

# GTT : Variétés tropicales

Antoine BOIVIN

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Espaces linéaires tropicaux</b>	<b>1</b>
1.1	Espaces tropicaux associés à une matroïde . . . . .	1
1.2	Matroïdes non réalisables . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Fonctions régulières sur <math>\mathbb{T}^n</math></b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Définitions des variétés tropicales</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>La dimension 1</b>	<b>9</b>

Ce qui suit sont les notes de trois exposés donnés lors d'un groupe de travail sur la géométrie tropicale fait à l'université d'Angers en 2021-2022. Aucune définition ou démonstration n'est nouvelle et proviennent de [BIMS15] et [IMS08].

## 1 Espaces linéaires tropicaux

### 1.1 Espaces tropicaux associés à une matroïde

**Construction 1.1.1.** Soit  $\mathcal{L}$  un sous-espace affine de  $\mathbb{C}^n$  de dimension (complexe)  $k$ . On obtient un arrangement d'hyperplans  $\mathcal{A} = \bigcup_{i=0}^n \mathcal{L}_i$  dans  $\mathbb{P}^k \simeq \overline{\mathcal{L}} \subset \mathbb{P}^n$  en considérant les intersections  $\mathcal{L}_i = \overline{\mathcal{L}} \cap \{z_i = 0\}$  pour  $0 \leq i \leq n$ . Cet arrangement est un espace stratifié :

$$\mathcal{A} = \coprod_{I \subset \{0, \dots, n\} \text{ maximal}, S_I \neq \emptyset} S_I$$

où  $S_I := \overline{\mathcal{L}} \cap (\{0\}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c})$ .

En effet, on remarque que :

$$\overline{S_I} \setminus S_I = \coprod_{J \supset I} S_J$$

On définit un ensemble partiellement ordonné  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  dont les éléments sont les  $I$  maximaux tels que  $S_I \neq \emptyset$  et  $J \leq I$  si  $J \supset I$ .

**Exemple 1.1.2.** 1. Considérons  $\mathcal{L} := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + y = 1\}$ . Alors

$$\overline{\mathcal{L}} = \{[x : y : t] \in \mathbb{P}^2 \mid x + y = t\} \text{ et}$$

$$\mathcal{L}_0 = \{[x : y : t] \in \mathbb{P}^2 \mid x + y = t\} \cap \{x = 0\} = \{[0 : y : t] \mid y = t\} = \{[0 : 1 : 1]\}$$

On obtient de la même façon  $\mathcal{L}_1 = \{[1 : 0 : 1]\}$  et  $\mathcal{L}_2 = \{[1 : -1 : 0]\}$ .

On a alors  $S_i = L_i$  et  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  est constitué de trois points non comparables.

2. Considérons  $\mathcal{L} := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 1\}$ . Alors  $\overline{\mathcal{L}} = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3 \mid x + y + z = t\}$ . L'espace  $\mathcal{A}$  est alors l'union de quatre droites projectives de  $\mathbb{P}^3$ . Sa stratification est donnée par les points  $[0 : 0 : 1 : 1]$ ,  $[0 : 1 : 0 : 1]$ ,  $[0 : 1 : -1 : 0]$ ,  $[1 : 0 : 0 : 1]$ ,  $[1 : 0 : -1 : 0]$  et  $[0 : 1 : 1 : 1]$  et les intérieurs des droites projectives passant par trois d'entre eux.

*Remarque 1.1.3.* La condition de maximalité est importante puisque on peut avoir  $S_I = S_J$  sans que  $I = J$ .

Cela justifie la définition suivante :

**Définition 1.1.4.** Un sous-espace vectoriel  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^n$  est dit  $\partial$ -transversal si l'arrangement d'hyperplan  $\{\mathcal{L}_i\}$  associé vérifie pour tout  $I \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $\text{codim}_{\mathbb{C}^n} (\bigcap_{i \in I} \mathcal{L}_i) = |I|$ .

Pour un tel sous-espace, on a bien :

$$\mathcal{A} = \coprod_{I \subset \{0, \dots, n\}} S_I.$$

**Proposition 1.1.5** ([AK06]).  $\text{trop}(\mathcal{L} \cap (\mathbb{C}^*)^n)$ <sup>1</sup> dépend uniquement des propriétés d'intersection de  $\mathcal{A}$  i.e. du poset  $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$  associé.

1.  $:= \lim_{t \rightarrow \infty} \log_t |\mathcal{L} \cap (\mathbb{C}^*)^n|$  où  $|\cdot|$  est le module composante par composante.

