Université d'Angers

PRA

# Les douze surfaces de Darboux et la trialité

Antoine BOIVIN

*Encadrant*
Laurent Meersseman

2017-2018

université angers

# Introduction

Dans ce mémoire, nous allons étudier l'article [11] de B.Sévennec qui donne une interprétation géométrique d'une construction faite par G.Darboux dans [2].
Soient $S$ une surface, $f : S \to \mathbb{R}^3$ une immersion.
On s'intéressera aux déformations isométriques infinitésimales de $f$ qui sont les applications $g : S \to \mathbb{R}^3$ telles que la première forme fondamentale induite par $f_\varepsilon = f + \varepsilon g$ est la même que celle induite par $f$ à l'ordre 1 i.e.

$$\forall p \in S, |d_p f_\varepsilon|^2 = |d_p f|^2 + o(\varepsilon)$$

Autrement dit, ce sont les applications $g : S \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\forall p \in S, \forall u \in T_p S, d_p f(u) \cdot d_p g(u) = 0 \tag{1}$$

La donnée d'un tel couple $(f, g)$ permet de définir une troisième application $h : S \to \mathbb{R}^3$ (car $f$ est une immersion) telle que :

$$\forall p \in S, \forall u \in T_p S, d_p g(u) = h(p) \times d_p f(u)$$

On obtient alors ce que l'on appelle un triplet de Darboux $(f, g, h)$.
A partir d'un tel triplet, on peut en construire deux autres de la façon suivante :
En premier lieu, si on pose $\widetilde{g} = g - h \times f$,

$$d\widetilde{g} = f \times dh$$

(en sous-entendant les arguments) et donc $(h, \widetilde{g}, f)$ est un triplet de Darboux.
Ensuite, si on suppose que $g$ est aussi une immersion alors il existe une application $h^*$ telle que

$$df = h^* \times dg$$

ou, autrement dit, $(g, f, h^*)$ est un triplet de Darboux.
On a donc défini deux applications sur les triplets de Darboux (qui vérifie des conditions que l'on détaillera plus tard) deux opérations $A : (f, g, h) \mapsto (h, \widetilde{g}, f)$ et $D : (f, g, h) \mapsto (g, f, h^*)$. Le but de ce mémoire est de détailler l'action de ses deux applications et en particulier, de démontrer que

**Théorème 0.0.1** (Darboux)**.** $(D \circ A)^6 = Id$

et ainsi montrer que le groupe engendré par $A$ et $D$ est le groupe diédral à 12 éléments.

Nous allons commencer dans la section 1 par détailler les constructions de l'introduction. Dans la partie 2 puis dans partie 3, nous allons montrer que $\mathbb{R}^6$ muni de la métrique $dx \cdot dy$ se compactifie dans la quadrique $Q$ de signature (4,4) de $\mathbb{R}P^7$ de façon conforme et ainsi, comme la condition 1 ne dépend que de la structure (pseudo-)conforme de la métrique $dx \cdot dy$, alors les couples $(f, g)$ deviennent une application $\varphi = [f : 1 : g : -f \cdot g] : S \to Q$ totalement isotrope dont le plan projectif tangent $P(\varphi(p) \oplus Im(d_p\psi))$ (où $\psi = (f, 1, g, -f \cdot g)$)

est totalement isotrope. Comme ce plan projectif est inclus dans exactement deux (projectivisés de) sous-espaces totalement isotropes maximaux, on peut définir deux applications $\varphi_{\pm}$, qui associe à $p$ un de ses deux sous-espaces, que l'on explicitera. Ces applications sont bien définies car on peut séparer les sous-espaces totalement isotropes maximaux en deux sous-ensembles, ceux qui sont les graphes des applications de $SO(4)$ que l'on notera $Q_+$ et celle de $O^-(4)$ que l'on notera $Q_-$.
Dans la partie 4, nous allons introduire sur $\mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4$ une structure d'algèbre qui rend la forme quadratique $q : (u, v) \mapsto u \cdot v$ multiplicative, l'algèbre des octonions déployés. Cela nous permettra de montrer que l'on peut définir sur $Q, Q_+$ et $Q_-$ une structure d'incidence très symétrique. Cette symétrie nous permettra, dans la partie 5 de montrer que les applications $\varphi, \varphi_+$ et $\varphi$ jouent des rôles identiques (trialité différentielle) et ce qui nous permettra de montrer le théorème de Darboux. On finira par donner une interprétation géométrique des cas de dégénérescence i.e. les cas où les applications $\varphi_+$ ou $\varphi_-$ sont de rang $< 2$.

## Convention et notations

Dans tout ce mémoire, les variétés et les applications seront supposés de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour un espace vectoriel $E$, on notera $P(E)$ son projectivisé et si $E = \mathbb{R}^{n+1}$, on le notera $\mathbb{R}P^n$ (voir l'appendice A pour les définitions)

# Table des matières

# 1 Etude des triplets de Darboux

Dans cette section, nous allons donner les détails des définitions des "triplets de Darboux" et des applications $A$ et $D$. Pour commencer, nous allons démontrer une généralisation de l'égalité (1) de l'introduction :

**Proposition 1.0.1.** *Soit $E$ un espace de dimension 2 et $L_1 : E \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire injective. Soit $L_2 : E \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que*

$$\forall u \in E, L_1(u) \cdot L_2(u) = 0$$

*Alors il existe un unique $h \in \mathbb{R}^3$ tel que :*

$$L_2 = h \times L_1 \tag{2}$$

*Démonstration.* Soit $\mathcal{B} = (w_1 = L_1(v_1), w_2 = L_1(v_2))$ une base orthonormée de $Im(L_1)$ (qui est de dimension 2 par le théorème du rang). Posons $u_1 = L_2(v_1)$ et $u_2 = L_2(v_2)$.
Trouver un $h$ vérifiant (2) est équivalent à trouver un $h$ vérifiant les égalités $\begin{cases} u_1 = h \times w_1 \\ u_2 = h \times w_2 \end{cases}$.
En utilisant la première équation, on voit qu'un $h$ vérifiant (2) est de la forme $w_1 \times u_1 + \lambda w_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et grâce à la deuxième, $h$ est de la forme $w_2 \times u_2 + \mu w_2$, $\mu \in \mathbb{R}$. En effet, en utilisant la formule du double produit vectoriel [1], on a :

$$(w_1 \times u_1) \times w_1 = \underbrace{(w_1 \cdot w_1)}_{=1} u_1 - \underbrace{(w_1 \cdot u_1)}_{=0} u_1 = u_1$$

Si $h$ est de ses deux formes, alors en faisant le produit scalaire avec $w_1$, on obtient que $\lambda = (w_1, w_2, u_2)$ où $(\cdot, \cdot, \cdot)$ est le produit triple.
Réciproquement,

$$(w_1 \times u_1 + \lambda w_1) \times w_2 = w_1 \cdot w_2\ u_1 - u_1 \cdot w_2\ w_1 + \lambda w_1 \times w_2.$$

On remarque ensuite, en développant $L_1(v_1 + v_2) \cdot L_2(v_1 + v_2)$ que :

$$0 = L_1(v_2) \cdot L_2(v_1) + L_1(v_1) \cdot L_2(v_2)$$

C'est-à-dire,

$$(w_1 \times u_1 + \lambda w_1) \times w_2 = w_1 \cdot w_2\ u_1 + w_1 \cdot u_2\ w_1 + \lambda w_1 \times w_2 = u_2$$

grâce à la décomposition de $u_2$ dans la base $w_1, w_2, w_1 \times w_2$ (qui est orthonormée). Les mêmes calculs nous montre que $\mu = (w_1, u_1, w_2)$ convient.

□

1. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3, (u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$

En particulier, si $f : S \to \mathbb{R}^3$ est une immersion et $g : S \to \mathbb{R}^3$ une application telle que $df \cdot dg = 0$ alors il existe une application lisse $h : S \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\forall p \in S, d_p g = h(p) \times d_p f \tag{3}$$

**Définition 1.0.2.** On appelera triplet de Darboux un triplet $(f, g, h)$ d'applications lisses $S \to \mathbb{R}^3$ vérifiant l'identité (3)

Maintenant, on va construire de nouveaux triplets de Darboux à partir d'un triplet $(f, g, h)$ donné :
Si $g$ est aussi une immersion, grâce à la symétrie de la formule $df \cdot dg = 0$ alors il existe une application lisse $h^* : S \to \mathbb{R}^3$ telle que $df = h^* \times dg$. On notera $D(f, g, h)$ le triplet $(g, f, h^*)$ qui est de Darboux.
Une autre façon de construire un triplet de Darboux est de poser, comme Darboux lui-même, $\widetilde{g} := g - h \times f$ alors on a

$$d\widetilde{g} = dg - dh \times f - h \times df = f \times dh$$

et donc $(\widetilde{g}, h, f)$ est un triplet de Darboux que l'on notera $A(f, g, h)$.
Examinons maintenant l'application $h^*$ :

Tout d'abord, montrons le

**Lemme 1.0.3.** *Soit $(f, g, h)$ un triplet de Darboux. Alors $\partial_1 h \times \partial_2 f = \partial_2 h \times \partial_1 f$ (dans des coordonnées locales de $S$).*

