Catégories abéliennes et foncteurs dérivés

Antoine BOIVIN

3 mars 2025 - 10 mars 2025

Table des matières

1 Catégories abéliennes

1.1 Des faits sur la catégorie des groupes abéliens

Notation 1.1.1. On note **Ab** le catégorie des groupes abéliens avec les morphismes de groupes entre eux. On note 0 le groupe trivial.

Proposition 1.1.2. *Soit A un groupe abélien. Il existe un unique morphisme $A \to 0$ et un unique morphisme $0 \to A$.*

Proposition 1.1.3. *Pour tout couple de groupes abéliens (A, B), $A \times B$ et $A \coprod B$ existent et le morphisme naturel*[1] *$A \coprod B \to A \times B$ est un isomorphisme. On note $A \oplus B$ ce groupe abélien*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d] \arrow[ddr] & \\ B \arrow[r] \arrow[drr] & A \coprod B \arrow[dr, dashed] & \\ & & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dashed] \arrow[drr] \arrow[ddr] & & \\ & A \times B \arrow[r] \arrow[d] & A \\ & B & \end{tikzcd}$$

1. donné par $A \simeq A \times 0 \overset{(id,!)}{\to} A \times B$ et $B \simeq 0 \times B \overset{(id,!)}{\to} A \times B$

On a ainsi deux morphismes naturels donnés par deux morphismes identités $A \to A$:

— le morphisme diagonal $\triangle \colon A \to A \oplus A$, $a \mapsto (a, a)$;

— le morphisme codiagonal $\nabla \colon A \oplus A \to A$, $(a, b) \mapsto a + b$

Remarque 1.1.4. Cela n'est pas vrai dans la catégorie des groupes **Gr** : le produit ne change pas mais le coproduit dans cette catégorie est le produit libre : si G et H sont décrits par générateurs et relations [2] $\langle A \mid R\rangle$ et $\langle B \mid S\rangle$ alors leur coproduit (traditionnellement noté $G * H$) est

$$\langle A \cup B \mid R \cup S\rangle$$

Par exemple, si $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \left\langle x \mid x^2 = 1\right\rangle$ et $H = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \left\langle y \mid y^3 = 1\right\rangle$ alors

$$G * H = \left\langle x, y \mid x^2 = 1, y^3 = 1\right\rangle \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$$

Proposition 1.1.5. *Pour toute paire de morphismes parallèles $A \rightrightarrows B$, l'égaliseur et le coégaliseur existent.*

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{eq}(f,g) \arrow[r] & A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \\
Z \arrow[u, "\exists"] \arrow[ur, "\forall"'] & &
\end{tikzcd}$$

On a : $\mathrm{eq}(f, g) = \ker(f - g) = \{x \mid f(x) = g(x)\}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \arrow[r] \arrow[dr, "\forall"'] & \mathrm{coeq}(f,g) \arrow[d, "\exists"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

On a : $\mathrm{coeq}(f, g) = \mathrm{coker}(f - g) = B/\operatorname{im}(f - g)$. □

Proposition 1.1.6. *Les monomorphismes [3] (i.e. les morphismes simplifiables à gauche) de groupes abéliens sont normaux et les épimorphismes [4] (i.e. les morphismes simplifiables à droite) de groupes abéliens sont conormaux i.e. un mono peut s'écrire comme le noyau d'un morphisme et un épi peut s'écrire comme le conoyau d'un morphisme.*

Démonstration. Si $A \hookrightarrow B$ alors $A = \ker(B \to B/A)$ et si $\pi \colon A \twoheadrightarrow B$ alors $B = \mathrm{coker}(\ker(\pi) \to A)$ □

Proposition 1.1.7. *Pour tout couple de groupes abéliens (A, B), $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, B)$ a une structure de groupe abélien naturelle.*

2. on note ⟨générateurs | relations⟩
3. morphisme injectif dans la catégorie des groupes abéliens
4. morphisme surjectif dans la catégorie des groupes abéliens

Démonstration. Considérons la loi $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A,B)\times\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A,B)$ définie par

$$f+g : x \in A \mapsto f(x) +_B g(x)$$

C'est une loi associative et commutative, d'élément neutre le morphisme nul $a \mapsto 0$ et l'inverse de f est $x \mapsto -f(x)$.

□

1.2 Catégories abéliennes générales

To Do : pré-abélienne suffit pour la structure de groupes abéliens, il n'y a pas besoin de l'isomorphisme (cf. Freyd) et expliciter le morphisme, faire $\mathrm{Vect}(X)$

Définition 1.2.1. Une catégorie est dite semi-additive si

1. elle a un objet nul (i.e. un objet initial et terminal) ;
2. elle contient tous les coproduits et produits binaires et pour toute paire d'objets (A,B), le morphisme naturel $A \coprod B \to A \times B$ (défini de la même façon que dans est un isomorphisme

Comme dans le cas des groupes abéliens, on a alors deux morphismes naturels $\triangle \colon A \to A \oplus A$ et $\triangledown : A \oplus A \to A$ pour tout objet A.

Proposition 1.2.2. *Si $\mathbf{S}$ est une catégorie semi-additive alors pour toute paire d'objets (A,B), $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(A,B)$ a une structure de monoïde abélien naturelle.*

Démonstration. Si $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(A,B)$ alors on définit leur somme comme la composée

$$A \xrightarrow{\triangle} A \oplus A \xrightarrow{f_1 \oplus f_2} B \oplus B \xrightarrow{\triangledown} B$$

et le zéro est la composée $A \to 0 \to B$. □

Définition 1.2.3. Une catégorie est dite abélienne si

1. elle est semi-additive ;
2. elle contient tous les égaliseurs et les coégaliseurs.
3. tout monomorphisme est normal et tout épimorphisme est conormal.

Exemple 1.2.4. — $\mathbf{Ab}$ est une catégorie abélienne.

- — Si R est un anneau, $R-\mathbf{Mod}$ est une catégorie abélienne.
- — Si X est un espace topologique, $\mathbf{PSh}(X,\mathbf{Ab})$ et $\mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab})$ sont des catégories abéliennes.
- — Si X est un espace topologique et $\mathbf{A}$ est une catégorie abélienne, $\mathbf{PSh}(X,\mathbf{A})$ et $\mathbf{Sh}(X,\mathbf{A})$ sont des catégories abéliennes.
- — Si $\mathbf{A}$ est une catégorie abélienne alors $\mathbf{A}^{op}$ aussi.

