Séminaire Pampers : Variétés LVM

Antoine BOIVIN

Résumé

Parmi les variétés différentielles, les variétés compactes ont beaucoup de propriétés agréables e.g. leurs espaces vectoriels de cohomologie sont tous de dimension finie ou une famille lisse de variétés compactes est localement triviale. Malheureusement, dans le cas complexe, il est plus difficile d'en construire que dans le cas réel : elles ne peuvent pas être plongées dans $\mathbb{C}^n$ à cause du principe du maximum et celles que l'on construit comme sous-variétés fermées de l'espace projectif sont algébriques, ce qui réduit le panel disponible. Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky ont donné une méthode,puis Laurent Meersseman en a donné une généralisation, afin de construire des variétés complexes compactes non-symplectiques (et donc non plongées dans l'espace projectif), appelées en leur honneur "variétés LVM", comme l'espace des feuilles d'un feuilletage donné par une configuration de points dans $\mathbb{C}^m$. Dans cet exposé, on s'intéressera à la construction de ces variétés LVM et à leurs propriétés. Si le temps le permet, on abordera des développements plus récents autour de ses variétés.

Introduction

Cet exposé portera sur la construction de variétés complexes compactes. Celles-ci ont beaucoup été étudiées et ont des propriétés intéressantes :

— Classifiées en dimension 1 (courbes algébriques projectives) et en dimension 2 (Enriques-Kodaira) ;

— Elles ont des groupes de cohomologie de dimension finie (pour les faisceaux cohérents) et ceux-ci ont des bonnes propriétés de dualité (dualité de Serre). Voir par exemple $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ pour le cas non-compact)

— Elles ont de bonnes propriétés de déformation : une famille lisse [1] de variétés complexes compactes est localement triviale (Ehresmann).

Question 0.1. Quelles sont les variétés différentielles compactes ?

Exemple 0.2 (variétés réelles)**.** Les sphères S^n, les espaces projectifs $\mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$, $O(n)$, ..., leurs sous-variétés fermées, les produits finis et les sommes connexes de ses dernières.

Le cas complexe impose de nouvelles limitations [2] :

Théorème 0.3 (Borel,Serre [BS53],Steenrod [Ste99])**.** *Les seules sphères admettant des structures presques complexes sont S^2 et S^6*

La sphère S^2 admet une structure complexe qui est celle induite par le difféomorphisme $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$. L'existence d'une structure complexe sur S^6 est encore ouverte.

Théorème 0.4. *Une variété complexe compacte ne peut être plongée holomorphiquement dans un $\mathbb{C}^n$*

Démonstration. Par le principe du maximum □

Cela contraste avec le théorème de Whitney qui énonce que l'on peut plonger n'importe quelle variété différentielle M dans $\mathbb{R}^{2\dim(M)}$.

Ainsi, parmi nos exemples de variétés réelles compactes, il ne reste plus que les sous-variétés de $\mathbb{CP}^n$ ($\mathbb{C}P^n$ avec sa structure complexe) et leurs produits. Cependant, de telles variétés vérifient des conditions topologiques fortes :

Proposition 0.5. *Une sous-variété de $\mathbb{CP}^n$ est de Kähler* [3].

Démonstration. Il suffit de le montrer pour $\mathbb{CP}^n$ (et de tirer en arrière la métrique sur les sous-variétés). Sur $U_i = \{z_i \neq 0\}$, on définit la (1,1)-forme

$$\omega_i = \partial\overline{\partial} \ln \left(1 + \sum_{j \neq i} \|z_j\|^2\right)$$

1. une submersion $\mathscr{C}^2$ suffit
2. On rappelle qu'une variété complexe est la donnée d'un atlas de biholomorphismes ou de façon équivalente d'un endomorphisme $J : TM \to TM$ sur le tangent d'un variété différentielle M tel que $J^2 = -id$ et qui vérifie des conditions d'intégrabilité (cf. [NN57])
3. il existe une métrique hermitienne h tel que $\omega = -\Im(h)$ soit fermée.