*Démonstration.* En différentiant la 1-forme $dg = h \times df = (h \times \partial_1 f)dx + (h \times \partial_2 f)dy$, on obtient :

$$0 = (\partial_1(h \times \partial_1 f)dx + \partial_2(h \times \partial_1 f)dy)dx + (\partial_1(h \times \partial_2 f)dx + \partial_2(h \times \partial_2 f)dy)dy$$

En examinant la partie en $dx \wedge dy$ et en utilisant le lemme de Schwarz, on en déduit le résultat. □

On peut décomposer $\partial_i h$, $i = 1, 2$,dans la base $\partial_1 f, \partial_2 f, v_f$ (où $v_f$ engendre $Im(df)^\perp$) :

$$\partial_i h = \alpha_i \partial_1 f + \beta_i \partial_2 f + \gamma_i v_f.$$

En prenant le produit scalaire par $\partial_1 f \times \partial_2 f$ des deux côtés puis en utilisant le lemme précédent (et le produit triple), on obtient que $\gamma_i = 0$, $i = 1, 2$ c'est-à-dire $\partial_i h \in Im(df)$. De ce fait, $Im(dh) \subset Im(df)$.
Maintenant,grâce à la formule du double produit vectoriel, on obtient

$$df = h^* \times dg = h^* \times (h \times df) = (h^* \cdot df)h - (h^* \cdot h)df$$

Et donc, en prenant le produit vectoriel par $h$ à gauche, on obtient que :

$$dg = h \times df = -(h^* \cdot h)dg$$

D'où, $h^* \cdot h = -1$ et en réinjectant dans l'équalité précédente, $h^* \cdot df = 0$ et en particulier $h^* \cdot dh = 0$. Autrement dit, le plan affine tangent à $h(S)$ en $h(p)$ est le plan d'équation $h^*(p) \cdot x + 1 = 0$. Par conséquent, $h^*(p)$ n'est pas défini si ce plan tangent contient 0. Réciproquement,

**Définition et proposition 1.0.4.** Soit $(f, g, h)$ un triplet de Darboux tel que $h$ soit une immersion dont les plans affines tangents évitent l'origine. On définit $h^*(p)$ comme la normale du plan tangent de $h(S)$ en $p$ normalisé pour que l'équation du plan affine tangent en $p$ soit $h^*(p) \cdot x + 1 = 0$. Alors $(g, f, h^*)$ est un triplet de Darboux

*Démonstration.* Par définition de $h^*$, on a : $h^* \cdot h = -1$ et $h^* \cdot dh = 0$.
De la même façon que précédemment, on décompose $\partial_i f$ dans la base $\partial_1 h, \partial_2 h, v_h$ ($h$ est une immersion) et en faisant le produit scalaire par $\partial_1 h \times \partial_2 h$ que la partie en $v_h$ est nulle. On en déduit que $Im(df) \subset Im(dh)$ et donc en particulier $df \cdot h^* = 0$. En utilisant la formule du produit vectoriel, on obtient :

$$h^* \times dg = h^* \times (h \times df) = (h^* \cdot df)h - (h^* \cdot h)df = df$$

□

On notera le triplet $(g, f, h^*)$ par $D(f, g, h)$. Grâce à notre discussion autour de $h^*$, on remarque que nos deux définitions de $D$ sont compatibles lorsqu'elles s'appliquent simultanément.

# 2 Structure pseudo-conforme d'une variété

## 2.1 Hessienne

**Définition 2.1.1.** Soit $M$ une variété différentielle.
Un champ de vecteurs sur $M$ est une application $X : U \subset M \to TM$ telle que $\forall x \in U, X(x) \in T_x M$.

**Définition 2.1.2.** On associe à un champ de vecteur $X$ sur $M$ la dérivation $L_X : f \in \mathcal{C}^\infty(M) \mapsto (x \mapsto (X \cdot f)(x) := d_x f(X(x))) \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

**Définition 2.1.3.** On appelle crochet de deux champs de vecteurs $X$ et $Y$ le champ de vecteur $[X, Y]$ associé à $L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$.

**Théorème et définition 2.1.4.** Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une application lisse. Soit $a \in M$ tel que $d_a f = 0$. Soient $u, v \in T_a M$ et $X$ et $Y$ deux champs de vecteurs tels que $X(a) = u$ et $Y(a) = v$.
Posons $H_a f(u, v) := (X \cdot df(Y))(a)$. Cette valeur ne dépend pas des champs de vecteurs $X$ et $Y$ choisis et l'application $H_a f : (u, v) \mapsto H_a f(u, v)$ est une forme bilinéaire symétrique de $T_a M$.

*Démonstration.* Montrons, tout d'abord, que

$$(X \cdot df(Y))(a) = (Y \cdot df(X))(a) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} (X \cdot df(Y) - Y \cdot df(X))(a) &= (L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)(f)(a) \\ &= = [X, Y] \cdot f(a) = d_a f([X, Y](a)) = 0 \end{aligned}$$

Le terme à gauche de (4), comme fonction de $X$, ne dépend que de $X(a) = u$ et de même, le terme à droite de (4),comme fonction de $Y$, ne dépend que de $Y(a) = v$. On en déduit que $H_a f(u, v)$ ne dépend ni de $X$ ni de $Y$ mais seulement de $u$ et $v$.
Avec (4), on voit que $H_a f$ est symétrique. La bilinéarité est immédiate. □

L'application $H_a f$ est appelé hessienne de $f$ en $a$.

## 2.2 Structure pseudo-conforme projective sur une variété

Soient $M$ une hypersurface de $\mathbb{R}P^n$, $p \in M$ et une équation locale $f = 0$ de $M$ au voisinage de $p$ ($f$ est une submersion en $p$ i.e. $d_p f \neq 0$).
En calculant dans les cartes de $\mathbb{R}P^n$, on peut voir que $T_p M$ coïncide avec $T_p H$ où $H$ est l'hyperplan projectif donné par $\mathrm{Ker}(d_p f)$.
Comme $d_p f_{|H} = (d_p f)_{|T_p H} = 0$ alors $p$ est un point critique de $f$ et donc on peut définir une hessienne sur $T_p H \times T_p H = T_p M \times T_p M$. On définit $I\!I_p$ comme l'application faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
T_pM \times T_pM \arrow[rr, "-H_pf"] \arrow[dr, "I\!I_p"'] & & \mathbb{R} \\
& N_pM := T_p\mathbb{R}P^n/T_pM \arrow[ur, "\overline{d_pf}"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\overline{d_pf}$ est l'isomorphisme induit par $d_pf$.
Autrement dit, $I\!I_p = -\overline{d_pf}^{-1} \circ H_pf$.
Si on change l'équation locale de $M$ en $p$ en $g = 0$ alors $\mathrm{Ker}(d_pf) = \mathrm{Ker}(d_pg)$ (car $f$ et $g$ correspondent au même hyperplan projectif $H$) et $d_pg = \frac{d_pg(x)}{d_pf(x)}d_pf$ où $d_pf(x) \neq 0$ i.e. $d_pf$ et $d_pg$ ne diffèrent que d'un facteur multiplicatif. On en déduit que la hessienne change du même coefficient (c.f. la formule de la hessienne dans 2.1.4). $I\!I_p$ ne dépend donc pas de l'équation locale choisie. On l'appelle deuxième forme fondamentale de $S$ au point $p$.
On peut maintenant définir la structure pseudo-conforme projective de $M$ en $p$ comme l'ensemble des applications bilinéaires $I\!I_p \circ \varphi$, où $\varphi : N_pM \to \mathbb{R}$ est un isomorphisme (linéaire).

**Exemple 2.2.1.** On va étudier l'exemple de l'hypersurface $M = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | t = q(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}P^{n+1}$ où $q$ est une forme quadratique non dégénérée de $\mathbb{R}^n$ :
Soit $f : (x,t) \mapsto t - q(x)$. L'équation $f = 0$ est une équation globale de $M$. La hessienne de $f$ en tout point est $-2b$ où $b$ est la forme bilinéaire associée à $f$. On peut identifier $M$ avec $\mathbb{R}^n$ grâce à la projection $(x,t) \mapsto x$ puis $N_pM$ avec $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \times \mathbb{R}$. Avec cette identification, $I\!I_p = (0, 2b)$ en tout point $p$ de $M$. La structure pseudo-conforme projective de $M$ en tout point est $\{(0, 2\lambda b) | \lambda \in \mathbb{R}^*\}$.

## 2.3 Compactification

On peut compactifier $M$ en ajoutant ses points à l'infini. On obtient alors la quadrique projective (lisse) $Q = \{[s : x : t] \mid q(x) - st = 0\} \subset \mathbb{R}P^{n+1}$ (par construction, $Q = \{[1 : x : t] \mid q(x) = t\} \cup \{[0 : x : 1] \mid q(x) = 0\} = M \cup \{[0 : x : 1] \mid q(x) = 0\}$). Cette compactification est conforme dans le sens où il existe un isomorphisme $\varphi$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
T_pM \times T_pM \arrow[r, "d_pi \times d_pi"] \arrow[d, "I\!I_p^M"'] & T_{i(p)}Q \times T_{i(p)}Q \arrow[d, "I\!I_p^Q"'] \\
N_pM \arrow[r, "\varphi"] & N_{i(p)}Q
\end{tikzcd}$$

où $i : M \hookrightarrow Q$ est l'inclusion et $I\!I^M, I\!I^Q$ sont les deuxièmes formes fondamentales de $M$, $Q$. Ici, $\varphi$ est l'inclusion.
En résumé, on peut compactifier $\mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^s$ muni de la forme quadratique $(u,v) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \mapsto |u|^2 - |v|^2$ en une quadrique projective lisse, dont la forme quadratique est de signature $(r+1, s+1)$, dans $\mathbb{R}P^{r+s+1}$ en conservant la structure pseudo-conforme projective.

