

Géométrie torique quantique

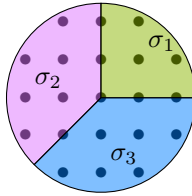
Antoine BOIVIN

Résumé

Les variétés toriques sont des variétés algébriques qui sont entièrement déterminées par la donnée combinatoire d'un éventail de cônes rationnels (par rapport à un réseau de \mathbb{R}^d) fortement convexes. Cette rationalité fait que ces variétés toriques sont rigides car perturber un peu un réseau peut le faire devenir dense. Le but de cet exposé est d'introduire une généralisation champêtre des variétés toriques où le "réseau" est en fait un sous-groupe finiment engendré de \mathbb{R}^d (dans le cas où les cônes sont simpliciaux comme introduit par Katzarkov, Lupercio, Meersseman et Verjovsky puis dans le cas général).

Introduction

Une variété torique est une variété algébrique complexe muni d'une action de groupe du tore algébrique $(\mathbb{C}^*)^n$ ayant une orbite dense isomorphe à celui-ci. Lorsqu'elle est normale et séparée, une variété torique est entièrement déterminée par la donnée d'une collection (appelés éventails) de cônes rationnels (i.e. engendré par des éléments d'un réseau) de \mathbb{R}^d (les cônes donnent des cartes affines et les intersections donnent les changement de cartes.



Cet éventail correspond à \mathbb{P}^2 .

Ce qui se traduit par une équivalence de catégories :

$$(\text{variétés toriques}) \simeq (\text{éventails})$$

La rationalité de ces cônes implique que la structure est rigide : si on déforme un cône rationnel avec son réseau sous-jacent, on obtient quelque chose qui n'est plus un réseau (Penser à $\Gamma_\alpha := \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$).

Le but de cet exposé sera d'expliquer comment étendre cette équivalence de catégories à des éventails (dit "quantiques") qui ne sont plus adossés à des réseaux mais à des sous-groupes finiment engendrés de \mathbb{R}^d afin de pouvoir calculer des espaces de modules de variétés toriques.

Table des matières

1 Cas simplicial	2
1.1 Premières définitions de géométrie torique quantique	2
1.2 Construction globale	3
2 Espaces de modules	4
3 Cas non simplicial	5
3.1 Variétés toriques quantiques affines	6
3.2 Quotient global	8
4 Compactification	8

La première étape est de remplacer le tore $\mathbb{T}^d := (\mathbb{C}^*)^d = \mathbb{C}^d / \mathbb{Z}^d$ par \mathbb{C}^d / Γ (puis par une version plus élaborée). Le problème de ce quotient est que ce n'est plus une variété en général (au moins, pour des questions de séparation). Il est donc plus judicieux de considérer la version champêtre de celui-ci.

Cela permet de conserver une structure analytique et la donnée des groupes d'isotropie et ne pas avoir seulement un espace topologique.

1 Cas simplicial

1.1 Premières définitions de géométrie torique quantique

Calibration de $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ ($\mathbb{Z}^d \subset \Gamma$) = un épimorphisme $h : \mathbb{Z}^N \rightarrow \Gamma$ tel que $h(e_i) = e_i$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$;

Tore quantique associé à une calibration (h, \mathcal{I}) = le champ quotient

$$\mathcal{G}_{h, \mathcal{I}}^{cal} := [\mathbb{C}^d / \mathbb{Z}^N]$$

où l'action de \mathbb{Z}^N sur \mathbb{C}^d est

$$m \cdot z = z + h(m)$$

Remark 1.1. La différence avec $[\mathbb{C}^d / \Gamma]$ est la présence d'ineffectivité.

Un morphisme de tores quantiques est donné par deux morphismes linéaires $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$ and $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N'}$ avec une application $s : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$, compatibles avec les calibrations

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{(x,y) \mapsto (y,2x)} & \mathbb{Z}^2 \\
\langle -, (1, \sqrt{2}) \rangle \downarrow & & \downarrow \langle -, (1, \sqrt{2}) \rangle \\
\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} & \xrightarrow{z \mapsto z\sqrt{2}} & \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{C} & \xrightarrow{z \mapsto z\sqrt{2}} & \mathbb{C} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{T}_h = [\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}] & \xrightarrow{\llbracket z \mapsto z\sqrt{2} \rrbracket} & \mathcal{T}_h = [\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}]
\end{array}$$

A comparer avec les morphismes de tores qui sont de la forme $z \mapsto z^n$
Forme multiplicative du tore quantique :

$$\mathcal{T}_{h,\mathcal{I}}^{cal} \simeq [\mathbb{T}^d / \mathbb{Z}^{N-d}]$$

où l'action de \mathbb{Z}^{N-d} sur $\mathbb{T}^d := (\mathbb{C}^*)^d$ est

$$m \cdot z = E(h(0_{\mathbb{Z}^d} \oplus m))z$$

où $E(z_1, \dots, z_d) = (\exp(2i\pi z_1), \dots, \exp(2i\pi z_d))$

Definition 1.2. Un cône σ de \mathbb{R}^d est simplicial s'il existe un automorphisme L de \mathbb{R}^d tel que $L\sigma = \text{Cone}(e_1, \dots, e_k)$ où e_1, \dots, e_d est la base canonique de \mathbb{R}^d .