où $\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ et $\overline{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ [4] Le recollement des ω_i, $i = 0..n$ définit une métrique de Kähler (dite de Fubini-Study) $\square$

Ainsi, leur nombre de Betti pairs ($\leq 2\dim_{\mathbb{C}}(X)$) sont non nuls (un générateur est donné par la puissance extérieure adéquate de la métrique ω)

Théorème 0.6 (Chow)**.** *Une sous-variété de $\mathbb{CP}^n$ est (l'analytification*[5] *d')une variété algébrique lisse.*

Mais ce ne sont pas les seules variétés complexes compactes.

Exemple 0.7 (Variétés de Hopf)**.** Soit $n \geq 2$ et $r \in \mathbb{C}, |r| < 1$. On définit une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ par

$$m \cdot z = r^m z$$

Cette action est sans point fixe et totalement discontinue. Ainsi, l'espace quotient $X = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}/\mathbb{Z}$ est une variété complexe compacte appelé variété de Hopf.
Cette variété est difféomorphe à $S^1 \times S^{2n-1}$. De ce fait, par la formule de Künneth,

$$H^k(X, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } k = 0, 1, 2n-1, 2n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et ainsi, X n'est pas de Kähler.

Le but de cet exposé est de donner des constructions de variétés complexes compactes qui ne soient pas Kähler.

1 Feuilletages holomorphes

Définition 1.1. Soit M une variété complexe de dimension n et $p \in \mathbb{N}$. Un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ de dimension complexe p (ou de codimension $n - p$) est la donnée d'un atlas holomorphe (dit feuilleté) (U_i, φ_i) de M tel que les applications de transitions (pour i et j tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$)

4. si f est holomorphe alors $\partial\overline{f} = 0$ et $\overline{\partial} f = 0$

5. Si X est une variété algébrique alors son analytifié X^{an} est l'ensemble de ses $\mathbb{C}$-points muni de la topologie euclidienne sur ses ouverts de cartes.

$\Phi_{ij} = \varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p} \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p}$ soit de la forme :

$$\Phi_{ij}(x, y) = (\Phi_{ij}^1(x), \Phi_{ij}^2(x, y)) \tag{1}$$

où Φ_{ij}^1 est un biholomorphisme local entre ouverts de $\mathbb{C}^{n-p}$ et Φ_{ij}^2 est une submersion holomorphe d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ sur un ouvert de $\mathbb{C}^p$.

Définition 1.2. Un ensemble de la forme $\varphi_i^{-1}(\{x\} \times \mathbb{C}^p)$ où $x \in \mathbb{C}^{n-p}$ est appelé plaque de la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$.

Ces plaques se recollent, grâce aux changements de cartes (1), en des variétés complexes de dimension p immergées dans M, appelées feuilles de $\mathcal{F}$. Plus précisément, on définit une relation d'équivalence sur M de la façon suivante :
x, y sont sur la même feuille si, et seulement si, il existe des cartes $U_0, \ldots, U_k$ et des points $x = x_0 \in U_1, \ldots, x_k = y \in U_k$ tels que x_{i-1} et x_i sont sur la même plaque dans U_i pour $1 \leq i \leq k$

1.1 Exemples de feuilletages

Exemple 1.3.
- Une submersion $M^n \to B^p$ induit une feuillatage holomorphe de dimension complexe $n-p$ par le théorème de submersion
- Un champ de vecteur holomorphe X complet non singulier de M^n induit un feuilletage de dimension 1 dont les lignes de flot sont les feuilles (cela vient du fait que X est non-singulier et donc [6] qu'il existe des coordonnées $x_1, \ldots, x_n : U \subset M \to \mathbb{R}$ sur M telle que $X_U = \partial_{x_1}$)