**Exemple 2.3.1.** Supposons que $q$ soit la forme quadratique de signature $(n, 0)$ i.e. $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$.
On peut identifier $\mathbb{R}^n$ à un sous-ensemble de $Q = \{[s : x : t] \mid q(x) = st\} \subset \mathbb{R}P^{n+1}$ (on notera $N$ la forme quadratique définie par $N(s, x, t) = q(x) - st$).
Montrons que l'on peut identifier $Q$ à la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Soient $H = \{(s, x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | s + t = 0\}$ un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+2}$ et $\mathcal{B} = \{e_0 - e_{n+1}, e_2, \dots, e_n, e_0 + e_{n+1}\}$ une base de $\mathbb{R}^{n+2}$ où $(e_0, \dots, e_{n+1})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+2}$. Ainsi, dans cette base, $H = \{(y_0, \dots, y_{n+1})_{\mathcal{B}} | y_{n+1} = 0\}$ et donc, $\mathbb{R}P^{n+1} \setminus H = \{[y_0 : \dots : y_{n+1}]_{\mathcal{B}} \mid y_{n+1} \neq 0\}$. On a une identification naturelle de $\mathbb{R}P^{n+1} \setminus H$ avec $\mathbb{R}^{n+1}$ grâce à l'isomorphisme $\varphi : [y_0 : \dots : y_{n+1}] \mapsto (y_0/y_{n+1}, \dots, y_n/y_{n+1})$.
Si $y = y_0(e_0 - e_{n+1}) + \sum_{i=1}^n y_i e_i + y_{n+1}(e_0 - e_{n+1}) \in Q$ alors

$$0 = N(y) = q(y_1, \dots, y_n) - (y_0 + y_{n+1})(y_0 - y_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} y_i^2 - y_{n+1}^2$$

La réciproque est évidemment vraie.
Comme $Q$ est inclus dans $\mathbb{R}P^{n+1} \setminus H$ (car dans le cas contraire, on aurait des points $(s, x, t) \neq 0$ tels que $q(x) = -s^2 < 0$)et grâce à notre identification de $\mathbb{R}P^{n+1} \setminus H$ avec $\mathbb{R}^{n+1}$, on obtient que $Q$ s'identifie avec la sphère unité. La réciproque de l'isomorphisme $\varphi$ est définie de la façon suivante : $\varphi^{-1}(x, s) = [s : x : 1]_{\mathcal{B}}$ (dans la base $\mathcal{B}$) et donc $\varphi^{-1}(x, s) = [s + 1 : x : s - 1] = [\frac{s+1}{s-1} : x : 1]$.
Ainsi, la projection $\pi : [s : x : 1] \in Q \setminus \{p\} \mapsto x \in \mathbb{R}^n$ s'identifie, grâce à l'isomorphisme $\varphi$, à la projection stéréographique de $S^n \setminus N$ sur $\mathbb{R}^n$

# 3 Géométrie : Etude de $\varphi_\pm$

## 3.1 Géométrie de $Q$

On note $\mathbb{R}^{4,4}$ l'espace $\mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4$ muni de la forme quadratique de signature $(4,4)$ définie par $q(x,y) = |x|^2 - |y|^2$. La quadrique $Q \subset \mathbb{R}P^7$, définie dans la section 2 est la variété des droites isotropes de $\mathbb{R}^{4,4}$.
Nous allons, tout d'abord, étudier la variété $M$ des sous-espaces totalement isotropes maximaux de $\mathbb{R}^{4,4}$ puis la structure d'incidence que cette variété a avec $Q$.

**Théorème 3.1.1.** *Soit $F \subset \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4$ un sous-espace vectoriel totalement isotrope de dimension $k \leq 4$. Alors $F$ est le graphe d'une application orthogonale $\widetilde{F} \to \mathbb{R}^4$ où $\widetilde{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension $k$.*
*Réciproquement, tout graphe d'une application orthogonale est totalement isotrope.*

*Démonstration.* Soient $x \oplus y$, $x \oplus y' \in F$ Alors leur différence $0 \oplus (y - y')$ est dans $F$. Par conséquent, $|y - y'| = 0$ et donc $y = y'$.
On peut donc définir une application $f : \widetilde{F} \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie de la façon suivante :
Si $x \oplus y \in F$ alors $f(x) := y$.
On peut, de plus, remarquer que $\widetilde{F}$ est un espace vectoriel et que $f$ est une application linéaire orthogonale (car $|x| = |f(x)|$, par orthogonalité de $F$) injective et dont le graphe est $F$ (par construction). Par conséquent, $k = \dim(F) = \mathrm{rg}(f) = \dim(\widetilde{F})$.
Réciproquement, si $Q$ est une application orthogonale, $\forall x \in \widetilde{E}, q(x, Q(x)) = |x| - |Q(x)| = 0$ □

En particulier, les sous-espaces vectoriels totalement isotropes maximaux sont les graphes des éléments de $O(4)$. Ainsi, la variété $M$ a deux composantes connexes : le projectivisé des graphes des applications de SO(4) et le projectivisé des graphes des applications de $O^-(4)$ que l'on peut identifier avec les composantes composantes connexes de $O(4)$.

**Théorème 3.1.2.** *$SO(4) \simeq S^3 \times S^3/\{\pm(1,1)\}$ (en tant que groupes de Lie)*

*Démonstration.* Soit $\varphi : (u,v) \in S^3 \times S^3 \mapsto (x \mapsto uxv^{-1} = ux\overline{v}) \in \mathrm{GL}(\mathbb{H})$ où on a identifié $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{H}$.
$\varphi$ est clairement un morphisme de groupes de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et bien à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathbb{H})$ car $\varphi(u,v)$ est bijective d'inverse $\varphi(u^{-1}, v^{-1})$) Déterminons maintenant son noyau et son image.
**Noyau de $\varphi$ :**
Soit $(u,v) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{H}$,

$$uxv^{-1} = x \tag{5}$$

En particulier, en prenant $x = 1$, on a $u = v$. Maintenant, (5) nous dit que $u$ est dans le centre de $\mathbb{H}$ qui est $\mathbb{R}$. Comme $u \in S^3$, on déduit que $u = \pm 1$.

Réciproquement, $\pm(1,1) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
On a donc : $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\pm(1,1)\}$.
**Image de $\varphi$ :**
Soient $(u,v) \in S^3 \times S^3$ et $x \in \mathbb{H}$.

$$|\varphi(u,v)(x)| = |uxv^{-1}| = |u||x||v^{-1}| = |x|.$$

Ce qui montre que $\varphi(u,v) \in O(4)$ et donc $Im(\varphi) \subset O(4)$.
On peut affiner cela en disant que, comme $S^3 \times S^3$ est connexe, $Id \in Im(\varphi)$ et $\varphi$ est continu alors $Im(\varphi)$ est inclus dans la composante connexe de $O(4)$ contenant $Id$ i.e. $SO(4)$. On peut donc considérer que l'ensemble d'arrivée de $\varphi$ est $SO(4)$.
Montrons maintenant que $\varphi$ est un difféomorphisme local. Pour cela, il suffit de le montrer en $(1,1)$ (les translations sont des difféomorphismes) et grâce au théorème d'inversion locale, il suffit de montrer que $d_{(1,1)}\varphi : T_{(1,1)}S^3 \times S^3 \to \mathfrak{so}(4)$ est un isomorphisme.
$\varphi$ étant bilinéaire, on sait que, pour tout $(\delta, \varepsilon) \in T_{(1,1)}S^3 \times S^3 = \{x+y+z+t = 0, x'+y'+z'+t' = 0\}$, $\forall x \in \mathbb{H}, d_{(1,1)}\varphi(\delta,\varepsilon)(x) = \delta x + x\overline{\varepsilon}$.
Soit $(\delta,\varepsilon) \in \mathrm{Ker}(d_{(1,1)}\varphi)$. Alors $\forall x \in \mathbb{H}, \delta x = -x\overline{\varepsilon}$.
En particulier, pour $x = 1$, on obtient $\delta = -\overline{\varepsilon}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{H}, \delta x = x\delta$ i.e. $\delta \in \mathbb{R}$. Comme, de plus, $\delta \in \{x+y+z+t = 0\}$ alors $\delta = 0$. Cela montre que $\mathrm{Ker}(d_{(1,1)}\varphi) = \{0\}$ et comme $\dim(T_{1,1}S^3 \times S^3) = \dim(\mathfrak{so}(4)) = 6$ alors $d_{(1,1)}\varphi$ est un isomorphisme.
Tout cela nous permet de dire que $Im(\varphi)$ est un ouvert de $SO(4)$.
$S^3 \times S^3$ est compact donc $Im(\varphi) = \varphi(S^3 \times S^3)$ est compact et est donc fermé.
Par connexité de SO(4), $Im(\varphi) = \mathrm{SO}(4)$.
Le premier théorème d'isomorphisme nous permet de conclure que ces deux groupes sont isomorphes.
La continuité de l'application quotient $\overline{\varphi}$ vient de la définition de topologie quotient et montrons la continuité de sa réciproque.
Soit $U$ un ouvert de $S^3 \times S^3/\{\pm(1,1)\}$. On veut montrer que $\overline{\varphi}(U)$ est un ouvert de SO(4).
Par surjectivité de $\pi$, $\overline{\varphi}(U) = \overline{\varphi}(\pi \circ \pi^{-1}(U))$ et donc $\overline{\varphi}(U) = \varphi(\pi^{-1}(U))$. Comme $\varphi$ est un difféomorphisme local et que $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert (par définition de la topoogie quotient) alors $\varphi(U)$ est un ouvert.