Exemple 1.2.5. — $\mathbf{Vect}(X)$ n'est pas une catégorie abélienne : prenons $X=\mathbb{R}$ et V le fibré en droites trivial sur X alors $f \colon V \to V$ défini par $(x,v) \mapsto (x,xv)$ est un monomorphisme mais ne peut pas être le noyau d'un morphisme car son noyau et son conoyau sont nuls (en dehors de 0, c'est un isomorphisme et on prolonge par continuité).

- **Gr** et **Ann** ne sont pas des catégories abéliennes car les produits et les coproduits ne coïncident pas.
- La catégorie des groupes abéliens sans torsion n'est pas une catégorie abélienne car le monomorphisme $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$ n'est pas le noyau d'un morphisme (le conoyau de ce morphisme est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui n'est pas sans torsion).

Théorème 1.2.6 (Freyd-Mitchell)**.** *Si* $\mathbf{C}$ *est une (petite) catégorie abélienne alors il existe un anneau* R *et un foncteur pleinement fidèle (et exact)* $\mathbf{C} \hookrightarrow R - \mathbf{Mod}$.

Théorème 1.2.7. *Si* $\mathbf{C}$ *est une catégorie abélienne (localement petite) qui a tous les coproduits et un générateurs compact projectif alors il existe un anneau tel que* $\mathbf{C} \simeq R - \mathbf{Mod}$.

Idées. Dans ce cas, on peut choisir $R = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(x, x)^{op}$ où x est un générateur compact projectif. Réciproquement, si $\mathbf{C} \simeq R - \mathbf{Mod}$ alors R est un générateur compact projectif. □

Définition 1.2.8. Soit $f : A \to B$. On appelle noyau de f, et on note $\ker(f)$, l'objet $\mathrm{eq}\,(f, 0\colon A \rightrightarrows B)$ et conoyau de f, et on note $\mathrm{coker}(f)$, l'objet $\mathrm{coeq}\,(f, 0\colon A \rightrightarrows B)$

Proposition 1.2.9. *Soit* $\mathbf{A}$ *une catégorie abélienne et* $f\colon A \to B$ *un morphisme dans* $\mathbf{A}$*. Alors*
- f *est un monomorphisme ssi* $\ker(f) = 0$
- f *est épimorphisme ssi* $\mathrm{coker}(f) = 0$

Démonstration. Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\mathbf{A}$. Alors l'objet $\ker(f)$ est l'objet de $\mathbf{A}$ tel que pour tout objet C de $\mathbf{A}$,

$$\mathrm{Hom}(C, \ker(f)) = \ker(f_*\colon \mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C, B))$$

Ainsi, $\ker(f) = 0$ si, et seulement si, pour tout objet de C, $\mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C, B)$ est injectif i.e. si, et seulement si, f est un monomorphisme. Le raisonnement dual donne l'autre résultat. □

Proposition 1.2.10. *Soit* $\mathbf{A}$ *est une catégorie abélienne. Un morphisme est un isomorphisme si, et seulement si, c'est un monomorphisme et un épimorphisme.*

Démonstration. Si c'est un isomorphisme alors c'est un monomorphisme et un épimorphisme. Réciproquement, soit $f : A \to B$ un morphisme qui est un monomorphisme et un épimorphisme. Comme $\mathbf{A}$ est une catégorie abélienne alors f est le noyau d'un morphisme g i.e. $g \circ f = 0 \circ f$. Comme f est un épimorphisme alors $g = 0$. On en déduit donc tout morphisme est un noyau de g et 0 et donc f est un isomorphisme. □

Remarque 1.2.11. Cela n'est pas vrai pour les anneaux : l'inclusion $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ est un monomorphisme et un épimorphisme mais n'est pas un isomorphisme :
- mono : clair par injectivité de i ;

— épi : soit $f, g : \mathbb{Q} \to R$ deux morphismes d'anneaux tels que $f \circ i = g \circ i$. Alors pour tout $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{f(m)}{f(n)} = \frac{f \circ i(m)}{f \circ i(n)} = \frac{g \circ i(m)}{g \circ i(n)} = \frac{g(m)}{g(n)} = g(x)$$

et donc $f = g$.

Corollaire 1.2.12. *Soit* $\mathbf{A}$ *une catégorie abélienne et* $f \colon A \to B$ *un morphisme dans* $\mathbf{A}$*. Alors* f *est un isomorphisme si, et seulement si,* $\ker(f) = 0$ *et* $\operatorname{coker}(f) = 0$*.*

Démonstration. f est un iso ssi f est un épi et un mono ssi $\ker(f) = 0$ et $\operatorname{coker}(f) = 0$. □

Proposition 1.2.13. *Si* $\mathbf{A}$ *est une catégorie abélienne alors pour toute paire d'objets* (A, B)*,* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(A, B)$ *est un groupe abélien.*

Démonstration. Décrivons l'inverse additif de $f : A \to B$ (on écrira $a+b$ au lieu de $\nabla(a, b)$) :
Considérons le morphisme $\varphi : A \oplus B \to A \oplus B$ défini par $(x, y) \mapsto (x, f(x)+y)$. Le noyau de cette application est nul et son conoyau aussi : notons π la projection $A \oplus B \to \operatorname{coker}(\varphi) =: C$ décrit par $a : A \to C$ et $b : B \to C$. Alors $\pi \circ \varphi = 0$ i.e. $a = 0$ et $a \circ u + b = 0$ et donc $b = 0$. On en déduit que le conoyau de φ est nul. On en déduit donc que φ est un isomorphisme et son inverse s'écrit $A \oplus B \to A \oplus B$, $(x, y) \mapsto (x, v(x) + y)$. Ainsi $u + v = 0$. □

Définition 1.2.14. On appelle image de f l'objet $\ker(B \to \operatorname{coker}(f))$ et coïmage de f l'objet $\operatorname{coker}(\ker(f) \to A)$.

