Compacité de l'espace des cycles de Barlet

Antoine BOIVIN

8 Juillet 2019

- Article de Daniel Barlet de 1975 : " Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie "
- Article de David Liebermann de 1978 : "Compactness of the Chow scheme : Applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds "

Soit X un espace analytique complexe réduit et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Un n-cycle (compact) de X est une somme formelle finie

$$Z = \sum n_i Z_i$$

où $n_i \in \mathbb{N}^*$ et Z_i sont des sous-espaces analytiques de X, compacts, irréductibles et disjoints de dimension n.
On note $\mathscr{C}_n(X)$ l'ensemble des n-cycles de X

Soit X un espace analytique complexe réduit et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Un n-cycle (compact) de X est une somme formelle finie

$$Z = \sum n_i Z_i$$

où $n_i \in \mathbb{N}^*$ et Z_i sont des sous-espaces analytiques de X, compacts, irréductibles et disjoints de dimension n.
On note $\mathscr{C}_n(X)$ l'ensemble des n-cycles de X

Définition

Le support de $Z = \sum n_i Z_i$ est le sous-espace analytique $\bigcup Z_i$.

Exemples :

- Racines d'une famille de polynômes dépendant d'un paramètre.

Exemples :

- Racines d'une famille de polynômes dépendant d'un paramètre.

$$P_s(z) = z^3 - (1+4s)z^2 + (3s^2+4s)z - 3s^2$$

Exemples :

- Racines d'une famille de polynômes dépendant d'un paramètre.

$$P_s(z) = z^3 - (1+4s)z^2 + (3s^2+4s)z - 3s^2$$

- Famille de sous-espaces analytiques de même dimension

Exemples :

- Racines d'une famille de polynômes dépendant d'un paramètre.

$$P_s(z) = z^3 - (1 + 4s)z^2 + (3s^2 + 4s)z - 3s^2$$

- Famille de sous-espaces analytiques de même dimension

$$C_s := \{([x : y : z] \in \mathbb{P}^2 \mid x^2 + s^2 y^2 = sz^2\}$$

Théorème (Barlet)

$\mathscr{C}_n(X)$ admet une structure naturelle d'espace analytique réduit de dimension finie.

Théorème (Barlet)

$\mathscr{C}_n(X)$ admet une structure naturelle d'espace analytique réduit de dimension finie.

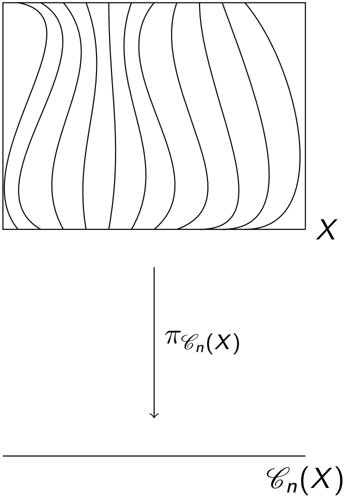
La structure analytique est donnée en identifiant $\mathscr{C}_n(X)$ avec le représentant d'un foncteur $\mathbf{An}_{\mathbb{C}}^{op} \to \mathbf{Ens}$ $\square$

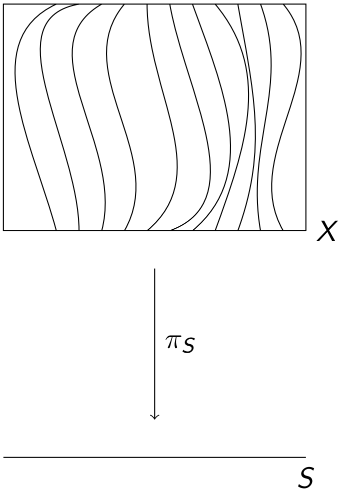
Théorème (Barlet)

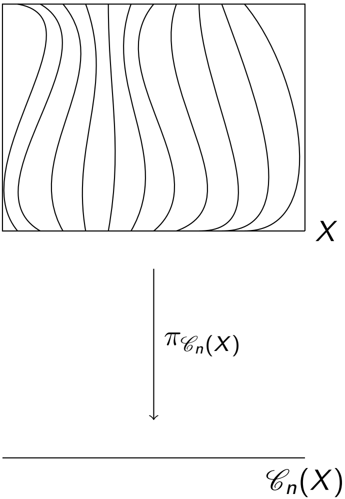
$\mathscr{C}_n(X)$ admet une structure naturelle d'espace analytique réduit de dimension finie.

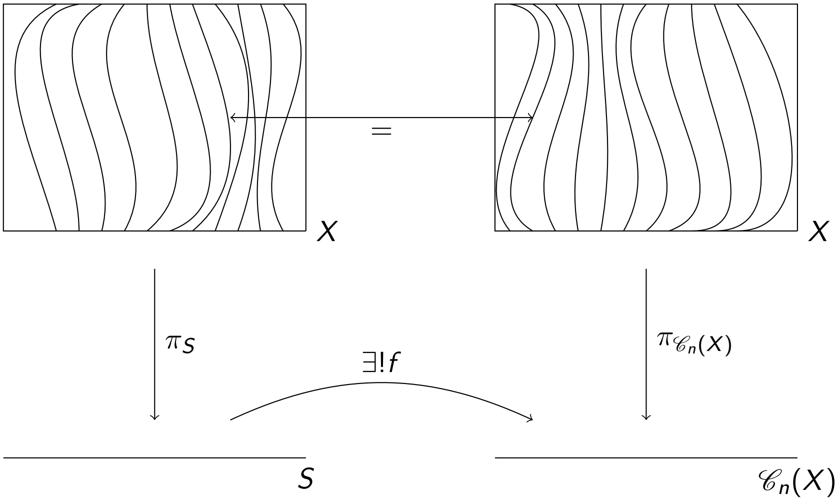
La structure analytique est donnée en identifiant $\mathscr{C}_n(X)$ avec le représentant d'un foncteur $\mathbf{An}_{\mathbb{C}}^{op} \to \mathbf{Ens}$ $\square$

Existence d'une "famille universelle" des n-cycles sur X.