Dessin

2 Variétés LVM

2.1 Introduction

- "A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds" ([dMV97]) par Santiago López de Medrano et Alberto Verjovsky
- Le point de départ est l'étude des systèmes d'équations différentielles (holomorphes) suivants :

$$\dot{z_i} = \lambda_i z_i \quad 1 \leq i \leq n \tag{2}$$

6. Straightening theorem for vector fields

où $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $1 \leq i \leq n$
Autrement dit, en notant X le champ de vecteurs $\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, cela revient à

$$\dot{z} = X(z) \tag{3}$$

avec $z = (z_1, \ldots, z_n)$

— X est un champ de vecteurs complet, singulier uniquement en 0. Ainsi, cela définit un feuilletage de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ de dimension 1 i.e. il existe une famille de courbes $\{V_i\}$ décrites par le flot du champ de vecteurs X tel que

$$\mathbb{C}^n \setminus \{0\} = \bigcup V_i.$$

— "A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension" ([Mee00]) par Laurent Meersseman

— On se donne m champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2m+1$

$$X_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^j z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad 1 \leq j \leq m$$

— Ces champs de vecteurs commutent et définissent un feuilletage sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ de dimension m

2.2 Feuilletage associé

Étudions maintenant ce feuilletage :

Définition 2.1. Une feuille L de ce feuilletage est appelé "feuille de Poincaré" si 0 est dans l'adhérence de Zariski [7] de L et "feuille de Siegel" sinon.

Définition 2.2. Notons $\Lambda_i = (\lambda_1^i, \ldots, \lambda_i^m) \in \mathbb{C}^m$.
On dit que $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ est dans le domaine de Siegel si $0 \in \mathrm{Conv}(\Lambda)$ [8] et dans le domaine de Poincaré sinon.

Proposition 2.3. *Si Λ est dans le domaine de Poincaré alors toutes les feuilles du feuilletage associée sont de Poincaré. Sinon, on peut avoir des feuilles de Siegel et de Poincaré.*

Démonstration. §3 (juste avant (12)) de [CKP78] □

7. Le flot se rapproche de plus en plus de 0
8. condition géométrique

2.3 Variétés LVM

On va supposer que $0 \in \text{Conv}(\Lambda)$ et que pour tout $I \subset \{1,\ldots,n\}$, si $0 \in Conv(\Lambda_i, i \in I)$ alors $Card(I) > 2m$ (condition d'hyperbolicité faible).

DESSIN

Λ est dans le domaine de Siegel. Il existe donc des feuilles de Siegel. Notons $\mathscr{S}$ leur union.

Proposition 2.4.

$$\mathscr{S} = \{z \in \mathbb{C}^m \mid 0 \in \text{Conv}(\Lambda_j, j \in I_z)\}$$

où $I_z = \{j \in \{1,\ldots,n\} \mid z_j \neq 0\}$

Démonstration. §4 of [CKP78] □

Corollaire 2.5. *$\mathscr{S}$ est un ouvert (torique) de Zariski de $\mathbb{C}^n$*

Démonstration. $\mathscr{S}$ est le complémentaire de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$. de plus, comme $0 \in \text{Conv}(\Lambda)$, le tore $(\mathbb{C}^*)^n$ est contenu dans $\mathscr{S}$ □

Le flot des champs de vecteur X_j définit une action du groupe $\mathbb{C}^m$ sur $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ donnée par :

$$t \cdot (z_1,\ldots,z_n) = (\exp(\langle \Lambda_1, t\rangle) z_1, \ldots, \exp(\langle \Lambda_n, t\rangle) z_n)$$

Cette action laisse la variété $\mathscr{S}$ invariante, commute avec l'action de $\mathbb{C}^*$ par homothétie (qui laisse aussi $\mathscr{S}$ invariant). On peut donc former le quotient $N = \mathscr{S}/\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^* = \mathbb{P}(\mathscr{S})/\mathbb{C}^m$.