□

Grâce à l'identification $S^3 \times S^3/\{\pm(1,1)\}$ avec la quadrique projective $Q = \{[u : v] \in \mathbb{R}P^7 | |u| = |v|\}$ (qui se fait en remarquant que $Q \ni [u:v] = \left[\frac{u}{|u|}, \frac{v}{|v|}\right]$) et au résultat précédent alors $SO(4)$ s'identifie à $Q$ (comme variété différentiable).
Comme, de plus, $O^-(4)$ s'identifie aussi à SO(4) (on prend un matrice $\gamma$ de $O^-(4)$ et on a $SO(4) = \gamma O^-(4)$) alors $Q$ contient deux familles $Q_+$et $Q_-$, qui sont, respectivement la famille des projectivisés des graphes des applications de SO(4) et ceux de $O^-(4)$ qui sont elles-mêmes deux copies de $Q$. On peut ainsi définir une structure d'incidence entre $Q, Q_+$ et $Q_-$. Rappelons tout d'abord ce qu'est une structure d'incidence :

**Définition 3.1.3.** Une structure d'incidence est un triplet $(\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$ où

— $\mathcal{P}$ est un ensemble non vide. Ses éléments sont appelés points.

— $\mathcal{D}$ est un ensemble (éventuellement vide) distinct de $\mathcal{P}$. Ses éléments sont appelés droites.

— $\mathcal{I}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$ tel que, pour tout $D \in \mathcal{D}$, il existe au moins deux éléments $x \in \mathcal{D}$ tels que $(x, D) \in \mathcal{I}$. $\mathcal{I}$ est appelé relation d'incidence.

Par exemple, comme le suggère la terminologie, si on considère $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ alors l'appartenance définit une relation d'incidence.

Dans le cas de $Q$, $Q_+$ et $Q_-$, on dira qu'un élément $x \in Q$ est incident à un sous-espace totalement isotrope maximal $F_\pm$ de $Q_\pm$ si $x \in F_\pm$.Ici, on a $\mathcal{P} = Q$ et $\mathcal{D} = Q_\pm$. C'est bien une relation d'incidence $|Q_+|, |Q_-| > 2$ et il existe au moins deux sous-espaces totalement isotropes maximaux qui contiennent $x$ (on complète $\{x\}$ en une base de quatre vecteurs isotropes). Un élément $F$ de $Q_+$ est incident à un élément de $G$ de $Q_-$ (et réciproquement) si leur intersection est maximale i.e. est un plan projectif. On a bien une relation d'incidence pour $\mathcal{P} = Q_+$ et $\mathcal{D} = Q_-$ (et réciproquement) car si $F = \mathrm{Vect}((x_i, f(x_i)), i = 1..4) \in Q_+$ alors $G = \mathrm{Vect}((x_1, -f(x_1)), (x_i, f(x_i)), i = 2..4)$ et $G' = \mathrm{Vect}((x_2, -f(x_2)), (x_i, f(x_i)), i = 1, 3, 4)$ sont dans $Q_-$ et sont d'intersection maximale avec $F$).
Réciproquement,

**Proposition 3.1.4.** *Soit $V$ un sous-espace totalement isotrope de dimension 3 de $\mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^4$. Il existe exactement deux sous-espaces totalement isotropes maximaux contenant $V$.*

*Démonstration.* Soient $f : \widetilde{E} \to \mathbb{R}^4$ l'application orthogonale dont le graphe est $V$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\widetilde{E}$.
Il existe deux, et seulement deux, vecteurs complétant $\mathcal{B}$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$. En effet, $\widetilde{E}^\perp$ est de dimension 1 et donc a deux générateurs unitaires opposés. $f$ a deux prolongements en une application orthogonale de $O(4)$, un dans $\mathrm{SO}(4)$ et un dans $O^-(4)$. □

## 3.2 Les applications $\varphi_\pm$ associées à un triplet de Darboux

Soit $S$ une surface et $f : S \to \mathbb{R}^3$ une immersion. Une déformation infinitésimale de $f$ est un champ de vecteurs $g : S \to T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ le long de $f$ i.e. de la forme $(f, \widetilde{g})$ que l'on identifiera avec l'application $\widetilde{g} : S \to \mathbb{R}^3$. Une déformation infinitésimale est dite isométrique si la première forme fondamentale induite par $f_t = f + tg$ (i.e. les formes quadratiques $q_t : u \in T_pS \mapsto |d_pf_t(u)|^2$) est égale à l'ordre 1 à celle induite par $f$ ou autrement dit, $q_t = q_0 + o(t)$.

**Proposition 3.2.1.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$g$ est une déformation infinitésimale isométrique de $f$*
2. $\frac{dq_t}{dt}(0) = 0$

*3.* $df \cdot dg = 0$

*Démonstration.* On obtient $1 \Leftrightarrow 2$ grâce au développement limitée de $q_t$ en 0 et $2 \Leftrightarrow 3$ grâce à l'égalité $df_t = df + 2tdf \cdot dg + t^2|dg|^2$. $\square$

Un exemple de déformation infinitésimale isométrique [2] est une application de la forme $g : t \mapsto a \times f(t) + b$ où $a, b \in \mathbb{R}^3$.
Soit $g$ une déformation infinitésimale isométrique de $f$.
Considérons maintenant l'application $\varphi = (f, g)$ qui va de $S$ dans $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ que l'on munira de la forme quadratique $\widetilde{q} : (u, v) \mapsto u \cdot v$. Ainsi comme $g$ est une déformation infinitésimale isométrique, l'image de $d_p\varphi = (d_pf, d_pg)$ est totalement isotrope en tout point $p$ de $S$. On dira que $\varphi$ est totalement isotrope pour $\widetilde{q}$.
La totale isotropie de $\varphi$ ne dépendant que de la forme $\widetilde{q}$, on peut, comme dans la section 2 compactifier $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ en la quadrique [3] de signature (4,4) de $\mathbb{R}P^7$ des zéros de la forme $q(x, s, y, t) = x \cdot y + st$ :

$$Q = \{[x : s : y : t] \in P(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}) | x \cdot y + st = 0\} \subset \mathbb{R}P^7$$

et considérer $\varphi$ comme une immersion de $S$ dans $Q$ donnée par : $\varphi = [f : 1 : g : -f \cdot g]$ (car on peut identifier $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ avec $\{[x : 1 : y : -x \cdot y] | x, y \in \mathbb{R}^3\}$).
Ainsi, $g$ est une déformation infinitésimale isométrique de $f$ si, et seulement si, le plan projectif tangent à $\varphi(S)$ en $\varphi(p)$, i.e. $\tau_p\varphi := P(\varphi(p) \oplus Im(d_p\psi))$ est totalement isotrope (où $\psi = (f, 1, g, -f \cdot g) : S \to \mathbb{R}^8$).
En effet, $d_p\psi = (d_pf, 0, d_pg, -d_p(f \cdot g))$ est de norme nulle si, et seulement $d_pf \cdot d_pg = 0$ et de même pour $\psi(p) + d_p\psi = (f(p) + d_pf, 1, g(p) + d_pg, -f(p = \cdot g(p) - d_p(f \cdot g)$. En effet,

$$\begin{aligned}(f(p) + d_pf) \cdot g(p) + d_pg &= f(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot d_pg + g(p) \cdot d_pf + d_pf \cdot d_pg \\ &= f \cdot g + d_p(f \cdot g) + d_pf \cdot d_pg\end{aligned}$$

Dans ce cas, $V_p := \varphi(p) \oplus Im(d_p\psi)$ est contenu dans exactement deux sous-espace totalement isotropes maximaux, un qui est le graphe d'une application de SO(4) et un qui est le graphe d'une application de $O^-(4)$ (c.f. proposition 3.1.4) . Ainsi, $\tau_p\varphi$ est contenu dans exactement deux espaces projectifs de dimension 3, un dans $Q_+$ et l'autre dans $Q_-$. Ainsi, on peut définir deux applications $\varphi_\pm : S \to Q_\pm$ qui associe à $p$ l'élément de $Q_\pm$ contenant $\tau_p\varphi$.
Pour alléger les notations, on notera $(a, b)_+$ l'ensemble $\{[x : s : y : t] \mid y = a \times x + bs, t = -b \cdot x\}$ qui est le graphe de l'application $(x, s) \mapsto (a \times x + bs, -b \cdot x)$ de $Q_+$ et $(a, b)_-$ le "graphe tordu " $\{[x : s : y : t] \mid y = a \times x + bt, s = -b \cdot x\}$ de $Q_-$ qui sont des ensembles qui sont clairement dans les ensembles $Q_+$ et $Q_-$