Proposition 1.2.15 ([Fre64] Theorem 2.19)**.** *Soit* $\mathbf{A}$ *est une catégorie abélienne. L'image et la coïmage d'un même morphisme sont isomorphes dans* $\mathbf{A}$*. De plus, tout morphisme s'écrit comme une composition d'un épimorphisme et d'un monomorphisme.*

Idées de preuve. Soit $f : A \to B$ un morphisme de $\mathbf{A}$. Alors la composition $\ker(f) \to A \to B$ est toujours nulle. On obtient donc un morphisme $\operatorname{coker}(\ker(f)) \to B$ (et un épimorphisme $A \to \operatorname{coker}(\ker(f))$). De la même façon, la composition $\operatorname{coker}(\ker(f)) \to B \to \operatorname{coker}(f)$ est nulle ; on obtient alors un morphisme $\operatorname{coker}(\ker(f)) \to \ker(\operatorname{coker}(f))$ (et un monomorphisme $\ker(\operatorname{coker}(f)) \to B$). En conclusion, on a :

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, two heads] & & B \arrow[r] & \operatorname{coker}(f) \\
& \operatorname{coker}(\ker(f)) \arrow[rr] \arrow[urr] & & \ker(\operatorname{coker}(f)) \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

Le morphisme du bas est un isomorphisme. □

1.3 Suites exactes et complexes

Soit $\mathbf{A}$ une catégorie abélienne.

Définition 1.3.1. Un complexe de $\mathbf{A}$ est la donnée d'une suite d'objets $(E^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbf{A}$ et de morphismes $d_n \colon E^n \to E^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, d^{n+1} \circ d^n = 0.$$

On notera $(E^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ou $(E^\bullet, d^\bullet)$ un tel complexe ou de la façon suivante :

$$\dots \longrightarrow E^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} E^n \xrightarrow{d^n} E^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

Si E^n est nul à partir d'un certain ou avant un certain rang, on se permettra de ne pas les écrire dans le complexe

Proposition 1.3.2. *Si (E^n, d^n) est un complexe alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{im}(d^{n-1}) \hookrightarrow \ker(d^n)$*

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}
\ker(d^{n-1}) \arrow[r] & E_{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, two heads] & E_n \arrow[r, "d^n"] & E_{n+1} \\
& \operatorname{coker}(\ker(d^{n-1})) \arrow[r, hook] \arrow[ur, hook] & \ker(d^n) \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

□

Définition 1.3.3. Un morphisme de complexes $(A^\bullet, d^\bullet) \to (B^\bullet, \delta^\bullet)$ est une famille de morphismes $(f^i : A^i \to B^i)$ tels que

$$\begin{tikzcd}
A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[d, "f^i"] & A^{i+1} \arrow[d, "f^{i+1}"] \\
B^i \arrow[r, "\delta^i"'] & B^{i+1}
\end{tikzcd}$$

commutent pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbf{Ch}(\mathbf{A})$ la catégorie des complexes dans $\mathbf{A}$.

Proposition 1.3.4. *Si $\mathbf{A}$ est une catégorie abélienne alors $\mathbf{Ch}(\mathbf{A})$ aussi.*

Définition 1.3.5. Soit $(E^\bullet, d^\bullet)$ un complexe. On appelle cohomologie de $(E^\bullet, d^\bullet)$ l'objet, noté $H^n(E^\bullet, d^\bullet)$, défini par :

$$H^n(E^\bullet, d^\bullet) = \ker(d^n)/\operatorname{im}(d^{n-1}) \coloneqq \operatorname{coker}(\operatorname{im}(d^{n-1}) \hookrightarrow \ker(d^n))$$

Proposition 1.3.6. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, H^n définit un foncteur $\mathbf{Ch}(\mathbf{A}) \to \mathbf{A}$.*

Définition 1.3.7. Soient $f^\bullet$ et $g^\bullet$ deux morphismes de complexes $(A^\bullet, d^\bullet) \to (B^\bullet, \delta^\bullet)$. Une homotopie entre $f^\bullet$ et $g^\bullet$ est une famille de morphismes $(h^i : A^i \to B^{i-1})$ tels que

$$\forall i \in \mathbb{Z}, f^i - g^i = \delta^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d^i.$$

Proposition 1.3.8. *S'il existe une homotopie entre deux morphismes de complexes $(A^\bullet, d^\bullet) \to (B^\bullet, \delta^\bullet)$, ces deux morphismes induisent les mêmes morphismes en cohomologie $H^n(A^\bullet) \to H^n(B^\bullet)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Définition 1.3.9. Une suite exacte de **A** est un complexe de **A** tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{im}(d^{n-1}) = \ker(d^n)$. On dit qu'une suite exacte est courte si elle s'écrit :

$$0 \longrightarrow E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} E^3 \longrightarrow 0$$

Proposition 1.3.10. *Si*

$$0 \longrightarrow E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} E^3 \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte alors

1. *d^1 est un monomorphisme ;*
2. *d^2 est un épimorphisme ;*
3. *Si $E_1 = 0$ alors d^2 est un isomorphisme et si $E_3 = 0$ alors d^1 est un isomorphisme.*

Démonstration. 1) $\ker(f) = 0$ et donc f est un monomorphisme.
2) $\mathrm{im}(f) = E^3$ et donc $\mathrm{coker}(f) = 0$ i.e. f est un épimorphisme.
3) On utilise les deux faits précédents et le fait qu'un épimorphisme-monomorphisme est un isomorphisme.

□

Proposition 1.3.11 (lemme du serpent)**.** *Si on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' & \end{tikzcd}$$

dont les suites horizontales sont exactes alors on a une suite exacte

$$\ker(a) \longrightarrow \ker(b) \longrightarrow \ker(c) \longrightarrow \mathrm{coker}(a) \longrightarrow \mathrm{coker}(b) \longrightarrow \mathrm{coker}(c)$$

Théorème 1.3.12. *Si on a une suite exacte de complexes*

$$0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$$

alors on a une suite exacte longue en cohomologie :

$$\dots \longrightarrow H^{n-1}(C^\bullet) \longrightarrow H^n(A^\bullet) \longrightarrow H^n(B^\bullet) \longrightarrow H^n(C^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(A^\bullet) \longrightarrow \dots$$

Démonstration. On applique le lemme du serpent au diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^n/\,\mathrm{im}(d_A^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "d_A^n"] & B^n/\,\mathrm{im}(d_B^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "d_B^n"] & C^n/\,\mathrm{im}(d_C^{n-1}) \arrow[r] \arrow[d, "d_C^n"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker(d_A^{n+1}) \arrow[r] & \ker(d_B^{n+1}) \arrow[r] & \ker(d_C^{n+1}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

□

Définition 1.3.13. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux catégories abéliennes. On dit que F est additif si pour tout objets A, B de $\mathbf{A}$, la fonction

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(A), F(B))$$

est un morphisme de groupes (pour les structures de groupes naturelles).