Lemme 2.6. *Dans chaque feuille de Siegel, il existe un unique point minimisant la distance de la feuille à 0. L'ensemble des points minimisant cette distance a pour équation*

$$\sum_{i=1}^{n} \Lambda_i |z_i|^2 = 0 \tag{4}$$

C'est une intersection de quadriques réelles de $\mathbb{C}^n$.

Démonstration. Lemme 2 et §3 de [CKP78] □

Ainsi,

$$M = \mathscr{S}/\mathbb{C}^m \simeq \left\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \mid \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i |z_i|^2 = 0\right\}$$

et

$$N = M/\mathbb{C}^* = \left\{[z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{P}^{n-1} \mid \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i |z_i|^2 = 0\right\}$$

Cette dernière variété est compacte.

Définition 2.7. Soient M^n une variété muni d'une feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q et $f \colon N \to M$ une application lisse. Alors f est dit transverse à $\mathcal{F}$ si pour tout $x \in N$, il existe une carte $(U, \varphi = (\varphi^i))$ (adaptée au feuilletage) de M autour de x telle que l'application $\Phi = (\varphi^{n-q+1} \circ f, \ldots, \varphi^n \circ f)$ est une submersion dans un voisinage de x.
En particulier, si f est une inclusion $X \hookrightarrow M$ transverse à $\mathcal{F}$ alors on dira que X est transverse au feuilletage $\mathcal{F}$

Théorème 2.8 (Haefliger)**.** *Soit M une variété complexe de dimension $n \geq 2$ et $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe de codimension m avec $1 \leq m \leq n$. Soit $N \subset M$ une variété lisse de dimension $2m$ transverse à $\mathcal{F}$. Alors N est naturellement une variété complexe.*

Dessin

Lemme 2.9. *M est une variété lisse de dimension $2(n-m)$*

Démonstration. Vient de la condition de Siegel et l'hyperbolicité faible (le système d'équation (4) est non-dégénérée). □

Théorème 2.10. *M est une variété complexe de dimension $n - m$.*

Démonstration. On utilise les deux résultats précédents □

Lemme 2.11. *$M \subset \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to N \subset \mathbb{P}^n$ est un $\mathbb{C}^*$-fibré principal.*

Théorème 2.12. *N est une variété complexe compacte de dimension $n - m - 1$.*

2.4 Variété moment-angle

Soit M_1 l'espace total du fibré en cercle associés au fibré $M \to N$. M_1 est une variété (réelle) compacte de dimension $2(n-m)-1$ appelé variété moment-angle associé à Λ.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, hook] \arrow[dr, "S^1"'] & M \arrow[d, "\mathbb{C}^*"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Proposition 2.13.

$$M_1(\Lambda) \simeq \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i |z_i|^2 = 0, \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = 1 \right\}$$

Pour $m = 1$, on peut décrire la variété M_1 comme une somme connexe de sphères :

Lemme 2.14. *Pour tout configuration Λ de points de $\mathbb{C}$, il existe une homotopie lisse $(A_t)_{t\in[0,1]}$ (qui conserve la condition de Siegel et l'hyperbolicité faible et tel que $dA_t/dt \neq 0$) entre Λ et un polygône régulier avec un nombre impair de sommets.*

Chaque sommet est donc affecté d'un poids correspondant au nombre de points que l'on a "regroupé" sur ce sommet. Les poids et le nombre de sommet ne dépend pas de l'homotopie choisie. DESSIN

Théorème 2.15 ([Med89]). *Soit Λ une configuration de points dans $\mathbb{C}$. Soit $k = 2l + 1$ le nombre de sommets du polygône associé et $n_1, \ldots, n_k$ les poids de chaque sommets. Alors,*

- *Si $l = 0$ alors $M_1 = \emptyset$*
- *Si $l = 1$ alors $M_1 = S^{2n_1-1} \times S^{2n_2-1} \times S^{2n_3-1}$*
- *Si $l \geq 2$ alors $M_1 \simeq \#_{i\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} S^{2d_i-1} \times S^{2n-2d_i-2}$ où $d_i = n_i + \ldots + n_{i+l-1}$*

Exemples

2.5 Exemples de variétés LVM

Exemple 2.16. — Si $n = 2m + 1$ alors $\mathscr{S} = (\mathbb{C}^*)^n$ et $N = \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$ est un tore complexe.