**Théorème 3.2.2.** *Les ensembles* $\{(a, b)_+ | a, b \in \mathbb{R}^3\}$ *et* $\{(a, b)_- | a, b \in \mathbb{R}^3\}$ *sont des ouverts affines (denses)* [4] *de respectivement,* $Q_+$ *et* $Q_-$*.*

2. On étudie dans l'appendice B le cas où ce sont les seuls
3. Elles sont toutes isomorphes
4. pour la topologie de Zariski, par le plongement de Plücker, c.f. l'appendice C

### 3.2.1 Calcul de $\varphi_\pm$

Soient $f : S \to \mathbb{R}^3$ une immersion, $g$ une déformation infinitésimale isométrique de $f$, $\varphi = (f : 1 : g : -f \cdot g)$ l'immersion totalement isotrope associée et $h$ l'application vérifiant $dg = h \times df$.
$V_p^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\psi(p)$ et à $d_p\psi(u)$ pour $u \in T_pS$ pour la forme bilinéaire associée à $q$ qui est donnée par

$$B((x,s,y,t),(x',s',y',t')) = x \cdot y' + x' \cdot y + s \cdot t' + s' \cdot t$$

Comme

$$\begin{aligned} d_p\psi &= (d_pf, 0, d_pg, -d_p(f \cdot g)) = (d_pf, 0, h(p) \times d_pf, d_pf(u) \cdot (g(p) - f(p) \times h(p))) \\ &= (d_pf, 0, h(p) \times d_pf, d_pf \cdot \widetilde{g}(p)) \end{aligned}$$

on en déduit que les équations de $V_p^\perp$ en $(x,s,y,t)$ sont :

$$\begin{cases} 0 = x \cdot g(p) + f(p) \cdot y - sf(p) \cdot g(p) + t = (x - sf(p)) \cdot g(p) + f(p) \cdot y + t \\ 0 = x \cdot (h(p) \times d_pf) + df \cdot y - sdf \cdot \widetilde{g} = (-h \times x + y - s\widetilde{g}) \cdot d_pf \end{cases}$$

ou encore, en considérant un élément $v_f$ de $Im(d_pf)^\perp$,

$$\begin{cases} t = -(x - sf(p)) \cdot g(p) - f(p) \cdot y \\ y = s\widetilde{g} + \lambda v_f + h \times x \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} t = -\widetilde{g} \cdot x - \lambda v_f \cdot f \\ y = s\widetilde{g} + \lambda v_f + h \times x \end{cases}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$. Ainsi, un élément $(x,s,y,t)$ de $V_p^\perp$ vérifie $q(x,s,y,t) = \lambda v_f \cdot (x - sf)$. On en déduit que pour obtenir les deux sous-espaces totalement isotropes maximaux contenant $V_p$, il faut ajouter des équations supplémentaires permettant d'annuler $\lambda v_f \cdot (x - sf)$ car $V_p \subset V_p^\perp$. On obtient donc deux ensembles :

$$V_p^+ \begin{cases} t = -\widetilde{g} \cdot x \\ y = s\widetilde{g} + h \times x \\ (\lambda = 0) \end{cases}$$

et

$$V_p^- \begin{cases} t = -\widetilde{g} \cdot x \\ y = s\widetilde{g} + \lambda v_f + h \times x \\ 0 = v_f \cdot (x - sf) \end{cases}$$

On remarque que $V_p^+ = (h, \widetilde{g})_+$. Etudions maintenant $V_p^-$.
Dans la suite, on s'intéressera essentiellement au cas où $v_f \cdot f$ ne s'annule pas

en $p$. Dans le cas contraire, $V_p^-$ est donné par :

$$V_p^- \begin{cases} t = -\widetilde{g} \cdot x - \lambda f \cdot v_f \\ y = s\widetilde{g} + \lambda v_f + h \times x \\ 0 = v_f \cdot x \end{cases}$$

Supposons maintenant que $v_f \cdot f$ ne s'annule pas en $p$. On peut donc considérer le vecteur $f^*(p) = \frac{-v_f}{v_f \cdot f(p)}$ (qui ne dépend pas du vecteur $v_f$ choisi !). Les équations de $V_p^-$ deviennent :

$$V_p^- \begin{cases} t = -\widetilde{g} \cdot x - \lambda f \cdot v_f \\ y = s\widetilde{g} - \lambda(v_f \cdot f)f^* + h \times x \\ s = -f^* \cdot x \end{cases}$$

On peut maintenant éliminer l'équation en $t$ et l'insérer dans les autres :

$$V_p^- \begin{cases} y = s\widetilde{g} - (-\widetilde{g} \cdot x - t)f^* + h \times x \\ s = -f^* \cdot x \end{cases}$$

En réécrivant ces équations grâce au double produit vectoriel, on obtient :

$$V_p^- \begin{cases} y = (h - f^* \times \widetilde{g}) \times x + f^* t \\ s = -f^* \cdot x \end{cases}$$

Et ainsi, $V_p^- = (\widetilde{h}, f^*)_-$ où $\widetilde{h} = h - f^* \times \widetilde{g}$.

On remarque que $f^* \cdot f = -1$ et $df \cdot f^* = 0$. Ainsi, on en déduit, grâce à la proposition 1.0.4 que $(\widetilde{g}, h, f^*)$ est un triplet de Darboux et donc $A(\widetilde{g}, h, f^*) = (f^*, h - f^* \times \widetilde{g}, \widetilde{g}) = (f^*, \widetilde{h}, \widetilde{g})$

# 4 Octonions déployés

Dans les parties précédentes, nous avons étudié les immersions totalement isotropes $\varphi : S \to Q \subset P(\mathbb{R}^8)$ pour une forme quadratique $N$ de signature $(4,4)$. Il existe une structure d'algèbre naturelle sur $\mathbb{R}^8$ qui rend $N$ multiplicative. Nous allons maintenant voir comment cette structure permet de simplifier notre étude.

## 4.1 Généralités

L'algèbre des octonions déployés $\mathcal{O}$ est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^8 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ muni du produit $(a,b)\times(c,d) = (ac+db^*, a^*d+cb)$ où $(a+bi+cj+dk)^* = a-bi-cj-dk$. On notera par $\ell$ l'élément $(0,1)$. L'algèbre $\mathcal{O}$ est donc l'algèbre engendrée par $\mathbb{H}$ et $\ell$. De plus, on remarque que $\ell^2 = 1$.

Par analogie avec la construction des complexes [5], on peut définir une conjugaison $(a_0+a_1i+a_2j+a_3k+a_4\ell+a_5i\ell+a_6j\ell+a_7k\ell)^* = a_0-a_1i-a_2j-a_3k-a_4\ell-a_5i\ell-a_6j\ell-a_7k\ell$ ou encore en écrivant avec les quaternions, $(a,b)^* = (a^*,-b)$. En faisant les calculs, on remarque que la conjugaison inverse les produits i.e. $\forall x,y \in \mathcal{O}, (xy)^* = y^*x^*$, autrement dit, c'est un anti-automorphisme de $\mathcal{O}$
On peut ensuite définir la forme quadratique $N : (a,b) \in \mathcal{O} \mapsto (a,b)(a,b)^* = (a,b)^*(a,b) = (|a|^2 - |b|^2, 0) \in \mathbb{R}$. Cette forme quadratique est multiplicative et de signature $(4,4)$. Si $N(q) \neq 0$ alors $q$ est inversible d'inverse $q^{-1} = q^*/N(q)$. Dans la suite de ce texte, on dira qu'un élément $z$ est de "norme nulle" lorsque $N(z) = 0$

Cette algèbre n'est ni commutative (car $\mathbb{H}$ ne l'est pas) ni associative ($(ij)\ell = (0,k) \neq (0,-k) = i(jl)$). Mais elle vérifie les relations suivantes : Pour tout $x,y,z \in \mathcal{O}$,

$$\begin{cases} x(x^*y) = N(x)y \\ x(y^*z) + y(x^*z) = 2\langle x,y\rangle z \end{cases} \tag{6}$$

où $\langle x,y\rangle = (xy^* + yx^*)/2$ est la forme bilinéaire associée à $N$.
En conjuguant ces équations, on obtient :

$$\begin{cases} (y^*x)x^* = N(x)y^* \\ (z^*y)x^* + (z^*x)y = 2\langle x,y\rangle z^* \end{cases} \tag{7}$$

ou encore

$$\begin{cases} (yx)x = N(x)y \\ (zy)x^* + (zx)y = 2\langle x,y\rangle z \end{cases} \tag{8}$$

Grâce à ces formules et la multiplicativité de $N$, nous allons montrer deux résultats qui nous serons utiles pour la suite. Tout d'abord, nous allons montrer que la multiplication à gauche (resp. à droite) par un octonion $a$ est adjointe

5. la construction générale est appelé "construction de Cayley-Dickson"

à la multiplication à gauche (resp. à droite) par son conjugué $a^*$ puis que si $ba = 0$, $L_a \circ R_{b^*}$ et $R_b \circ L_{a^*}$ sont de rang 1.