Definition 1.3. La variété torique associée au cône $C_d = \text{Cone}(e_1, \dots, e_d) \subset \mathbb{R}^d$ et à la calibration (h, \mathcal{I}) est le champ $[\mathbb{C}^d / \mathbb{Z}^{N-d}] \supset \mathcal{T}_{h,\mathcal{I}}^{cal}$

La définition précédente est suffisante pour définir la variété associée à n'importe quel cône simplicial (de dimension maximale¹) quitte à appliquer un isomorphisme linéaire pour redresser le cône.

Definition 1.4. Un morphisme de variétés toriques quantiques affines est un morphisme de champ qui se restreint en un morphisme torique.

1.2 Construction globale

Un éventail quantique est la donnée de

- Un sous-groupe finiment engendré Γ de \mathbb{R}^d ;
- Une calibration $(h^{cal} : \mathbb{Z}^N \rightarrow \Gamma, \mathcal{I})$ de Γ ;
- Une famille Δ de cônes fortement convexes $\sigma = \sigma_I$ de \mathbb{R}^d qui sont engendrés par des $v_i := h^{cal}(e_i), i \in I \subset \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{I}$ tels que
 - toute intersection de cônes de Δ est un cône de Δ ;
 - Toute face d'une cône de Δ est Δ .

1. si on considère un cône de plus petite dimension, on prend $\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}$

C'est une généralisation des éventails champêtres étendus en géométrie algébrique.

Definition 1.5.

$$\mathcal{X}_{\Delta, h^{cal}, \mathcal{I}} := \operatorname{colim}_{\Delta_{max}} \left(\begin{array}{ccc} & & \mathcal{U}_{\sigma} \\ & \nearrow & \\ \mathcal{U}_{\sigma \cap \tau} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{U}_{\tau} \end{array} \right)$$

Cela peut être décrit par des données de descente :

Proposition 1.6. *Soit $T \in \mathfrak{A}$. Un objet de $\mathcal{X}_{\Delta, h^{cal}, \mathcal{I}}^{cal}$ au-dessus de T est un recouvrement $(T_I := T_{\sigma_I})_{I \in \Delta_{max}}$ de T avec des objets $\mathcal{U}_{\sigma_I}^{cal}$ au-dessus T_I*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}_I & \xrightarrow{m_I} & \mathbb{C}^d \\ \downarrow & & \\ T_I & & \end{array}$$

pour tout $\sigma_I \in \Delta_{max}$, satisfaisant pour n'importe quel couple (I, I') avec une intersection non-vide J

$$\mathcal{G}_{II'} \left(\begin{array}{ccc} m_I^{-1}(\mathcal{S}_{\sigma_I \sigma_{I'}}) & \xrightarrow{m_I} & \mathcal{S}_{\sigma_I \sigma_{I'}} \\ \downarrow & & \\ T_I & & \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} m_{I'}^{-1}(\mathcal{S}_{\sigma_{I'} \sigma_I}) & \xrightarrow{m_{I'}} & \mathcal{S}_{\sigma_{I'} \sigma_I} \\ \downarrow & & \\ T_{I'} & & \end{array}$$

Theorem 1.7 (Katzarkov, Lupercio, Meersseman, Verjovsky ; 2020). *La correspondance $(\Delta, h^{cal}, \mathcal{I}) \mapsto \mathcal{X}_{\Delta, h^{cal}, \mathcal{I}}^{cal}$ est fonctorielle et induit une équivalence de catégories entre la catégorie des éventails quantiques calibrés simpliciaux et la catégorie des variétés toriques quantiques calibrées simpliciales.*

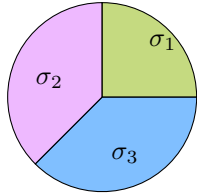
Remark 1.8.

