la semi-normalité

**Definition 2.6.** Soit  $A \hookrightarrow B$  une extension entière d'anneaux. La semi-normalisation  $A_B^+$  de  $A$  dans  $B$  est la plus grande sous-extension  $A \hookrightarrow C \hookrightarrow B$  tel que

- $\text{Spec}(C) \rightarrow \text{Spec}(A)$  est bijective ;
  - Pour tout  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(C)$ ,  $\kappa(\mathfrak{q}) \rightarrow \kappa(\mathfrak{q} \cap A)$  est un isomorphisme.
- $A$  est semi-normal dans  $B$  si  $A_B^+ = A$ .

**Definition 2.7.** Une variété affine est semi-normale si son anneau de coordonnées  $k[X]$  est semi-normal dans l'anneau de coordonnées  $k[X']$  de sa normalisation. Une variété est semi-normale si elle est semi-normale sur chaque ouvert affine.

**Proposition 2.8.** *A une variété  $X$ , on peut associer, de façon fonctorielle, sa semi-normalisation  $X^+$*

Si  $k$  est un corps algébriquement clos de caractéristique 0 alors  $X^+$  est la plus grande variété avec des morphismes  $X' \rightarrow X^+ \rightarrow X$  où  $X^+ \rightarrow X$  est une bijection.

**Proposition 2.9.** *Soit  $X$  une variété affine. Les assertions suivantes sont équivalentes*

1.  $X$  est semi-normale ;
2.  $\forall f \in \mathcal{K}(X), f^2, f^3 \in k[X] \Rightarrow f \in k[X]$ .

- Example 2.10.**
- $V(x^2 - y^2z)$  est semi-normale ;
  - $V = V(x^2 - y^3z)$  n'est pas semi-normale car  $\frac{x}{y} \notin k[V]$  mais  $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = yz$  et  $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = xz$  sont dans  $k[V]$ .

**Definition 2.11.** Soit  $S \subset M$  un monoïde finiment engendré inclus dans un réseau. Ce monoïde est dit semi-saturé si

$$\forall m \in M, 2m, 3m \in S \Rightarrow m \in S.$$

Cela est équivalent à

$$\forall m \in M, (\forall k \gg 0, km \in S) \Rightarrow m \in S.$$

**Proposition 2.12.** Soit  $V$  une variété torique affine. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $V$  est semi-normale ;
- $V = \text{Spec}(k[S])$  où  $S$  est semi-saturé.

**Example 2.13.** voir figure 1

### 2.3 Monoïdes semi-saturés

**Théorème 2.14.** (Reid-Roberts) Soit  $S$  un sous-monoïde finiment engendré de  $\mathbb{Z}^n$ . Alors sa semi-normalisation est donnée par

$$S^+ = \coprod_{\tau \preceq \text{Cone}(S)} \mathbb{Z}(S \cap \tau) \cap \text{relint}(\tau)$$

**Corollaire 2.15.** Soit  $S$  un sous-monoïde semi-saturé de  $\mathbb{Z}^n$ . Alors

$$S = \coprod_{\tau \preceq \text{Cone}(S)} \mathbb{Z}(S \cap \tau) \cap \text{relint}(\tau)$$

Un tel monoïde est donc équivalent à la donnée d'une famille  $(G^\tau)_{\tau \preceq \text{Cone}(S)}$  tel que

- $G^{\text{Cone}(S)} = \mathbb{Z}S$
- Pour  $\tau \preceq \tau'$ ,  $G^\tau$  est un sous-groupe d'indice fini de  $G^{\tau'} \cap \text{Vect}(\tau)$ . En particulier,  $G^\tau$  est de rang égal à la dimension de  $\tau$ .

**Example 2.16.** Voir figure 1

## 3 Variétés toriques semi-normales

### 3.1 Éventails à monoïdes et construction de variétés toriques

Cette sous-section vient de l'article de Gonzalez-Perez et Teissier

**Definition 3.1.** Un éventail à monoïdes est un triplet  $(N, \Sigma, \Gamma)$  où  $N$  est un réseau,  $\Sigma$  est un éventail de  $N_{\mathbb{R}}$  et  $\Gamma = (\Gamma_{\sigma})_{\sigma \in \Sigma}$  est une famille de monoïdes finiment engendrés tels que

- $\Gamma_{\sigma}$  est un sous-monoïde de  $\sigma^{\vee} \cap N^{\vee}$
- $\mathbb{Z}\Gamma_{\sigma} = N^{\vee}$
- $\text{Cone}(\Gamma_{\sigma}) = \sigma^{\vee}$
- $\Gamma_{\tau} = \Gamma_{\sigma} + \mathbb{Z}(\Gamma_{\sigma} \cap \tau^{\perp})$

Un morphisme d'éventails à monoïdes  $(N, \Sigma, \Gamma) \rightarrow (N', \Sigma', \Gamma')$  est un morphisme de groupes  $\varphi: N \rightarrow N'$  tel que

$$\forall \sigma \in \Sigma, \exists \sigma' \in \Sigma', \varphi^{\top}(\Gamma_{\sigma'}) \subset \Gamma_{\sigma}$$

*Remarque 3.2.* Un tel morphisme est automatiquement un morphisme d'éventails  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ .

Soit  $(N, \Sigma, \Gamma)$  un éventail à monoïdes.