— Pour $m = 1$, on a un résultat plus précis :
Soit λ_1, λ_2 et λ_3 tel que $0 \in Conv(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Alors N est la courbe elliptique de module $\frac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$

— Prenons $m = 1$ et $n \geq 4$. Posons

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = -1 - i$$

Alors, $\mathscr{S} = (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}^{n-2} \setminus \{0\}$, $M_1 \simeq S^{2n-5} \times S^1 \times S^1$ (voir théorème précédent) et $N \simeq (S^1 \times S^{2n-5})_{\mathbb{C}}$. On obtient ainsi les variétés de Hopf linéaires.

— Prenons $m = 1$ et $n = 5$. Posons

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = i, \lambda_4 = \lambda_5 = -1 - i$$

Alors, $\mathscr{S} = \mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^2$, $M_1 = S^3 \times S^3 \times S^1$ and $N = (S^3 \times S^3)_{\mathbb{C}}$

2.6 Propriétés des variétés LVM

Théorème 2.17. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

— $n = 2m + 1$
— $\mathrm{Conv}(\Lambda)$ *est un simplexe.*
— *La variété $\mathscr{S}$ est de Stein*
— *La variété N est symplectique*
— *La variété N est de Kähler*
— *La variété N est un tore complexe $((S^1)^{2m})_{\mathbb{C}}$*
— *La variété M_1 est un tore réel $(S^1)^n$*

Corollaire 2.18. *Si $n \neq 2m + 1$, la variété N n'est pas symplectique donc n'est pas algébrique*

A défaut d'être algébrique, on peut se demander si la variété N est de Moïshezon.

Définition 2.19. Une variété (espace) de Moïshezon M est une variété compacte complexe (espace analytique complexe compact réduit) dont le degré de transcendance $a(M)$ du corps des fonctions méromorphes est égal à sa dimension complexe. Un espace analytique compact (non nécessairement réduit) est dit de Moïshezon si sa réduction l'est.

Remarque 2.20. $a(M) \leq \dim_{\mathbb{C}} M$

Théorème 2.21 (Moïshezon, [Moi66]). *Une variété de Moïshezon est algébrique projective si, et seulement si, elle est de Kähler.*

Corollaire 2.22. *Une surface de Moïshezon est algébrique projective.*

Théorème 2.23 (Artin, [Art70]). *La catégorie des espaces de Moïshezon est équivalente à celle des espaces algébriques propres sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$

Proposition 2.24. *Si Λ n'a aucun point indispensable (i.e. si $\mathscr{S}$ n'a aucun facteur $\mathbb{C}^*$) alors la dimension algébrique $a(N_\Lambda)$ de N_Λ est la dimension(sur $\mathbb{Q}$) du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel S_Λ des solutions du système*

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \Lambda_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} s_i = 0$$

Théorème 2.25. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *La variété N est de Moïshezon*
- *La variété N est projective*
- *La variété N est un tore projectif complexe (i.e. une variété abélienne)*

2.6.1 Feuilletage transversalement Kählerien

Définition 2.26. Un feuilletage est dit régulier si toutes ses feuilles sont de même dimension.