**Lemme 4.1.1.** *Soit $a \in \mathbb{H}$. $L_a, L_{a^*}$ (resp. $R_a, R_{a^*}$) sont adjoints.*

*Démonstration.* Soit $x, y \in \mathcal{O}$.
En polarisant $\langle L_a(x), y\rangle = \langle ax, y\rangle$, on obtient :

$$\langle L_a(x), y\rangle = \frac{N(ax+y) - N(ax) - N(y)}{2}$$

Puis, par multiplicativité de $N$, on a :

$$\langle L_a(x), y\rangle = N(a)\frac{N(x+a^{-1}y) - N(x) - N(a^{-1}y)}{2}$$

$$\langle L_a(x), y\rangle = N(a)\left\langle x, a^{-1}y\right\rangle = \langle x, a^*y\rangle = \langle x, L_{a^*}(y)\rangle$$

□

**Proposition 4.1.2.** *Soit $a \in \mathcal{O}$. $L_a, L_{a^*}$ (resp. $R_a, R_{a^*}$) sont adjoints. De plus, $L_a \circ L_{a^*} = N(a)Id = R_{a^*} \circ R_a$.*

*Démonstration.* Soit $a = a_1 + \ell a_2 \in \mathcal{O}$ et $x = x_1 + \ell x_2, y \in \mathcal{O}$.
En utilisant le lemme précédent, $\ell x_1 = x_1^*\ell$ puis que $\ell x = \ell x_1 + x_2$ (et donc que $\langle x, \cdot\rangle = -\langle \ell x, \cdot\rangle$, on obtient : $\langle ax, y\rangle = \langle a_1x, y\rangle + \langle a_2^*\ell x, y\rangle = \langle x, a_1^*y\rangle + \langle \ell x, a_2y\rangle = \langle x, a_1^*y\rangle + \langle x, -a_2y\rangle = \langle x, a^*y\rangle$. Grâce aux identités (6) et (8), on a : $a(a^*x) = N(a)x = (xa^*)a$ et donc $L_a \circ L_{a^*} = N(a)Id = R_{a^*} \circ R_a$ □

**Proposition 4.1.3.** *Soient $a, b \in \mathcal{O}\setminus\{0\}$ tels que : $ba = 0$. Alors, $a(\mathcal{O}b^*) = \mathbb{R}b^*$ et $(a^*\mathcal{O})b = \mathbb{R}a^*$*

*Démonstration.* Soit $x \in \mathcal{O}$. Le résultat découle des équations (6) et (8) :

$$a(xb^*) = 2\langle a, x^*\rangle b^* - x\underbrace{(a^*b^*)}_{=0}$$

et

$$(a^*x)b = 2\langle x, b^*\rangle a^* - \underbrace{(a^*b^*)}_{=0}x$$

□

## 4.2 Symétries entre $Q_+, Q_-$ et $Q$

Le but de cette section est de montrer, grâce aux octonions déployés, le

**Théorème 4.2.1.** *Le groupe des bijections de l'union disjointe $Q \cup Q_+ \cup Q_-$ qui respectent les relations d'incidence agit sur les composantes en les permutant arbitrairement.*

Pour cela, nous allons montrer que chaque élément de $Q_+$ (resp. $Q_-$) est paramétré par un octonion déployé grâce à la multiplication à gauche (resp. à droite) puis que les relations d'incidence entre $Q, Q_+, Q_-$ se traduisent avec ses octonions. La symétrie des formules obtenues permettent de montrer le théorème.

**Lemme 4.2.2.** *Soit $a \in \mathcal{O}$ tel que $N(a) = 0$. Alors $x \in a\mathcal{O}$ si, et seulement si, $a^*x = 0$*

*Démonstration.* $\Rightarrow$ : Soit $x, y \in \mathcal{O}$ tel que $x = ay$. Alors $a^*(ax) = N(a)x = 0$
$\Leftarrow$ : Soit $x \in \mathcal{O}$ tel que $a^*x = 0$.
Soit $b \notin a^\perp$ i.e. $\langle a, b\rangle \neq 0$.

$$a(b^*x) = a(b^*x) + b(a^*x) = 2\langle a, b\rangle x$$

D'où :

$$x = a\left(\frac{b^*x}{2\langle a, b\rangle}\right) \in a\mathcal{O}$$

$\square$

Grâce à la symétrie entre les formules (6) et (8), ce résultat est vrai pour les multiples à gauche (i.e. à $\mathcal{O}a$) d'un élément de norme nulle .

**Théorème 4.2.3.** *Soit $a \in \mathcal{O}, a \neq 0, N(a) = 0$.*
*$a\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}a$ sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux (SETIM).*

*Démonstration.* On va le montrer juste pour les multiples à droite.
Comme pour tout $x \in \mathcal{O}, N(ax) = N(a)N(x) = 0$ alors $a\mathcal{O}$ est totalement isotrope ( et donc de dimension $\leq 4$).
Ensuite, comme pour tout $b \in \mathcal{O}$ tel que $\langle a, b\rangle \neq 0$ (on peut supposer $2\langle a, b\rangle = 1$),$a(b^*x) + b(a^*x) = x$ et que $a\mathcal{O}, b\mathcal{O} \subset \mathcal{O}$ alors $a\mathcal{O} + b\mathcal{O} = \mathcal{O}$.
On en déduit que :

$$8 = \dim(\mathcal{O}) \leq \dim(a\mathcal{O}) + \dim(b\mathcal{O}) \leq 8$$

Et donc :

$$\dim(a\mathcal{O}) + \dim(b\mathcal{O}) = 8$$

.
$a\mathcal{O}$ est donc un sous-espace totalement isotrope de dimension 4 ou, autrement dit, un SETIM.

$\square$

On va maintenant montrer que ce sont les seuls :

**Théorème 4.2.4.** *Tout SETIM est de la forme $a\mathcal{O}$ ou $\mathcal{O}a$*

Pour cela, on va s'appuyer sur les deux théorèmes suivants :

**Théorème 4.2.5.** *Soit $t \in O(N)$.*
*Si $t \in \mathrm{SO}(N)$ alors il existe $t_1, t_2 \in SO(N)$ telles que :*

$$\forall x, y \in \mathcal{O}, t(xy) = t_1(x)t_2(y)$$

.
*Si $t \in O^-(N)$ alors il existe $t_1, t_2 \in O^-(N)$ telles que :*

$$\forall x, y \in \mathcal{O}, t(xy) = t_1(y)t_2(x)$$

*Démonstration.* Voir le théorème 1 et ses deux corollaires dans [12] □

**Théorème 4.2.6** (Witt)**.** *Soit $F$ un sous-espace vectoriel d'un espace quadratique régulier $(E, q)$ et $u : F \to E$ une isométrie. Alors $u$ peut être prolongée en un automorphisme orthogonal de $(E, q)$*

*Démonstration.* Voir [4] chapitre 8 théorème 1.0.11 □

*Démonstration.* (du théorème 4.2.4 )
Soit $F$ un SETIM. Il existe un isomorphisme $f : a\mathcal{O} \to F$ car $a\mathcal{O}$ et $F$ sont de même dimension en tant qu'espace vectoriel.
En outre, cet isomorphisme est une isométrie car les éléments de $F$ et $a\mathcal{O}$ sont toujours de norme nulle.
Par le théorème de Witt, il existe $t \in O(N)$ qui prolonge $f$. On a donc $t(a\mathcal{O}) = F$
Par le théorème 4.2.5, si $t \in \mathrm{SO}(N)$ alors il existe $t_1, t_2 \in \mathrm{SO}(N)$ tels que :

$$F = t_1(a)t_2(\mathcal{O}) = t_1(a)\mathcal{O}$$

. Si $t \in O^-(N)$ alors il existe $t_1, t_2 \in O^-(N)$ tels que :

$$F = t_1(\mathcal{O})t_2(a) = \mathcal{O}t_2(a)$$

□

Les SETIM de $\mathcal{O}$ sont donnés par les deux familles $\{a\mathcal{O}, a \neq 0, N(a) = 0\}$ et $\{\mathcal{O}b, b \neq 0, N(b) = 0\}$.