**Proposition 1.1.6.** Notons  $e_0 = -\sum_{i=1}^n e_i$  et posons, pour tout  $I \subset \{0, \dots, n\}$ ,  $v_I = \sum_{i \in I} e_i$ .  
 Soit  $\mathcal{L}$  un sous-espace affine de  $\mathbb{C}^n$ . Alors

$$\text{trop}(\mathcal{L} \cap (\mathbb{C}^*)^n) = \bigcup \text{Cone}(v_i, i \in I_{i_k})$$

où l'union est sur les chaînes  $I_1 \leq \dots \leq I_t$  telles que  $\dim(S_{I_p}) = \dim(S_{I_{p+1}}) + 1$  pour tout  $0 \leq p \leq t-1$

**Exemple 1.1.7.** Pour  $\mathcal{L} = \{(x, y \in \mathbb{C}^2 \mid x + y = 1\}$ , on obtient la courbe tropicale donnée par " $x + y + 0 = \max(x, y, 0)$ ".

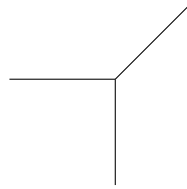


FIGURE 1 – Tropicalisation de  $x + y = 1$

Pour  $\mathcal{L} = \{(x, y \in \mathbb{C}^2 \mid x + y = 0\}$ , on obtient la courbe tropicale donnée par " $x + y + (-\infty) = \max(x, y)$ ".

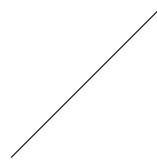


FIGURE 2 – Tropicalisation de  $x + y = 0$

**Définition 1.1.8** ([Oxl06]). Une matroïde est une paire  $(E, \mathcal{G})$  constitué d'un ensemble fini  $E$  et d'une famille de sous-ensemble de  $E$  tel que :

- $\emptyset \in \mathcal{G}$ ;
- Si  $I \in \mathcal{G}$  et  $I' \subset I$  alors  $I' \in \mathcal{G}$ .
- Si  $I_1, I_2 \in \mathcal{G}$  tels que  $|I_1| < |I_2|$  alors il existe un élément  $e$  de  $I_2 \setminus I_1$  tel que  $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{G}$

**Exemple 1.1.9.** Soit  $r$  un entier naturel. Une matroïde uniforme de rang  $r$  est la donnée  $(E, \{I \subset E \mid |I| \leq r\})$  où  $E$  est un ensemble fini.

**Exemple 1.1.10.** Soient  $k$  un corps et  $(C_1, \dots, C_n) \in (k^m)^n$ . La donnée  $(\llbracket 1, n \rrbracket, \{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \mid (C_i)_{i \in I} \text{ est une famille libre}\})$  est une matroïde.

**Définition 1.1.11.** Soit  $k$  un corps. On dit qu'une matroïde est réalisable sur  $k$  si elle peut se décrire à partir d'une famille de vecteurs d'un  $k$ -espace vectoriel comme dans l'exemple 1.1.10.

On verra un exemple de matroïde non-réalisable dans la sous-section suivante.

**Exemple 1.1.12.** Un arrangement d'hyperplans donné par un sous-espace vectoriel  $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^n$  définit une matroïde  $(E = \mathcal{P}_{\mathcal{A}}, \{\mathcal{G} \mid \text{codim}(\bigcap_{I \in \mathcal{G}} S_I) = \sum_{I \in \mathcal{G}} |I|\})$

**Définition 1.1.13.** Un espace linéaire tropical est l'objet obtenu par la construction de la proposition 1.1.6 à partir d'un matroïde.

Ici,  $n = |E|$  et  $d = \max_{I \in \mathcal{G}} |I|$

*Remarque 1.1.14.* Une matroïde non réalisable sur  $\mathbb{C}$  permet de construire un espace linéaire tropical qui n'est pas uniformément approximable par des espaces linéaires de  $\mathbb{C}^n$ .