Proposition 1.3.14. *Un foncteur additif $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ induit un foncteur $\mathbf{Ch}(F)$ entre les catégories de complexes $\mathbf{Ch}(\mathbf{A}) \to \mathbf{Ch}(\mathbf{B})$. De plus, si $(h^\bullet)$ est une homotopie entre deux morphismes de complexes $\varphi^\bullet, \psi^\bullet\colon A^\bullet \to B^\bullet$ alors $(F(h^i))$ définit une homotopie entre $F(\varphi^\bullet)$ et $F(\psi^\bullet)$.*

Démonstration. On définit $\mathbf{Ch}(F)$ par :

$$\begin{cases} \mathbf{Ch}(F)(A^\bullet, d^\bullet) \coloneqq (F(A^n), F(d^n))_{n\in\mathbb{Z}} \\ \mathbf{Ch}(F)(\varphi^\bullet) \coloneqq (F(\varphi^n) : F(A^n) \to F(B^n))_{n\in\mathbb{Z}} \end{cases}.$$

Le point à vérifier est le fait que $(F(A^n), F(d^n))_{n\in\mathbb{Z}}$ soit un complexe : pour $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$F(d^{n+1}) \circ F(d^n) = F(d^{n+1} \circ d^n) = F(0) = 0$$

(car F est additif).
Pour les homotopies, on a, pour tout i,

$$\begin{aligned} F(f^i) - F(g^i) &= F(f^i - g^i) && \text{car } F \text{ est additif} \\ &= F(\delta^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d^i) \\ &= F(\delta^{i-1} \circ h^i) + F(h^{i+1} \circ d^i) && \text{car } F \text{ est additif} \\ &= F(\delta^{i-1}) \circ F(h^i) + F(h^{i+1}) \circ F(d^i) && \text{car } F \text{ est additif} \end{aligned}$$

□

Définition 1.3.15. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux catégories abéliennes et $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un foncteur additif. On dit que F est

— exacte à gauche si pour toute suite exacte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, la suite

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

est exacte

— exacte à droite si pour toute suite exacte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, la suite

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$$

est exacte

— exacte s'il est exacte à gauche et exacte à droite.

Exemple 1.3.16. — Si $\mathbf{A}$ est une catégorie abélienne et A est un objet de $\mathbf{A}$ alors le foncteur $\mathbf{A} \to \mathbf{Ab}$ définie par $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, X)$ est exact à gauche.

— Si $\mathbf{A}$ est une catégorie abélienne et A est un objet de $\mathbf{A}$ alors le foncteur $\mathbf{A}^{op} \to \mathbf{Ab}$ définie par $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(X, A)$ est exact à gauche.
— Si k est un corps alors le foncteur $k - \mathbf{Vect} \to k - \mathbf{Vect}$ défini par $V \mapsto V^* := \mathrm{Hom}_k(V, k)$ est exact.
— Si R est un anneau et T est un R-module à droite alors le foncteur $R - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ défini par $X \mapsto X \otimes_R T$ est exact à droite (exact si T est plat)
— Si X est un espace topologique alors le foncteur $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$ des sections globales $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$ est exact à gauche.

Lemme 1.3.17. *Si F est exact à gauche alors pour toute suite exacte* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *, la suite*

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

soit exacte

Démonstration. Soit $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ une suite exacte. Alors elle induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \mathrm{coker}(f) \longrightarrow 0$$

et on a un monomorphisme induit $\mathrm{coker}(f) \hookrightarrow C$. Comme F est exact à gauche alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(\mathrm{coker}(f))$$

De plus, $F(\mathrm{coker}(f)) \to F(C)$ est aussi un monomorphisme donc le noyau de la composée $F(B) \to F(\mathrm{coker}(f)) \to F(C)$ est le noyau de $F(B) \to F(\mathrm{coker}(f))$, c'est-à-dire l'image de $F(A) \to F(B)$. On en déduit donc que la suite

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

est exacte. □

Proposition 1.3.18. *Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux catégorie abéliennes. Soient $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ deux foncteurs additifs. Si F est l'adjoint à gauche de G (et donc G est adjoint à droite de F) i.e. pour tout objet A de $\mathbf{A}$ et tout objet B de $\mathbf{B}$, on a un isomorphisme naturel en A et B*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(F(A), B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, G(B)).$$

alors F est exact à droite et G est exacte à gauche.

Exemple 1.3.19. — Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, -)$ est un adjoint à droite : pour tous groupes abéliens A, C,on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}(A \times B, C) \simeq \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$$

— Si R est commutatif, le foncteur $-\otimes_R B$ est un adjoint à gauche de $\mathrm{Hom}_R(B,-)$: pour tous R-modules A, C,on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_R(A\otimes_R B, C) \simeq \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_R(B,C))$$

— L'inclusion $i\colon \mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab}) \to \mathbf{PSh}(X,\mathbf{Ab})$ a un adjoint à gauche : la faisceautisation $(-)^+$.

Exemple 1.3.20. Soit $p : X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts[5]. Alors cela induit deux foncteurs $p_*, p_!\colon \mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab}) \to \mathbf{Sh}(Y,\mathbf{Ab})$ et un foncteur $p^{-1}\colon \mathbf{Sh}(Y,\mathbf{Ab}) \to \mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab})$: si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur Y et $\mathcal{G}$ est un faisceau sur X :
— $p^{-1}(\mathcal{F}) \coloneqq (U \mapsto \mathrm{colim}_{V\supset p(U)} \mathcal{F}(V))^+$;
— $p_*(\mathcal{G}) \coloneqq (V \mapsto \mathcal{G}(p^{-1}(V))$;
— $p_!(\mathcal{G}) \coloneqq (V \mapsto \{s \in \mathcal{G}(p^{-1}(V)) \mid p_{|\mathrm{supp(s)}} : \mathrm{supp(s)} \to V \text{ est propre}\})$ (si p est propre alors $p_! = p_*$).

Alors p^{-1} est l'adjoint à gauche de p_* : p^{-1} est exact à droite (et même exact) et p_* est exact à gauche. De plus, $p_!$ est exact à gauche.

Si $p : X \to *$ alors $p_*\colon \mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab}) \to \mathbf{Sh}(*,\mathbf{Ab}) = \mathbf{Ab}$ est le foncteur des sections globales et p^{-1} décrit les faisceaux constants.