Algébrique	Quantique
DM	champs analytiques
groupes d'ineffectivité finis	$\simeq \mathbb{Z}^P$

2 Espaces de modules

Le théorème précédent nous dit que le calcul d'espaces de modules des variétés toriques quantiques se fait entièrement par des considérations d'algèbre linéaire sur les calibrations :

Definition 2.1. — On appelle type combinatoire d'un éventail le poset des sous-ensembles I de $\{1, \dots, p\}$ tel que $\sigma_I \in \Delta$.



$$D = (1, 2, 3, 12, 13, 23)$$

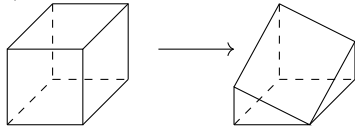
— Soit D un type combinatoire. L'espace de modules des variétés toriques quantiques de type combinatoire D est :

$$\mathcal{M}(d, n, D) = \{h : \mathbb{Z}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (h(e_1), \dots, h(e_p)) \text{ est } D\text{-réalisable}\} / \text{iso}$$

Theorem 2.2. $\mathcal{M}(d, n, D)$ est un orbifold réel (non compact) de dimension $d(n-d)$ (isomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{d(n-d)}$ modulo une action de $\text{Aut}(D) \times \mathfrak{S}_{n-p}$)

Example 2.3. $\mathcal{M}(2, 3, D) = [\mathbb{R}_{<0}^2 / \mathfrak{S}_3]$.

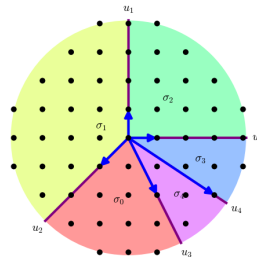
Example 2.4. Le Flip d'indice (2,2) décrit une déformation du type combinatoire de $(\mathbb{P}^1)^3$ (décrit par le cube) vers un type combinatoire non-simplicial (décrit par un polytope non-simple) :



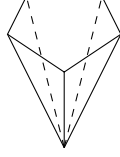
3 Cas non simplicial

Cônes non-simpliciaux I

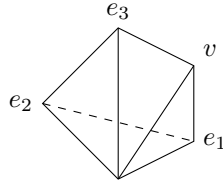
— existe seulement en dimension ≥ 3



— peuvent avoir un nombre arbitraire de 1-cones (en prenant le cône pointé décrit par un polygone à n côtés) alors qu'un cône simplicial en a autant que sa dimension.



- n'a pas de description simple des faces $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, v := e_1 - e_2 + e_3) \subset \mathbb{R}^3$



Ses faces sont :

- $\text{Cone}(e_1), \text{Cone}(e_2), \text{Cone}(e_3), \text{Cone}(v)$ (avec 1 générateur) ;
- $\text{Cone}(e_1, e_2), \text{Cone}(e_2, e_3), \text{Cone}(e_1, v), \text{Cone}(e_3, v)$ (avec 2 générateurs) ;
- pas de cône avec 3 générateurs

3.1 Variétés toriques quantiques affines

Cadre

- Un sous-groupe finiment engendré Γ de \mathbb{R}^d ;
- Une calibration $(h^{cal} : \mathbb{Z}^N \rightarrow \Gamma, \mathcal{I})$ de Γ ;
- Un cône fortement convexe $\sigma = \sigma_I$ de \mathbb{R}^d de dimension d (i.e. $\dim \text{Vect}(\sigma) = d$) qui est engendré par des $v_i := h^{cal}(e_i), i \in I \subset \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{I}$.

Construction de variétés toriques quantiques affines

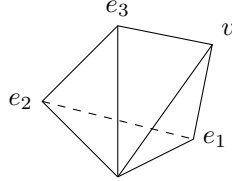
Soit $h_\sigma := h|_{\mathbb{R}^I} : x = (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I \mapsto \sum_{i \in I} x_i h(e_i)$ un épimorphisme (c'est un iso ssi $|I| = d$).

Lemma 1. *Il existe un isomorphisme de champs entre $\mathcal{F}_{h, \mathcal{I}}^{cal}$ et $[\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^{N-d} \times E(\ker(h_{\sigma_{\mathbb{C}}}))]$ (présentation adaptée au cône)*

Le champ $\mathcal{Q}_\sigma^{cal} := [\mathbb{C}^I / \mathbb{Z}^{N-d} \times E(\ker(h_{\sigma_{\mathbb{C}}}))]$ est la variété torique quantique associée au cône σ et la calibration $h^{cal} : \mathbb{Z}^N \rightarrow \Gamma$ (ne dépend pas de la présentation choisie à isomorphisme naturel près).

Exemple

Soit $h^{cal} : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{R}^3$, $e_i \mapsto e_i$ pour $i = 1, 2, 3$, $e_4 \mapsto v := ae_1 - be_2 + ce_3$, $e_k \mapsto v_k$ et $\Gamma = h^{cal}(\mathbb{Z}^N)$. Soit $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, v)$.