## 1.2 Matroïdes non réalisables

Prenons la matroïde, appelée de Fano,  $(E, \mathcal{G})$  où  $E$  est de cardinal où  $\mathcal{G}$  est l'ensemble des points et des droites représentés par le diagramme suivant :

*Remarque 1.2.1.* C'est  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$  muni des relations d'incidences usuelles

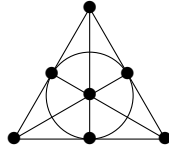


FIGURE 3 – Matroïde de Fano

On se fixe un corps  $k$

**Théorème 1.2.2 (Ceva).** Soit  $ABC$  un triangle du plan  $\mathbb{A}_k^2$ , soient  $D$ ,  $E$  et  $F$  trois points distincts des sommets et appartenant respectivement aux segments  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$ . Les droites  $(AD)$ ,  $(BE)$  et  $(CF)$  sont concourantes si et seulement si

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = -1$$

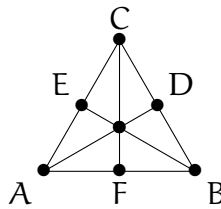


FIGURE 4 – Illustration du théorème de Ceva

**Théorème 1.2.3 (Ménélaüs).** Soit un triangle  $ABC$  du plan  $\mathbb{A}_k^2$ , et trois points  $D$ ,  $E$  et  $F$  des droites  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$  respectivement, différents des sommets du triangle. Les points  $D$ ,  $E$  et  $F$  sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = 1$$

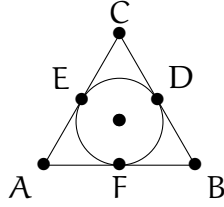


FIGURE 5 – Illustration du théorème de Ménélaüs

Si la matroïde de Fano est réalisable sur  $k$  alors par les théorèmes de Ceva et de Ménélaüs, on obtiendrait :

$$1 = \frac{\overline{FA} \overline{DB} \overline{EC}}{\overline{FB} \overline{DC} \overline{EA}} = -1$$

i.e.  $2 = 0$ . On en déduit alors que  $k$  est de caractéristique 2. Par conséquent, la matroïde de Fano n'est en particulier pas réalisable sur  $\mathbb{C}$ .

## 2 Fonctions régulières sur $\mathbb{T}^n$

**Définition 2.0.1.** Une fonction polynomiale tropicale est une fonction  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}$  défini par un polynôme tropical  $P = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i x^i \in \mathbb{T}[x]$  i.e.

$$\forall x \in \mathbb{T}^n, f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} a_i x^i = \max_i (a_i + \langle i, x \rangle)$$

Pour définir les fonctions régulières sur  $\mathbb{T}^n$ , il va falloir considérer donner un sens aux "quotients" (tropicaux) de fonctions polynomiales tropicales.

*Remarque 2.0.2.* Soit  $x, y \in \mathbb{T}$ . Le quotient " $\frac{x}{y}$ " =  $x - y$  est bien défini si, et seulement si,  $y \in \mathbb{R} = \mathbb{T} \setminus \{-\infty\}$ .

La première étape est le quotient de monômes :

**Lemme 2.0.3.** *Le quotient tropical de deux fonctions monômiales tropicales  $\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une forme affine  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto c + \langle x, p \rangle$  où  $c \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{Z}^n$ .*

**Définition 2.0.4.** On appelle un tel quotient une fonction  $\mathbb{Z}$ -affine.

**Définition 2.0.5.** Soit  $\Phi \in \mathbb{T}(x_1, \dots, x_n)$  une fraction rationnelle.

- Elle est dite finie en  $x \in \mathbb{T}^n$  s'il existe  $f, g \in \mathbb{T}[x]$  tel que  $\Phi = \frac{f}{g}$  et tel que  $g(x) \neq -\infty$  (on peut ainsi définir une valeur pour  $\Phi(x) := f(x) - g(x)$ );
- Elle est dite régulière en  $x$  si elle est finie en  $x$  et s'il existe une fonction  $\mathbb{Z}$ -affine finie en  $x$ , un voisinage<sup>2</sup>  $U$  de  $x$  et un polynôme tropical  $p \in \mathbb{T}[x_1, \dots, x_n]$  tel que

$$\forall y \in U, \Phi(y) = p(y) + \varphi(y)$$

**Exemple 2.0.6.** Dans  $\mathbb{T}^2$ ,  $\varphi = "xy^{-1}"$  est finie sur  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ .

**Notation 2.0.7.** Pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{T}^n$ , on note  $\mathcal{O}_{\mathbb{T}^n}(U)$  l'ensemble des fonctions donnée par une fraction rationnelle régulière en tout point de  $U$ .