À un cône  $\sigma$ , on associe le schéma  $\text{Spec}(k[\Gamma_{\sigma}])$  dont la normalisation de  $\text{Spec}(k[\sigma^{\vee} \cap M])$ . Si  $\sigma, \tau \in \Sigma$  alors  $\text{Spec}(k[\Gamma_{\sigma \cap \tau}])$  est un ouvert de  $\text{Spec}(k[\Gamma_{\sigma}])$  et  $\text{Spec}(k[\Gamma_{\tau}])$ . On peut donc associer à un éventail à monoïdes une variété torique

$$X_{\Sigma}^{\Gamma} := \text{colim}_{\sigma \in \Sigma} \text{Spec}(k[\Gamma_{\sigma}]).$$

La variété torique  $X_{\Sigma}$  est la normalisation de  $X_{\Sigma}^{\Gamma}$ .

**Definition 3.3.** L'action d'un groupe algébrique  $G$  sur une variété algébrique  $X$  est bonne si  $X$  est recouverte par un nombre fini d'ouverts affines  $G$ -invariants.

C'est automatique dans le cas normal par le théorème de Sumihiro.

**Example 3.4.** La courbe nodale  $C := \{y^2z = x^2(x + z)\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  est une variété torique semi-normale non-normale qui ne peut pas être recouverte par des ouverts invariants. En effet, le groupe  $C \setminus [0 : 0 : 1]$  est isomorphe au groupe algébrique  $\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}$  et le seul ouvert équivariant est lui-même (et le vide).

**Théorème 3.5.** *L'association  $(N, \Sigma, \Gamma) \mapsto X_{\Sigma}^{\Gamma}$  induit une équivalence de catégories  $\mathfrak{Fans}^{mon} \rightarrow \mathfrak{VarTor}$  entre la catégorie des éventails à monoïdes et celles des variétés toriques avec une bonne action de leur tore.*

### 3.2 Éventails à groupes et variétés toriques semi-normales

Soit  $(N, \Sigma, \Gamma)$  un éventail à monoïdes tel que  $\Gamma_{\sigma}$  est semi-saturé pour tout  $\sigma \in \Sigma$ .

On a alors

$$\Gamma_{\sigma} = \coprod_{\tau \preceq \sigma} \underbrace{\mathbb{Z}(\Gamma_{\sigma} \cap \tau^{\perp})}_{=: G_{\sigma}^{\tau}} \cap \text{relint } \underbrace{(\tau^{\perp} \cap \sigma^{\vee})}_{\text{face duale de } \tau}$$

*Remarque 3.6.* L'indexation de la somme disjointe revient à indexer par les faces de  $\sigma^{\vee}$  par la bijection décroissante  $\tau \mapsto \tau^{\perp} \cap \sigma^{\vee}$

**Proposition 3.7.** *Le groupe  $G_{\sigma}^{\tau}$  ne dépend pas de  $\sigma$ .*

**Definition 3.8.** Un éventail à groupes est la donnée d'un triplet  $(N, \Sigma, G)$  où  $N$  est un réseau,  $\Sigma$  est un éventail de  $N_{\mathbb{R}}$  et  $G = (G_{\sigma})_{\sigma \in \Sigma}$  est une famille de sous-groupes de  $M$  tels que

- $G_0 = M$  ;
- Si  $\tau \preceq \sigma$  alors  $G_{\sigma}$  est un sous-groupe d'indice fini de  $G_{\tau} \cap \sigma^{\vee}$ .

**Example 3.9.**

**Definition 3.10.** Un morphisme d'éventails à groupes  $(N, \Sigma, G) \rightarrow (N', \Sigma', G')$  est un morphisme de groupes  $N \rightarrow N'$  tels que

- $\forall \sigma \in \Sigma, \exists \sigma' \in \Sigma', \varphi^{\top}(G_{\sigma'}) \subset G_{\sigma}$  ;
- $\forall \sigma \in \Sigma, \exists \sigma' \in \Sigma', \varphi(\sigma) \subset \sigma'$ .

**Example 3.11.** Considérons  $(\mathbb{Z}^2, \Sigma_{\mathbb{R}_{\geq 0}^2}, G)$  où  $\Sigma_{\mathbb{R}_{\geq 0}^2} = \{0, 0 \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\geq 0} \times 0, \mathbb{R}_{\geq 0}^2\}$  et  $G = \{\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z} \times 0, 0 \times \mathbb{Z}, 0\}$  et le morphisme de groupes  $\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, (x, y) \mapsto (-x, -y)$ . Pour tout  $\sigma \in \Sigma_{\mathbb{R}_{\geq 0}^2}$ , on a  $\varphi^{\top}(G_{\sigma}) = G_{\sigma}$  mais cela n'envoie pas  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ .

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{Fan}^{mon} & \xrightarrow{\simeq} & \mathfrak{TorVar} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathfrak{Fan}^{mon,sn} & \xrightarrow{\simeq} & \mathfrak{TorVar}^{sn} \\
\uparrow F & & \\
\mathfrak{Fan}^{gr} & & 
\end{array}$$

où  $F : (N, \Sigma, G) \mapsto (N, \Sigma, \Gamma)$  avec  $\Gamma_\sigma = \coprod_{\tau \preceq \sigma} G_\tau \cap \text{relint}(\tau^\perp \cap \sigma^\vee)$  et vaut l'identité sur les morphismes.

**Théorème 3.12** (Bernard,B). *L'association  $(N, \Sigma, G) \mapsto (N, \Sigma, \Gamma) \mapsto X_\Sigma^\Gamma$  induit une équivalence de catégories  $\mathfrak{Fan}^{gr} \rightarrow \mathfrak{VarTor}^{sn}$  entre la catégorie des éventails à groupes et celles des variétés toriques semi-normales avec une bonne action*

La difficulté dans la démonstration se situe dans la démonstration que  $F$  est effectivement un foncteur à cause des conditions de compatibilité.