Soit $x \in X$ et considérons l'inclusion $i\colon * \to X$. Alors $i_*\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab})$ est le foncteur gratte-ciel i.e. pour tout groupe abélien A

$$i_*A : U \mapsto \begin{cases} A \text{ si } x \in U \\ \{0\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

et $i^{-1}\colon \mathbf{Sh}(X,\mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$ est le foncteur fibre i.e. pour tout faisceau $\mathcal{F}$,

$$i^{-1}\mathcal{F} \coloneqq \mathrm{colim}_{U\ni x} \mathcal{F}(U).$$

2 Foncteurs dérivés

But : Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sont deux catégories abéliennes, $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un foncteur exact à gauche et $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte. On veut pouvoir continuer la suite exacte

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$$

en une suite exacte longue et ainsi comprendre le défaut d'exactitude du foncteur F.

2.1 Objets injectifs

Définition 2.1.1. Un objet I d'une catégorie $\mathbf{C}$ est dit injectif si pour tout monomorphisme $f\colon X \to Y$ et tout morphisme $g\colon X \to I$, il existe un morphisme

5. cette hypothèse est utile uniquement pour $p_!$.

$Y \to I$ tel que $h \circ f = g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[dl, dashed, "h"] \\ I & \end{tikzcd}$$

Remarque 2.1.2. Un tel h n'est pas nécessairement unique.

Proposition 2.1.3. *Un object I de $\mathbf{C}$ est injectif si, et seulement si,* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-$ $-, I)$ *envoie les monomorphismes sur les fonctions surjectives.*

Démonstration. Si $f : A \to B$ est un monomorphisme alors on a le prolongement, pour tout g

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "f"] \\ I & \end{tikzcd}$$

si, et seulement si, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\varphi, I)\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, I) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, I)$ est surjective. □

Proposition 2.1.4. *Un object I d'une catégorie abélienne* $\mathbf{A}$ *est injectif si, et seulement si,* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, I)$ *est exact.*

Démonstration. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, I)$ est exact à gauche, il suffit de montrer que I est injectif si, et seulement si, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(-, I)$ envoie les monomorphismes en épimorphismes de groupes. Ce qui a été montré dans la proposition précédente. □

Proposition 2.1.5. *Un objet I d'une catégorie abélienne* $\mathbf{A}$ *est injectif si, et seulement si, toute suite exacte* $0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ *est scindée i.e. il existe $s : A \to I$ tel que $s \circ i = id_I$.*

Démonstration.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "id_I"'] & A \arrow[dl, dashed, "s"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

□

Proposition 2.1.6. *Le produit d'injectifs est injectifs.*

Démonstration. Soit $(I_k)_{k \in K}$ une famille d'injectifs. Comme

$$\mathrm{Hom}(-, \prod_k I_k) = \prod_k \mathrm{Hom}(-, I_k)$$

et que le produit de fonctions surjectives est surjectif alors $\prod I_k$ est injectif. □

Exemple 2.1.7. — Dans $R-\mathbf{Mod}$, les objets injectifs sont exactement les R-modules injectifs [6].
- — Dans $k-\mathbf{Vect}$, tous les objets sont injectifs (en acceptant l'axiome du choix [7])
- — Dans **Ab**, les objets injectifs sont exactement les groupes divisibles (en acceptant l'axiome du choix) i.e. les groupes $(G,+)$ tels que $nG = G$ pour tout $n \geq 1$ e.g. $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
- — Dans **Top**, les objets injectifs sont exactement les ensembles non-vide munis de la topologie grossière [8].

Définition 2.1.8. Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. On dit que $\mathbf{C}$ a assez d'injectifs si pour tout objet X de $\mathbf{C}$, il existe un injectif I et un monomorphisme $X \hookrightarrow I$.

Proposition 2.1.9. *La catégorie des groupes abéliens* **Ab** *a assez d'injectifs.*

Démonstration. Soit A un groupe abélien. Notons I l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et D le groupe divisible $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^I$. Soit $i\colon A \to D$ le morphisme défini par :

$$i(a) := (f(a))_{f \in I}.$$

Ce morphisme est injectif si, et seulement si,

$$\forall a \in A \setminus \{0\}, \exists f\colon A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, f(a) \neq 0.$$

Soit $a \in A \setminus \{0\}$. Si a est d'ordre n alors on définit un morphisme $\mathbb{Z}a \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par $a \mapsto \frac{1}{n}$ et si a est d'ordre infini alors on fixe un élément non-nul x de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et on définit un morphisme $\mathbb{Z}a \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ par $a \mapsto x$. Dans les deux cas, on obtient un morphisme $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ non-nul par injectivité de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}a \arrow[r, hook] \arrow[d] & A \arrow[dl, dashed] \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

On a donc un injection de A dans un groupe divisible. $\square$

Exemple 2.1.10. — $R-\mathbf{Mod}$ a assez d'injectifs.

6. Critère de Baer : Le A-module à gauche M est injectif si, et seulement si tout morphisme $f : \mathfrak{a} \to M$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal à gauche, s'étend à A
7. ce qui sera fait dans la suite
8. Un espace topologique grossier non-vide est injectif : si $i\colon A \hookrightarrow B$ et si Z est un tel espace (on choisit $z \in Z$) alors on peut étendre une fonction continue $A \to Z$ en une fonction $B \to Z$ en associant à tout élément dans $B \setminus i(A)$ la valeur z. Cette fonction est continue car Z est grossier. Réciproquement, si I est un espace topologique injectif alors il est non-vide car on veut étendre l'inclusion $\emptyset \subset *$. Soit Z un espace topologique grossier admettant une injection $I \hookrightarrow Z$ (cela existe) alors par injectivité de I, il existe $r : Z \to I$ alors $r \circ f = id$. Fixons-en une. La fonction r est surjective et vérifie, pour tout ouvert non-vide U de I, $r^{-1}(U) = Z$ car c'est un ouvert non-vide d'un espace grossier. On en déduit alors que

$$U = f^{-1}(r^{-1}(U)) = f^{-1}(Z) = I$$

et donc I est grossier.

— $\mathbf{PSh}(X, \mathbf{Ab})$ et $\mathbf{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ ont assez d'injectifs : si $\mathcal{F}$ est un faisceau alors pour toute $x \in X$, chaque fibre $\mathcal{F}_x \coloneqq x^{-1}\mathcal{F}$ est incluse dans un groupe abélien injectif I_x. Le faisceau $\mathcal{I} \coloneqq \prod_{x \in X} x_* I_x \colon U \mapsto \prod_{x \in U} I_x$ est injectif[9] et la flèche naturelle $\mathcal{F} \to \mathcal{I}$ est un monomorphisme.
— **Top** a assez d'injectifs.