**Proposition 2.0.8.**  $\mathcal{O}_{\mathbb{T}^n}$  est un faisceau en  $\mathbb{T}$ -algèbres tropicales.

*Démonstration.* La structure d'anneau tropical sur  $\mathcal{O}_{\mathbb{T}^n}(U)$  provient des opérations de  $\mathbb{T}$ , la structure d'algèbre de l'application  $\mathbb{T} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{T}^n}(U)$  donnée par les applications constantes. La compatibilité avec les recollements est une conséquence de la définition locale de régularité dans 2.0.5.  $\square$

*Remarque 2.0.9.* On peut aussi définir  $\mathcal{O}_{\mathbb{T}}$  comme le faisceautisé du pré-faisceau  $U \mapsto \{\text{polynômes de Laurent défini sur } U\}$ .

### 3 Définitions des variétés tropicales

Une variété tropicale est une variété localement modelé par des espaces linéaires tropicaux :

**Définition 3.0.1.** Un modèle local tropical est un sous-ensemble de  $\mathbb{T}^{N+s}$  de la forme  $M = L \times \mathbb{T}^s \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{T}^s$  où  $L$  est un espace linéaire tropical. Sa dimension est  $\dim(L) + s$ . On le munit du faisceau  $i^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{T}^{N+s}}$  où  $i : M \hookrightarrow \mathbb{T}^{N+s}$ .

---

2. pour la topologie euclidienne sur  $\mathbb{T}^n = [-\infty, \infty]^n$

*Remarque 3.0.2.* La classe des modèles locaux tropicaux est invariante par l'action des groupes  $GL_n(\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{R}^n$ .

**Définition 3.0.3.** Une variété tropicale lisse de dimension  $n$  est un espace topologique séparé muni d'une atlas  $\{\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow X_\alpha \subset \mathbb{T}^{N_\alpha}\}$  tel que :

1. pour tout  $\alpha$ ,  $X_\alpha$  est un modèle tropical de dimension  $n$  et  $\varphi_\alpha$  est une immersion ouverte ;
2. pour tout paire  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , la fonction de transition  $\varphi_{\alpha_2} \circ \varphi_{\alpha_1}^{-1}$  sur  $\varphi_{\alpha_1}(\mathcal{U}_{\alpha_1} \cap \mathcal{U}_{\alpha_2})$  est la restriction d'une application  $\mathbb{T}^{N_{\alpha_1}} \rightarrow \mathbb{T}^{N_{\alpha_2}}$  donné par une application affine entière.
3.  $X$  est de type fini i.e. il existe un recouvrement ouvert fini  $\{W_i\}$  tel que pour tout  $i$ , il existe  $\alpha$  tel que  $W_i \subset \mathcal{U}_\alpha$  et  $\overline{\varphi_\alpha(W_i)} \subset \varphi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathbb{T}^{N_\alpha}$

**Définition 3.0.4.** Un point d'une variété tropicale lisse est dit fini s'il est envoyé sur  $\mathbb{R}^{N_\alpha}$  par les cartes (cette propriété est indépendante des cartes choisies)

**Exemple 3.0.5.** —  $(\mathbb{T}^n, \text{id})$  est une variété tropicale de dimension  $n$ .  
 —  $(\mathbb{R}, \text{id} : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{T})$  n'est pas une variété tropicale (car pas de type fini  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{T} \not\subset \text{id}(\mathbb{R})$ ) mais  $([0, +\infty[, \text{id}), (\mathbb{R}, \text{id}), (]-\infty, 1], -\text{id})$  en est une.

**Exemple 3.0.6.** Soit  $\Lambda$  un réseau de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\{\mathcal{U}_\alpha\}$  un recouvrement d'ouverts de  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$\forall \alpha, \mathcal{U}_\alpha \cap (\mathcal{U}_\alpha + \Lambda) = \emptyset$$

Alors l'atlas  $\{\mathcal{U}_\alpha, \pi^{-1} : \pi(\mathcal{U}_\alpha) \rightarrow \mathcal{U}_\alpha\}$  (où  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\Lambda$  est la projection canonique) fait de  $\mathbb{R}^n/\Lambda \simeq (\mathbb{S}^1)^n$  une variété tropicale lisse.

**Exemple 3.0.7.** Considérons  $\mathbb{TP}^n := \mathbb{T}^{n+1} \setminus \{(-\infty, \dots, -\infty)\}$ /homothéties i.e.  $(x_0, \dots, x_n) \sim (" \lambda x_0 ", \dots, " \lambda x_n ") = (\lambda + x_0, \dots, \lambda + x_n)$  pour  $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{-\infty\} = \mathbb{R}$ . C'est une variété tropicale de  $n$  par l'atlas

$$\left( (\mathcal{U}_j := \{x_j \neq -\infty\}, \varphi_i : [x_0 : \dots : x_n] \in \mathcal{U}_i \mapsto \left( " \frac{x_0}{x_j} ", \dots, " \widehat{\frac{x_j}{x_j}} ", \dots, " \frac{x_n}{x_j} " \right) \in \mathbb{T}^n \right)$$