Définition 2.27. Soit N une variété complexe muni d'un feuilletage holomorphe régulier $\mathcal{G}$. Soit ω une 2-forme fermée réelle sur N. Alors $\mathcal{G}$ est dit transversalement kählerien si :
- $\omega(J-, J-) = \omega$ (où J est la structure presque complexe de N)
- $\ker(\omega_z) := \{\xi \in T_z N \mid i_\xi(\omega)(z) = 0\} = T_z\mathcal{G}$
- $h : (u_1, u_2) \mapsto \omega(Ju_1, u_2) + i\omega(u_1, u_2)$ est définie positive sur le fibré normal $N\mathcal{G}$.

Soit $\Lambda = (\Lambda_1 = (\lambda_1^j), \ldots, \Lambda_n = (\lambda_n^j)) \subset \mathbb{C}^m$ une configuration admissible. Soient $\eta_1, \ldots, \eta_m$ les champs de vecteurs sur $\mathscr{S}$ définis par :

$$\eta_i(z) = \left\langle Re(\Lambda_i), \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} Re(\lambda_i^j) z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$$

Soit ω la forme réelle sur N obtenue par le pullback de la métrique de Fubini-Study par l'inclusion $N \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$.

Théorème 2.28. *La projection des η_i sur N est un feuilletage régulier holomorphe $\mathcal{G}$ qui est transversalement kählerien par rapport à ω.*

2.7 Variétés LVM et variétés toriques

Lemme 2.29. *Soit $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_n) \subset \mathbb{C}^m$ une configuration admissible. Alors*

$$\dim_{\mathbb{Q}} S_\Lambda \leq n - 2m - 1$$

Définition 2.30. On dit que la configuration Λ vérifie la condition (K) si $\dim_{\mathbb{Q}} S_\Lambda$ est maximal i.e. $\dim_{\mathbb{Q}} S_\Lambda = n - 2m - 1$

Théorème 2.31. *Supposons que la configuration Λ vérifie la condition (K). Alors $N_\Lambda/\mathcal{G}$ est une variété torique orbifolde projective* [9] *et l'application quotient $N_\Lambda \to N_\Lambda/\mathcal{G}$ est une fibration en tores complexes de dimension m.*

Exemple 2.32.
- Posons $m = 1$, $n \geq 4$ et $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = -1 - i$. Alors, $N \simeq (S^1 \times S^{2n-5})_{\mathbb{C}}$ et $N/\mathcal{G} = \mathbb{P}^{n-3}$.
- Posons $m = 1$, $n = 5$ et $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = i, \lambda_4 = \lambda_5 = -1 - i$. Alors, $N = (S^3 \times S^3)_{\mathbb{C}}$ et $N/\mathcal{G} = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

Références

[Art70] Michael Artin. Algebraization of formal moduli : Ii. existence of modifications. *Annals of Mathematics*, pages 88–135, 1970.

[BS53] A. Borel and J.-P. Serre. Groupes de lie et puissances reduites de steenrod. *American Journal of Mathematics*, 75(3) :409–448, 1953.

[CKP78] Cesar Camacho, Nicolaas Hendrik Kuiper, and Jacob Palis. The topology of holomorphic flows with singularity. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 48 :5–38, 1978.

[dMV97] Santiago López de Medrano and Alberto Verjovsky. A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 28(2) :253–269, 1997.

9. et donc décrite par un polytope rationnel simple

[Med89] Santiago López de Medrano. Topology of the intersection of quadrics in $\mathbb{R}^n$. In Gunnar Carlsson, Ralph Cohen, Haynes Miller, and Douglas Ravenel, editors, *Algebraic Topology*, pages 280–292, Berlin, Heidelberg, 1989. Springer Berlin Heidelberg.

[Mee00] Laurent Meersseman. A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension. *Mathematische Annalen*, 317(1) :79–115, 2000.

[Moi66] Boris Gershevich Moishezon. On n-dimensional compact complex manifolds having n algebraically independent meromorphic functions. i. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 30(1) :133–174, 1966.

[NN57] A. Newlander and L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Annals of Mathematics*, 65(3) :391–404, 1957.

[Ste99] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 1999.