**Proposition 4.2.7.** *$a\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}b$ ne sont égaux que dans le cas trivial $a = b = 0$*

*Démonstration.* Si $a\mathcal{O} = \mathcal{O}b$ alors pour tout $x \in \mathcal{O}$, $xb \in a\mathcal{O}$. D'après le lemme 4.2.2, $a^*(xb) = 0$ et donc $2\langle a, x\rangle b = 2\langle a^*, x^*\rangle b = a^*(xb) + x^*(ab) = x^*(ab)$. On obtient donc l'égalité $\mathcal{O}(ab) = \mathbb{R}b$. Si $ab \neq 0$ alors le membre de gauche est de dimension 4 tandis que celui de droite est de dimension 1. On en déduit que $ab = 0$ et donc $b = 0$ (car $\mathcal{O}(ab) = \mathbb{R}b$) et $a = 0$ car $a\mathcal{O} = \mathcal{O}b$
□

La démonstration du théorème 4.2.4 et cette proposition nous montrent que chacun des deux familles correspond à $Q_+$ et $Q_-$. Plus précisément, comme le graphe de l'identité est égal à $(1, 1)\mathcal{O}$ alors $Q_+ = \{a\mathcal{O}, a \neq 0, N(a) = 0\}$ et $Q_- = \{\mathcal{O}b, b \neq 0, N(b) = 0\}$. Etudions maitenant le rapport qui existe entre les

relations d'incidences entre $Q, Q_+, Q_-$ et cette écriture de leurs éléments.
Rappelons, tout d'abord, que $\Gamma_+ \in Q_+$ est incident à $\Gamma_- \in Q_-$ (et vice-versa) si leur intersection est maximale, c'est-à-dire si $\Gamma_+ \cap \Gamma_-$ est un plan projectif (ou encore que cette intersection est de dimension 3 dans $\mathbb{R}^8$) et $x \in Q$ est incident à $\Gamma_\pm \in Q_\pm$ si $x \in \Gamma_\pm$. Cette dernière relation a déjà été examiné dans le lemme 4.2.2, ie si $\Gamma_+ = a_+\mathcal{O}$ (resp. $\Gamma_- = \mathcal{O}a_-$) alors $a$ est incident à $\Gamma_\pm$ si, et seulement si, $a_+^* a = 0$ (resp. $aa_-^* = 0$). Discutons maintenant du dernier cas,

**Théorème 4.2.8.** *Soient $a\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}b$ deux SETIM. Leur intersection est maximale (i.e. de dimension 3) si, et seulement si, $ab = 0$. Les éléments de cette intersection sont alors de la forme $ay$ où $\langle y, b\rangle = 0$*

*Démonstration.* On va se concentrer sur implication réciproque (si $ab \neq 0$ alors $a\mathcal{O} \cap \mathcal{O}b = \mathbb{R}ab$, voir théorème 5 de [12]).
Supposons, donc, que $ab = 0$.
Soit $x = ay$ tel que $\langle y, b\rangle = 0$. Alors,

$$xb^* = (ay)b^* = -(ab)y^* + 2\langle y, b\rangle a = 0$$

Et donc : $x \in \mathcal{O}b$.
L'argument se remonte facilement et donc $a\mathcal{O} \cap \mathcal{O}b = a(b^\perp)$. Calculons maintenant la dimension de cet ensemble.
Soit $f : x \in b^\perp \mapsto ax$. Cette application est linéaire et donc, par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim Im(f) = \dim(b^\perp)$.
On sait que, $Im(f) = a(b^\perp)$, $\dim(b^\perp) = 7$ et que comme $\mathrm{Ker}(f)$ est inclus dans $a^*\mathcal{O}$ alors $\dim \mathrm{Ker}(f) \leq 4$. D'où,
$3 \leq \dim(a(b^\perp))(\leq 4 \text{ car } a(b^\perp) \subset a\mathcal{O}))$.
Si $\dim(a(b^\perp)) = 4$ alors $a\mathcal{O} \cap \mathcal{O}b = a\mathcal{O}$ et donc $a\mathcal{O} = \mathcal{O}b$, ce qui contredit la proposition 4.2.7 car $a \neq 0 \neq b$. □

Pour obtenir des équations plus esthétiques, nous allons considérer les ensembles de $Q_\pm$ comme paramétrées par l'octonion qui annule,à gauche ou à droite, cet élément (par exemple, on dit que $a^*$ paramètre à gauche $a\mathcal{O}$). Les équations obtenues sont alors :

$$\begin{cases} a_+a = 0 \text{ pour que } a \in a_+^*\mathcal{O} \\ aa_- = 0 \text{ pour que } a \in \mathcal{O}a_-^* \\ a_-a_+ = 0 \text{ pour que } \mathcal{O}a_-^* \text{ soit incident à } a_+^*\mathcal{O} \end{cases}$$

La dernière équation vient du fait que si $a_+^*a_-^* = 0$ alors, en conjuguant, on obtient $a_-a_+ = 0$.
La symétrie de ces formules nous permet d'obtenir le théorème 4.2.1.

## 4.3 Matrices de Zorn

Afin de faire des calculs de manière plus simple avec les octonions déployés , on va considérer le modèle des matrices de Zorn défini de la façon suivante :
La $\mathbb{R}$-algèbre (unitaire, non commutative, non associative) des matrices de Zorn

est $\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^3 \right\}$ muni de la somme et la multiplication par un scalaire composantes par composantes i.e.

$$\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda a' & x + \lambda x' \\ y + \lambda y' & b + \lambda b' \end{pmatrix}$$

et du produit :

$$\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & x' \\ y' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + x \cdot y' & ax' + b'x - y \times y' \\ ay' + by' + x \times x' & bb' + x' \cdot y \end{pmatrix}.$$

L'algèbre des matrices de Zorn est isomorphe à celle des octonions déployés grâce à l'application $\varphi : z = (a + x, b + y) \in \mathcal{O} \mapsto \begin{pmatrix} a + b & x + y \\ -x + y & a - b \end{pmatrix} \in \mathcal{Z}$ où on a identifié $bi + cj + dk$ avec le vecteur $(b, c, d)$.
On peut transporter la (pseudo)-norme de $\mathcal{O}$ à $\mathcal{Z}$ en posant $N(\varphi(z)) = q(z)$ pour $z \in \mathcal{O}$. On obtient alors que $N$ est le "déterminant" de $\mathcal{Z}$ i.e. $N\left(\begin{pmatrix} a & x \\ y & b \end{pmatrix}\right) = ab - x \cdot y$.
On va maintenant traduire les espaces $(u, v)_-$ et $(u, v)_+$ avec les matrices de Zorn :
Tout d'abord, rappelons que $(u, v)_- = \{(x, s, y, t) | x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}, y = u \times x + vt, s = -v \cdot x\}$. De ces deux égalités, on peut en obtenir deux autres : $su - (u \cdot v)x - y \times v = 0$ et $y \cdot u + tu \cdot v = 0$ i.e.
$(x, s, y, t) \in (u, v)_-$ si, et seulement si, $\begin{pmatrix} s & x \\ y & -t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & u \\ v & -u \cdot v \end{pmatrix} = 0$.
De la même façon,
$(x, s, y, t) \in (u, v)_+$ si, et seulement si, $\begin{pmatrix} u \cdot v & -u \\ -v & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} s & x \\ y & -t \end{pmatrix} = 0$
(on peut remarquer que la matrice $\begin{pmatrix} u \cdot v & -u \\ -v & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice conjuguée (par transport de celle de $\mathcal{O}$) de $\begin{pmatrix} 1 & u \\ v & -u \cdot v \end{pmatrix}$).
Plus généralement, on peut identifier les éléments $(x : s : y : t)$ de $Q$ aux annulateurs à gauche (resp. à droite) de $Z = \begin{pmatrix} s & x \\ y & -t \end{pmatrix}$ dans $Q_+$ (resp. $Q_-$) (on remarque $N(Z) = 0$ et donc ce sont bien des SETIM).On notera ces annulateurs $\mathrm{Ker}(L_Z)$ (resp. $\mathrm{Ker}(R_Z)$) où $L_Z$ est la multiplication à gauche par $Z$ et $R_Z$ est la multiplication à droite par $Z$.
On a l'analogue des formules de la section précédente dans l'algèbre des octonions déployés :

**Théorème 4.3.1.** *La relation d'incidence* $\dim(\mathrm{Ker}(L_{Z_+}) \cap \mathrm{Ker}(R_{Z_-})) = 3$ *entre* $Q_+$ *et* $Q_-$ *équivaut à* $Z_- Z_+ = 0$

# 5 Théorème de Darboux

## 5.1 Trialité différentielle

Soit $\varphi : S \to Q \subset \mathbb{R}P^7$ une immersion totalement isotrope. Comme on l'a vu dans la section précédente, on peut supposer que $Q$ est inclus dans le projectivisé de l'algèbre d'octonions déployés $\mathcal{O}$ (ou $\mathcal{Z}$).
On peut relever cette application en une application $\psi : S \to \mathcal{O} \setminus \{0\}$ de deux façons différentes :

- Soit on restreint $S$ afin que l'image de $\varphi$ soit dans $\{[x_1 : \ldots : x_8] | x_1 \neq 0\}$ et on peut identifier cette ensemble comme un sous-ensemble de $\mathcal{O} \setminus \{0\}$
- Soit on peut passer par un revêtement double :
$$\begin{tikzcd} \varphi^* S^7 \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"] & S^7 \subset \mathcal{O} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R}P^7 \end{tikzcd}$$
où $\varphi^* S^7 = \{(x, y) \in S \times S^7 | \varphi(x) = \pi(y)\}$

On remplacera $S$ par un ensemble adéquat.
Soit $V_p = \mathbb{R}\psi(p) \oplus Im(d_p\psi)$ pour $p \in S$. Dans la sous-section 3.2, on a expliqué pourquoi cet ensemble est un sous-espace totalement isotrope de dimension 3 et que son projectivisé est l'espace tangent de $\varphi(S)$ en $\varphi(p)$. Les deux sous-espaces totalement isotropes maximaux contenant $V_p$ sont de la forme $\mathrm{Ker}(L_{\psi_+(p)})$ et $\mathrm{Ker}(R_{\psi_-(p)})$. On définit ainsi des applications $\psi_\pm : S \to \mathcal{O} \setminus \{0\}$. On en déduit la