Exemple 2.1.11. La catégorie des groupes abéliens finiment engendrés n'a pas assez d'injectifs.

Définition 2.1.12. Soit $\mathbf{A}$ une catégorie abélienne et A un objet de $\mathbf{A}$. Une résolution injective de A est un complexe $(I^n, d^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un morphisme $A \to I^0$ tel que
— I^n est injectif pour tout $n \in \mathbb{N}$;
— $A \to I^0$ est un isomorphisme sur $\ker(d^0)$;
— $I^\bullet$ est exact.
On écrira $A \to I^\bullet$ une telle résolution.

Exemple 2.1.13. — Si I est injectif alors $I \to I$ est une résolution injective.
— Comme le quotient d'un groupe divisible est divisible alors tout groupe abélien a une résolution injective à deux éléments :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I \longrightarrow I/A \longrightarrow 0$$

Théorème 2.1.14. *Si $\mathbf{A}$ a assez d'injectifs alors tout objet admet une résolution injective.*

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] & I^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr, two heads] & & I^1 \arrow[rr, "d^1"] \arrow[dr, two heads] & & I^2 \arrow[dr] & \\
& & \operatorname{coker}(i) \arrow[ur, hook] & & \operatorname{coker}(d^0) \arrow[ur, hook] & & \dots
\end{tikzcd}$$

□

2.2 Foncteurs dérivés

Soit $\mathbf{A}$ une catégorie abélienne avec assez d'injectifs, $A \to I^\bullet$ une résolution injective et $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un foncteur exact à gauche. On a ainsi un complexe

$$F(I^0) \longrightarrow F(I^1) \longrightarrow F(I^2) \longrightarrow \dots$$

9. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau alors

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \prod_{x \in X} x_* \mathcal{I}_x) = \prod_{x \in X} \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, x_* \mathcal{I}_x) = \prod_{x \in X} \operatorname{Hom}(x^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{I}_x) = \prod_{x \in X} \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{I}_x)$$

Si $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F}'' \to 0$ est une suite exacte alors $0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}'_x \to \mathcal{F}''_x \to 0$ est exacte (car x^{-1} est exact) et donc comme I_x est injectif alors $0 \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}_x, I_x) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}'_x, I_x) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}''_x, I_x) \to 0$ est exacte et donc, par produit, $0 \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{I}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{I}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}'', \mathcal{I}) \to 0$ est finalement exacte.

que l'on notera $F(I^\bullet)$

Remarque 2.2.1. Comme F est exact à gauche alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(I^0) \longrightarrow F(I^1)$$

et donc

$$H^0(F(I^\bullet)) \coloneqq \ker(F(I^0) \to F(I^1)) = F(A).$$

Définition 2.2.2. Soit $i \in \mathbb{N}$. Le $i$ème foncteur dérivé de $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ appliqué en A et pour la résolution injective $A \to I^\bullet$, l'objet, noté $\mathbb{R}^i F(A \to I^\bullet)$, défini par

$$\mathbb{R}^i F(A \to I^\bullet) \coloneqq H^i(F(I^\bullet))$$

Théorème 2.2.3 (Voisin, 4.27). *Soient A, B deux objets de $\mathbf{A}$, $A \xrightarrow{i} I^\bullet$ et $B \xrightarrow{j} J^\bullet$ des résolutions avec $J^\bullet$ injective, et soit $\phi : A \to B$ un morphisme de $\mathbf{A}$. Alors il existe un morphisme de complexes $\phi^\bullet : I^\bullet \to J^\bullet$ satisfaisant $\phi^0 \circ i = j \circ \phi$. De plus, si on a deux tels morphismes $\phi^\bullet$ et $\psi^\bullet$, il existe une homotopie $H^\bullet$ entre $\phi^\bullet$ et $\psi^\bullet$.*

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dd, "\varphi"'] \arrow[ddr] & I^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "\varphi^0"] & & I^1 \arrow[rr, "d^1"] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "\varphi^1"] & & I^2 \arrow[dd, dashed, "\varphi^2"] \\
& & \operatorname{coker}(i) \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & \operatorname{coker}(d^0) \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & \\
B \arrow[r, "j"'] & J^0 \arrow[rr, "\delta^0"'] & & J^1 \arrow[rr, "\delta^1"'] & & J^2
\end{tikzcd}$$

On remarque que $\delta^0\varphi^0 i = \delta^0 j\varphi = 0$ et pour tout $k \geq 1$,

$$\delta^k \varphi^k d^{k-1} = \delta^k \delta^{k-1} \varphi^{k-1} = 0$$

Pour l'homotopie :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dd, "\varphi"'] & I^0 \arrow[rr, "d^0"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\varphi^0-\psi^0"] & & I^1 \arrow[ddll, dashed, bend left, "H^1"] \\
& & \operatorname{coker}(i) \arrow[ur, hook] \arrow[dl] & \\
B \arrow[r, "j"'] & J^0 & &
\end{tikzcd}$$

On a : $(\varphi^0 - \psi^0) \circ i = \varphi^0 \circ i - \psi^0 \circ i = j \circ \varphi - j \circ \varphi = 0$. Le reste se fait de la même façon.

$\square$

Corollaire 2.2.4. *Soit A un objet de $\mathbf{A}$. Deux résolutions injectives de A sont homotopes.*

Corollaire 2.2.5. *Si A est un objet de $\mathbf{A}$ et $I^\bullet$ et $J^\bullet$ sont deux résolutions injectives de A alors*

$$\mathbb{R}^i F(A \to I^\bullet) \simeq \mathbb{R}^i F(A \to J^\bullet)$$

Notation 2.2.6. On notera $\mathbb{R}^i F(A)$ un représentant de cette classe d'isomorphie.

Exemple 2.2.7.
— Si I est un objet injectif alors pour tout foncteur exact à gauche F, $\mathbb{R}^i F(I) = 0$ pour $i \geq 1$.
— Si A est un groupe abélien et F un foncteur $\mathbf{Ab} \to \mathbf{B}$ exact à gauche, $\mathbb{R}^i F(A) = 0$ pour $i \geq 2$.