X
$\pi_{\mathscr{C}_n(X)}$
$\mathscr{C}_n(X)$


X
πS
S


X
π𝒞n(X)
𝒞n(X)


X
$=$
X
π_S
$\exists ! f$
$\pi_{\mathscr{C}_n(X)}$
S
$\mathscr{C}_n(X)$

Soit X une variété complexe.
On se fixe une métrique hermitienne h et la 2-forme $\omega = -Im(h)$ associée.

Théorème (de compacité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit S un sous-ensemble de $\mathscr{C}_n(X)$. S est relativement compact si, et seulement si, il existe un compact contenant le support de chaque cycle de S, et si le volume de ces cycles est uniformément borné.

Soit X une variété complexe.
On se fixe une métrique hermitienne h et la 2-forme $\omega = -Im(h)$ associée.

Théorème (de compacité)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit S un sous-ensemble de $\mathscr{C}_n(X)$. S est relativement compact si, et seulement si, il existe un compact contenant le support de chaque cycle de S, et si le volume de ces cycles est uniformément borné.

Corollaire

Soit (M, ω) une variété compacte de Kähler et $n \in \mathbb{N}^*$. Les composantes connexes de $\mathscr{C}_n(M)$ sont compactes.

Soient X, Y des espaces analytiques réduits.
On supposera X compact, normal et connexe.

Soient X, Y des espaces analytiques réduits.
On supposera X compact, normal et connexe.

Théorème

$Hol(X, Y)$ est un ouvert de $\mathscr{C}_n(X \times Y)$

Soient X, Y des espaces analytiques réduits.
On supposera X compact, normal et connexe.

Théorème

$Hol(X, Y)$ est un ouvert de $\mathscr{C}_n(X \times Y)$

Théorème

La topologie induite sur $Hol(X, Y)$ par $\mathscr{C}_n(X \times Y)$ est la topologie de la convergence uniforme des applications holomorphes.

Théorème

Soit X un espace analytique complexe compact et f un automorphisme de X. Soit $\mathscr{C}_\Gamma$ la composante irréductible de l'espace des cycles contenant le graphe de f. Alors, l'ensemble des points de $\mathscr{C}_\Gamma$ correspondant aux automorphismes de X est un ouvert de Zariski.

Théorème

Soit X un espace analytique complexe compact et f un automorphisme de X. Soit $\mathscr{C}_\Gamma$ la composante irréductible de l'espace des cycles contenant le graphe de f. Alors, l'ensemble des points de $\mathscr{C}_\Gamma$ correspondant aux automorphismes de X est un ouvert de Zariski.

Corollaire

Soit (M, ω) une variété de Kähler.
$\mathscr{C}_\Delta(M \times M)$ est une compactification de $Aut_0(M)$

Soit (M, ω) une variété compacte de Kähler.

Définition

$Aut_{\omega}(M)$ est le groupe des automorphismes préservant la classe de la forme de Kähler.

Soit (M, ω) une variété compacte de Kähler.

Définition

$Aut_\omega(M)$ est le groupe des automorphismes préservant la classe de la forme de Kähler.

Corollaire

$$Card(Aut_\omega(M)/Aut_0(M)) < \infty$$

Soit (M, ω) une variété compacte de Kähler.

Définition

$Aut_\omega(M)$ est le groupe des automorphismes préservant la classe de la forme de Kähler.

Corollaire

$$Card(Aut_\omega(M)/Aut_0(M)) < \infty$$

Étapes de la preuve :

- $Aut_0(M) \subset Aut_\omega(M)$

Soit (M, ω) une variété compacte de Kähler.

Définition

$Aut_{\omega}(M)$ est le groupe des automorphismes préservant la classe de la forme de Kähler.

Corollaire

$$Card(Aut_{\omega}(M)/Aut_0(M)) < \infty$$

Étapes de la preuve :

- $Aut_0(M) \subset Aut_{\omega}(M)$
- $Aut_0(M)$ est un sous-groupe distingué de $Aut_{\omega}(M)$

Soit (M, ω) une variété compacte de Kähler.

Définition

$Aut_\omega(M)$ est le groupe des automorphismes préservant la classe de la forme de Kähler.

Corollaire

$$Card(Aut_\omega(M)/Aut_0(M)) < \infty$$

Étapes de la preuve :

- $Aut_0(M) \subset Aut_\omega(M)$
- $Aut_0(M)$ est un sous-groupe distingué de $Aut_\omega(M)$
- $Aut_\omega(M)$ rencontre un nombre fini de composantes connexes de $\mathscr{C}_n(M \times M)$

Corollaire

Soit $(X_t)_{t\in T}$ *une famille de variétés compactes de Kähler telles que* $(X_0, \omega_0) \simeq (X_t, \omega_t)$ *sur un ensemble Zariski-dense de valeurs de* t*. Alors, cette famille est localement analytiquement triviale sur un ouvert de Zariski* $U \subset T$