Ce cone encode une action de $\mathbb{Z}^{N-3} \times E(\mathbb{C}(v, -1))$ on $\mathbb{C}^4 = (\mathbb{C}^3 \times 0) \oplus \mathbb{C}(v, -1)$ définie par :

$$(m, E(\lambda(v, -1))) \cdot z = E(h^{cal}(m) + \lambda(v, -1))z$$

La variété torique quantique associée à σ est le champ quotient

$$\mathcal{U}_\sigma^{cal} = [\mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}^{N-3} \times E(\mathbb{C}(v, -1))]$$

Liens avec les autres constructions

- Considérons le cadre classique i.e. Γ is a lattice et la calibration est un isomorphisme, alors
 - \mathcal{U}_σ^{cal} n'est pas isomorphe à la variété torique U_σ
 - $U_\sigma = \mathbb{C}^I // E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))$ (quotient catégorique)
- Pour un Γ général mais avec σ simplicial, on a un isomorphisme torique :

$$[\mathbb{C}^I / \mathbb{Z}^{N-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))] = \mathcal{U}_\sigma^{cal} \simeq Q_{d, P_X^{-1} \circ \varphi}^{cal} := [\mathbb{C}^d / \mathbb{Z}^{N-d}]$$

La globalisation se fait de la même façon que dans le cas simplicial.

Correspondance

Theorem 3.1 (B. ; 2020). *La correspondance $(\Delta, h^{cal}, \mathcal{I}) \mapsto \mathcal{X}_{\Delta, h^{cal}, \mathcal{I}}^{cal}$ est fonctorielle et induit une équivalence de catégories entre la catégorie des éventails quantiques calibrés et la catégorie des variétés toriques quantiques calibrés.*

Remark 3.2. La construction de Perles i.e. la construction d'un polytope non-simple qui ne peut pas être réalisé de façon rationnel) fait que l'espace de modules peut être compliqué.

3.2 Quotient global

Quotient GIT quantique

Theorem 3.3 (Katzarkov, Lupercio, Meersseman, Verjovsky ; 2020). *Si l'éventail quantique, la variété torique quantique $\mathcal{X}_{\Delta, h^{cal}, \mathcal{I}}^{cal}$ est décrite par un quotient global $[\mathcal{S}/\mathbb{C}^{N-d}]$ où \mathbb{C}^{N-d} agit sur \mathcal{S} par le morphisme $E \circ k_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{N-d} \rightarrow \mathbb{T}^N$ où k est défini par la transformation de Gale de la famille $(h^{cal}(e_i))_{i \in \{1, \dots, N\}}$*

Idée de preuve. On peut montrer que le sous-champ ouvert $\mathcal{U}'_{\sigma_t} := [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^{I^c} / \mathbb{C}^{N-d}] \subset [\mathcal{S}/\mathbb{C}^{N-d}]$ et \mathcal{U}'_{σ_t} sont isomorphes. \square

Proposition 3.4 (B. ; 2020). *Les champs \mathcal{U}'_{σ} et $\mathcal{U}'_{\sigma'}$ ne sont plus isomorphes si σ n'est pas simplicial.*

Donc, si Δ n'est pas simplicial, $\mathcal{X}_{\Delta, h^{cal}, \mathcal{I}}^{cal}$ et $[\mathcal{S}/\mathbb{C}^{N-d}]$ ne sont pas isomorphes.

Theorem 3.5. *Il y a un isomorphisme de champs*

$$\mathcal{X}_{\Delta, h^{cal}, \mathcal{I}}^{cal} \simeq [\mathcal{S}/\mathbb{Z}^{N-d} \times E(\ker(h_{\mathbb{C}}^{cal}))]$$

qui se restreint en un isomorphisme de tores entre les tores quantiques associés.

4 Compactification

L'espace de modules \mathcal{M} vient avec une famille universelle $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$ de variétés toriques quantiques de configuration D .

Theorem 4.1 (B. ; 2021). *Il existe une compactification naturelle $\overline{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M} = \mathcal{M}(d, n, D)$ i.e. il existe une famille $\overline{\mathcal{X}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}$ tel que :*

1.

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{X}} & \longleftarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [Gr(n-d, n)/Aut(D)] & \longleftarrow & \overline{\mathcal{M}} \longleftarrow \mathcal{M} \end{array}$$

2. *Au dessus d'un point $\overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$, on obtient une variété torique quantique d'une configuration dégénérée de D*

Example 4.2. Exemple du plan projectif ($\overline{\mathcal{M}} = \text{triangle}/D_3$, chaque coin représente un \mathbb{C}^2 et chaque côté un $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$)

$$\overline{\mathcal{M}(2, 3, D_{\mathbb{P}^2})} = [\text{Conv}([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])/\mathfrak{S}_3] \subset [\mathbb{RP}^2/\mathfrak{S}_3]$$

On each edges, we get a quotient of $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$ and on each vertices, we get a quotient of $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$.