Corollaire 2.2.8. *Un morphisme $f : A \to B$ de $\mathbf{A}$ induit un morphisme naturel $\mathbb{R}^i F(A) \to \mathbb{R}^i F(B)$ compatible avec la composition*

Démonstration. Soient $A \to I^\bullet$ et $B \to J^\bullet$ deux résolutions. Alors d'après 2.2.3, il existe un unique morphisme, à homotopie près, de complexes $I^\bullet \to J^\bullet$ et donc un unique morphisme, à homotopie près, $F(I^\bullet) \to F(J^\bullet)$ (cf. 1.3.14). On obtient ainsi un morphisme en cohomologie pour tout i

$$\mathbb{R}^i F(A) = H^i F(I^\bullet) \to \mathbb{R}^i F(J^\bullet) = H^i F(J^\bullet).$$

Si on a deux morphismes $f : A \to B$ et $g : B \to C$ alors la composition des morphismes $f^\bullet$ et $g^\bullet$ donnés par 2.2.3 est homotope au morphisme $(g \circ f)^\bullet$ et donc induisent le même morphisme en cohomologie. $\square$

Théorème 2.2.9. *Si* $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ *alors on a une suite exacte en cohomologie*

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow \mathbb{R}^1 F(A) \longrightarrow \mathbb{R}^1 F(B) \longrightarrow \mathbb{R}^1 F(C) \longrightarrow \mathbb{R}^2 F(A) \longrightarrow \dots$$

Démonstration. On considère deux résolutions injectives $A \to I^\bullet$ et de $C \to K^\bullet$. Par la propriété universelle des objets injectifs, on construit une résolution injective de B :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, "i_0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, "i_1"'] & I^2 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "{(\varphi_0, kg)}"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi_0"] \arrow[d, "g"'] & I^0 \oplus K^0 \arrow[r, "{(\varphi_1, d_K^0 \pi_0)}"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi_1"] \arrow[d, "\pi_0"] & I^1 \oplus K^1 \arrow[r, "{(\varphi_1, d_K^1 \pi_0)}"'] \arrow[ur, dashed] \arrow[d, "\pi_1"'] & I^2 \oplus K^2 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "k"'] \arrow[d] & K^0 \arrow[r, "d_K^0"'] \arrow[d] & K^1 \arrow[r, "d_K^1"] \arrow[d] & K^2 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

On montre que ce sont des suites exactes par le lemme du serpent. On obtient ainsi une suite exacte de complexes $0 \to I^\bullet \to I^\bullet \oplus K^\bullet \to K^\bullet \to I^\bullet \to 0$ entre les résolutions. Par injectivité, on obtient une suite

$$0 \longrightarrow F(I^\bullet) \longrightarrow F(I^\bullet \oplus K^\bullet) \longrightarrow F(K^\bullet) \longrightarrow 0$$

La suite exacte en cohomologie induite est exactement la suite exacte voulue. □

Exemple 2.2.10.
- $\mathbb{R}^i \operatorname{Hom}_{R-\mathbf{Mod}}(A, -) = \operatorname{Ext}^i_R(A, -) : B \mapsto \{0 \to A \to A_1 \to \ldots \to A_i \to B \to 0\}/\text{iso}$ (cf. [Wei94, Vista 3.4.6]).
- Si $R = \mathbb{Z}$ (ou plus généralement si R est un anneau principal) alors pour $i \geq 2$, $\operatorname{Ext}^i_R(A, -) = 0$.
- $H^n(X, \mathcal{F}) \coloneqq \mathbb{R}^i\Gamma(\mathcal{F})$

Remarque 2.2.11. A défaut d'utiliser des résolutions injectives, on peut utiliser des résolutions F-acycliques i.e. des résolutions dont les objets M vérifient

$$\forall i \geq 1,\ \mathbb{R}^i F(M) = 0$$

Dans le sens où si on a un résolution acyclique $A \to M^\bullet$ alors $H^i(F(M^\bullet)) = \mathbb{R}^i F(A)$.

Soient A un objet et $I \to M^\bullet$ une résolution acyclique de A. Posons $B \coloneqq \operatorname{coker}(A \to I^0)$. Alors B admet aussi une résolution acyclique donné par $M^{\bullet+1}$ (le morphisme $B \to M^1$ est donné par le passage au quotient du morphisme $M^0 \to M^1$) :

$$\operatorname{im}(B \to M^1) \simeq B = M_0/\operatorname{im}(A \to M_0) = M_0/\ker(M_0 \to M_1) = \operatorname{im}(M_0 \to M_1) = \ker(M_1 \to M_2).$$

La suite exacte $0 \to A \to M_0 \to B \to 0$ induit une suite exacte en cohomologie

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F(A) \arrow[r] & F(M_0) \arrow[r] & F(B) \arrow[r] & \mathbb{R}^1 F(A) \arrow[r] & \mathbb{R}^1 F(M_0) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{R}^1 F(B) \arrow[r] & \mathbb{R}^2 F(A) \arrow[r] & \mathbb{R}^2 F(M_0) \arrow[d, equal] \\ & & & & & 0 & & & 0 \end{tikzcd}$$

On en déduit alors que
- $\mathbb{R}^1 F(A) = \operatorname{coker}(F(M_0) \to F(B)) = H^1(F(M^\bullet))$ (car $F(B) \hookrightarrow F(M_1)$)
- $\forall i \geq 1, \mathbb{R}^i F(B) = \mathbb{R}^{i+1} F(A)$.

On montre le résultat par récurrence :

$$\mathbb{R}^{i+1} F(A) = \mathbb{R}^i F(B) = H^i(F(M^{\bullet+1})) = H^{i+1}(F(M^\bullet))$$

2.3 Exemple : Cohomologie de de Rham et cohomologie du faisceau constant

Soit X une variété différentiable.
Le but de cette section est de montrer que la cohomologie de de Rham est la cohomologie du faisceau suivant

$$\underline{\mathbb{R}}_X : U \subset X \mapsto \{U \to \mathbb{R} \text{ localement constante}\} \in \mathbb{R} - \mathbf{Vect}$$

i.e. la faisceautisation du préfaisceau constant valant $\mathbb{R}$ ou $p^*\mathbb{R}$ (avec $p : X \to *$).

Définition 2.3.1. Un faisceau $\mathcal{F}$ est dit mou si pour tout fermé $Z \subset X$, l'application $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Z) \coloneqq i^{-1}\mathcal{F}(Z)$ où $i\colon Z \hookrightarrow X$.