**Exemple 3.0.8.** Soit  $X$  une variété torique lisse normale de dimension  $n$  i.e. décrite par un éventail  $\Sigma$  dont tous les cônes sont engendrés par une sous-famille d'une base de  $\mathbb{Z}^n$  i.e. pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , il existe  $A_\sigma \in GL_n(\mathbb{Z})$  tel que

$$A_\sigma \sigma = \text{Cone}(e_1, \dots, e_{\dim(\sigma)}).$$

Si  $\dim(\sigma) = k$ , notons  $U_\sigma = \mathbb{T}^k \times (\mathbb{T} \setminus \{-\infty\})^{n-k} = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Pour  $\tau \subset \sigma$ , l'isomorphisme  $A_\sigma A_\tau^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  s'étend en une immersion ouverte  $U_\tau \hookrightarrow U_\sigma$ . On a ainsi pour toute paire de cônes  $(\sigma, \sigma')$  d'intersection  $\tau$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & U_\sigma \\ & \nearrow \text{ouvert} & \\ U_\tau & & \cdot \\ & \searrow \text{ouvert} & \\ & & U_{\sigma'} \end{array}$$

On obtient ainsi la tropicalisation de  $X$ , notée  $X^{\text{trop}}$ , qui est la variété tropicale obtenue comme colimite de ce diagramme.

**Définition 3.0.9.** Soit  $V$  une sous-variété tropicale. L'étoile de  $V$  en  $x$  est l'ensemble

$$\text{Star}_V(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0, x + \varepsilon v \in V\}$$

**Proposition 3.0.10.** Soit  $V$  une sous-variété tropicale de  $\mathbb{T}^n$ . C'est une variété tropicale lisse si pour tout  $x \in V$ ,  $\text{Star}_V(x)$  est un espace linéaire tropical.

Les points cruciaux à vérifier sont les points de la sous-variété tropical où la valence est plus grande que 3.

**Proposition 3.0.11.** Une variété tropicale compacte est un complexe polyédral fini.

## 4 La dimension 1

Le but de cette section est de montrer qu'une courbe tropicale compacte peut être décrite comme un graphe avec une distance complète.

On remarque tout d'abord que les changements de cartes préservent les distances :

**Lemme 4.0.1.**  $O(1) = GL_1(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$

**Proposition 4.0.2.** *Une courbe tropicale compacte est un graphe connexe fini  $\Gamma$  avec une distance complète sur  $\Gamma^\circ := \Gamma \setminus \{\text{sommet de valence } 1\}$*

*Démonstration.*  $\Rightarrow$  : Les sommets de valence 1 sont les points de  $\Gamma$  qui ne sont pas finis (i.e. dans les cartes allant dans  $\mathbb{T}$ ). Ainsi tous les éléments de  $\Gamma^\circ$  sont envoyés dans des  $\mathbb{R}^n$ . Comme les changements de cartes préservent la distance alors on peut recoller les distances des cartes en une distance sur  $\Gamma$ .

$\Leftarrow$  : Les intérieurs des arêtes du graphe sont envoyés de façon isométriques sur des intervalles de  $\mathbb{R}$  et pour chaque sommet  $v$  du graphe de valence  $N_v \geq 3$ , on considère le couple  $(U_v, \Phi_v : U_v \rightarrow X_v)$  où  $U_v$  est un voisinage de  $v$  et  $X_v$  est l'espace tropical linéaire  $\partial$ -transversal de  $\mathbb{R}^{N_v-1}$ . Cela permet de définir une structure de variété tropicale sur le graphe  $\Gamma^\circ$ . □

**Exemple 4.0.3.** DESSIN

## Références

- [AK06] Federico Ardila and Caroline J. Klivans. The bergman complex of a matroid and phylogenetic trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 96(1) :38–49, January 2006.
- [BIMS15] Erwan Brugallé, Ilia Itenberg, Grigory Mikhalkin, and Kristin Shaw. Brief introduction to tropical geometry, 2015.
- [IMS08] I. Itenberg, G. Mikhalkin, and E.I. Shustin. *Tropical Algebraic Geometry*. Oberwolfach Seminars. Birkhäuser Basel, 2008.
- [Oxl06] J.G. Oxley. *Matroid Theory*. Oxford graduate texts in mathematics. Oxford University Press, 2006.