Proposition 2.3.2. *Si X est un espace topologique normal (e.g. un espace métrique) alors pour tout fermé F et ouvert U tels que $F \subset U$, il existe un ouvert V tel que*

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U$$

Démonstration. Comme $F \subset U$ alors $F \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Par normalité, il existe un voisinage ouvert V de F et un voisinage ouvert W de $X \setminus U$ tel que $V \cap W = \emptyset$. On en déduit donc que V est inclus dans le fermé $X \setminus W \subset U$ et donc $\overline{V}$ aussi. En conclusion, on a :

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset X \setminus W \subset U.$$

□

Proposition 2.3.3. *Soit X une variété différentiable. Soit $\mathcal{O}$ le faisceau $\mathcal{C}^0$ ou $\mathcal{C}^\infty$.Alors les $\mathcal{O}$-modules sont mous.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}$-module. Soient Z un fermé de X, f une section sur un voisinage U de Z et U_1, U_2 deux ouverts tels que

$$Z \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset U$$

Soit ρ une section globale de $\mathcal{O}$ telle que

$$\rho_{\overline{U_1}} \equiv 1 \text{ et } \rho_{X \setminus U_2} \equiv 0$$

Comme $f\rho \in \mathcal{F}(U)$ coïncide avec la section nulle de $\mathcal{F}(X \setminus \overline{U_2})$ sur l'ouvert $U \setminus \overline{U_2}$ alors il existe une section globale $v \in \mathcal{F}(X)$ tel que $v_{|U} = f\rho$ et $v_{|X \setminus \overline{U_2}} = 0$. En particulier, $v_{|Z} = f$. □

Remarque 2.3.4. C'est vrai si on remplace $\mathcal{C}^0$ ou $\mathcal{C}^\infty$ par un faisceau mou quelconque (cf. [God58, Théorème 3.7.1]).

Proposition 2.3.5 ([God58] Théorème 3.5.2)**.** *Soit X un espace paracompact. Alors pour tout suite exacte de faisceaux* $0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{i} \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$ *avec $\mathcal{F}'$ mou, la suite des sections globales* $0 \longrightarrow \mathcal{F}'(X) \xrightarrow{i} \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}''(X) \longrightarrow 0$ *est exacte.*

Proposition 2.3.6. *Un faisceau mou est acyclique.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau mou. On définit deux faisceaux

$$\mathcal{G}(\mathcal{F}) \coloneqq p_*p^{-1}\mathcal{F} : U \mapsto \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

où $p : X_{disc} \to X$ est l'application induite par l'identité. et

$$\mathcal{C}(\mathcal{F}) \coloneqq \operatorname{coker}(\mathcal{F} \to \mathcal{G}(\mathcal{F}))$$

Le faisceau $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ est clairement mou. Montrer que c'est aussi le cas de $\mathcal{C}(\mathcal{F})$. Soit $Z \subset X$ un fermé. Alors on a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X,\mathcal{G}(\mathcal{F})) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \Gamma(Z,\mathcal{G}(\mathcal{F})) \arrow[d, two heads] \\ \Gamma(X,\mathcal{C}(\mathcal{F})) \arrow[r] & \Gamma(Z,\mathcal{C}(\mathcal{F})) \end{tikzcd}$$

Les deux morphismes horizontaux sont surjectifs car $\mathcal{F}$ est mou et le morphisme du haut est surjectif car $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ est mou (on utilise la proposition précédente). En conclusion, $\Gamma(X,\mathcal{C}(\mathcal{F})) \to \Gamma(Z,\mathcal{C}(\mathcal{F}))$ est surjective. On en déduit que $\mathcal{C}(\mathcal{F})$ est mou.
Le faisceau $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ est acyclique ([God58, Théorème 4.4.3]).
On va maintenant montrer que $H^n(X,\mathcal{F}) = 0$ par récurrence sur $i \geq 1$.
Comme la suite des sections globales est exacte alors $H^1(X,\mathcal{F}) = H^1(X,\mathcal{C}(\mathcal{F})) = 0$.
On a une suite exacte en cohomologie

$$0 = H^n(X,\mathcal{G}(\mathcal{F})) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{C}(\mathcal{F})) \longrightarrow H^{n+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^{n+1}(X,\mathcal{G}(\mathcal{F})) = 0$$

Ainsi, $H^n(X,\mathcal{C}(\mathcal{F})) \simeq H^{n+1}(X,\mathcal{F})$ et grâce au calcul d'initialisation, on en déduit que tous ces groupes sont nuls. □

Proposition 2.3.7 (Lemme de Poincaré)**.** *Si $U \subset X$ est un ouvert contractile (e.g. U est une boule) alors toute n-forme fermée sur U est exacte.*

Corollaire 2.3.8. *Le complexe*

$$\underline{\mathbb{R}}_X \longrightarrow \Omega^0_X = \mathcal{C}^\infty_X \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^2_X \longrightarrow \dots$$

est une résolution acyclique de $\underline{\mathbb{R}}_X$

Démonstration. Les Ω^n sont mous comme $\mathcal{C}^\infty$-modules et sont donc acycliques. On utilise ensuite le lemme de Poincaré et le fait que toute variété est localement une boule. □

Théorème 2.3.9. *Si X est une variété différentiable alors*

$$H^\bullet(X,\underline{\mathbb{R}}_X) := \mathbb{R}^\bullet p_*(\underline{\mathbb{R}}_X) = H^\bullet_{dR}(X,\mathbb{R})$$

Démonstration. Comme $\Omega^\bullet$ est une résolution acyclique alors par définition de la cohomologie de de Rham, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, H^n(X,\underline{\mathbb{R}}_X) = H^n(\Omega^\bullet_X(X)) = H^n_{dR}(X,\mathbb{R}).$$

□

Remarque 2.3.10. La cohomologie de de Rham à support compact est aussi décrite par un foncteur dérivé :

$$\forall n \in \mathbb{N}, H^n_c(X,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n p_!(\underline{\mathbb{R}}_X).$$

Références

[Fre64] P. Freyd. *Abelian Categories : An Introduction to the Theory of Functors.* A harper international edition. Harper & Row, 1964.

[God58] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Number vol. 1 in Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, 1958.

[Sta18] The Stacks Project Authors. *Stacks Project.* `https://stacks.math.columbia.edu`, 2018.

[Voi02] C. Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* Collection SMF. : Cours spécialisés. Société Mathématique de France, 2002.

[Wei94] C.A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994.