**Propriété 5.1.1** (trialité différentielle - Début)**.**

$$\psi_+\psi = 0; \psi_+ d\psi = 0 \tag{9}$$

$$\psi\psi_- = 0; (d\psi)\psi_- = 0 \tag{10}$$

$$\psi_-\psi_+ = 0 \tag{11}$$

$$(d\psi_+)\psi = 0 \tag{12}$$

On identifie ici $T_x\mathcal{O} \setminus \{0\}$ avec $\mathcal{O}$ en tout point $x \in \mathcal{O}$. Ainsi, $d_x\varphi$, $d_x\varphi_+$ et $d_x\varphi_+$ sont à valeurs dans $\mathcal{O}$

*Démonstration.* Les égalités (9) (resp. (10)) vienent du fait que pour tous $p \in S$ et $h \in T_pS$, $\psi(p), d_p\psi(h) \in \mathrm{Ker}(L_{\psi_+(p)})$ (resp. $\psi(p), d_p\psi(h) \in \mathrm{Ker}(R_{\psi_-(p)})$. L'équation 11 vient du fait que l'intersection $\mathrm{Ker}(L_{\psi_+(p)}) \cap \mathrm{Ker}(R_{\psi_-(p)})$ est de dimension 3. Pour l'équation (12), on différencie $\psi_+\psi = 0$ grâce à la formule de Leibniz :

$$0 = d(\psi_+\psi) = (d\psi_+)\psi + \psi_+ d\psi = (d\psi_+)\psi$$

□

Il nous reste plus qu'à montrer les égalités $(d\psi_-)\psi_+ = \psi_- d\psi_+ = 0$ pour avoir la trialité différentielle :

**Lemme 5.1.2.** *Soit $f : E^3 \to E$ une application trilinéaire symétrique sur les deux premières variables (i.e. en $X$ et $Y$) et antisymétriques sur les deux dernières (i.e. en $Y, Z$).*

*Démonstration.* Soit $x, y, z \in E$.
$f(x,y,z) = f(y,x,z) = -f(y,z,x) = -f(z,y,x) = f(z,x,y) = f(x,z,y) = -f(x,y,z)$. Et donc $f(x,y,z) = 0$ □

**Lemme 5.1.3.** *Soient $X, Y, Z$ trois champs de vecteurs tangents de $S$ (vus comme des dérivations). Alors,*

$$\psi_+(XY\psi) \in \mathbb{R}\overline{\psi_-}$$

*et*

$$(XY\psi)\psi_- \in \mathbb{R}\overline{\psi_+}$$

*Démonstration.* Comme $V = \mathbb{R}\psi + Im(d\psi)$ est totalement isotrope et que $X\psi, Y\psi \in Im(d\psi)$ alors $\langle Y\psi, \psi \rangle = 0$ et $\langle Y\psi, X\psi \rangle = 0$ . On en déduit que $XY\psi$ est orthogonal à $\psi$. En effet,$0 = X\langle Y\psi, \psi\rangle$ puis par l'identité de Leibniz, $\langle XY\psi, \psi\rangle + \underbrace{\langle Y\psi, X\psi\rangle}_{=0} = \langle XY\psi, \psi\rangle$.

De plus, comme $0 = X\langle Y\psi, Z\psi\rangle = \langle XY\psi, Z\psi\rangle + \langle Y\psi, XZ\psi\rangle$ et que $\langle XY\psi, Z\psi\rangle - \langle YX\psi, Z\psi\rangle = \langle [X,Y]\psi, Z\psi\rangle = 0$ alors $\langle XY\psi, Z\psi\rangle$ est trilinéaire, symétrique en $X, Y$ et antisymétrique en $Y, Z$. D'après le lemme 5.1.2, $\langle XY\psi, Z\psi\rangle$ est nulle et donc $XY\psi$ est orthogonal avec $Z\psi$.
On en déduit que que $XY\psi$ est orthogonal avec tout élément de $V$ c'est-à-dire est à valeur dans $V^\perp = (\mathrm{Ker}(L_{\psi_+}) \cap Ker(R_{\psi_-})^\perp$.
En utilisant le fait que $(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g))^\perp = Im(f^*) + Im(g^*)$ pour des applications linéaires $E \to F$ (où $f^*$ est l'adjoint de $f$) et la proposition 4.1.2, on obtient que :

$$V^\perp = Im(L^*_{\psi_+}) + Im(R^*_{\psi_-}) = Im(L_{\overline{\psi_+}}) + Im(R_{\overline{\psi_-}}) = \overline{\psi_+}\mathcal{O} + \mathcal{O}\overline{\psi_-}$$

Puis, en utilisant la proposition 4.1.3 (car $\psi_-\psi_+ = 0$) et le fait que $N(\psi_+) = N(\psi_-) = 0$, on déduit que $\psi_+(XY\psi) \in \mathbb{R}\overline{\psi_-}$ et $(XY\psi)\psi_- \in \mathbb{R}\overline{\psi_+}$.

□

**Théorème 5.1.4** (trialité différentielle - Fin)**.** $(d\psi_-)\psi_+ = \psi_- d\psi_+ = 0$

*Démonstration.* Soit $X$ un champ de vecteurs sur $S$ et montrons que $\psi_- X\psi_+$ s'annule en tout point $p \in S$.
Le cas où $X\psi_+(p) = 0$ est trivial, on peut donc supposer que $X\psi_+(p) \neq 0$.
Soit $Y$ un champ de vecteur ne s'annulant pas en $p$ tel que $\psi_+(p)(XY\psi)(p) = 0$.
D'après les identités 9, on sait que $\psi_+(Y\psi) = 0$ et donc en dérivant cette identité par $X$ en $p$, on obtient :

$$0 = X(\psi_+(Y\psi))(p) = X\psi_+(p)(Y\psi)(p) + \psi_+(p)(XY\psi)(p) = X\psi_+(p)(Y\psi)(p)$$

Ainsi, $\psi(p)$ et $Y\psi(p)$ sont dans le noyau $\mathrm{Ker}(L_{X\psi_+(p)})$ mais aussi dans $\mathrm{Ker}(R_{\psi_-(p)})$. On en déduit que leur intersection est de dimension 3 (car de dimension impaire c.f. 4.2.8) et donc $\psi_-(p)X\psi_+(p) = 0$. □

On en déduit que pour tout $p \in S$, les points du plan projectif tangent $\tau_p\varphi_+$ (resp. $\tau_p\varphi_-$,resp. $\tau_p\varphi$) sont incidents à $\varphi(p)$ et $\varphi_-(p)$ (resp. à $\varphi(p)$ et $\varphi_+(p)$, resp. $\varphi_+(p)$ et $\varphi_-(p)$)

## 5.2 Démonstration du théorème

Grâce à la trialité différentielle, on a vu que les applications $\varphi, \varphi_+$ et $\varphi_-$ jouent des rôles symétriques. De ce fait, les espaces $Q, Q_+$ et $Q_-$ jouent aussi des rôles symétriques. Ainsi, on va se donner des isomorphismes permettant de les identifier :

Tout d'abord, on peut identifier $Q, Q_+$ et $Q_-$ avec la quadrique $Q_0 = \{N = 0\}$ inclus dans $P(\mathcal{Z})$ avec les isomorphismes suivants :

$$\begin{array}{cccc} \rho & : & Q & \to & Q_0 \\ & & (x:s:y:t) & \mapsto & \left[\begin{pmatrix} s & x \\ y & -t \end{pmatrix}\right] \end{array} ; \quad \begin{array}{cccc} \rho_+ & : & Q_+ & \to & Q_0 \\ & & \rho^{-1}(\mathrm{Ker}(L_{Z_+})) & \mapsto & [Z_+] \end{array} ;$$

$$\begin{array}{cccc} \rho_- & : & Q_- & \to & Q_0 \\ & & \rho^{-1}(\mathrm{Ker}(R_{Z_-})) & \mapsto & [Z_-] \end{array} ;$$

Puis $\theta_\pm = \rho^{-1} \circ \rho$ identifie $Q_\pm$ avec $Q$.
Pour un triplet de Darboux $T = (f, g, h)$, on notera $\varphi_T$ l'application $(f : 1 : g : -f \cdot g)$.
Nous allons commencer par étudier comment les transformations $A$ et $D$ sur les triplets induit une transformation $a$ et $d$ sur les applications $\varphi$. Ensuite, grâce aux identifications faites juste précédemment, on étudiera l'itération des opérations $(\cdot)_\pm$ sur $\varphi$. Ce qui nous permettra de décrire le groupe engendré par $a$ et $d$.

**Lemme 5.2.1.** *Soit $T = (f, g, h)$ un triplet de Darboux avec $f$ une immersion. Alors,*

$$\theta_+ \circ (\varphi_T)_+ = (h : -h \cdot \widetilde{g} : \widetilde{g} : 1) = c \circ \varphi_{A(T)} \tag{13}$$

*où $c : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ est l'application définie par : $c(x : s : y : t) = (x : t : y : s)$*

*Démonstration.* $c$ est la transformation projective induite par $\rho$ par la conjugaison de $\mathcal{Z}$ :

$$\begin{aligned} c(x:s:y:t) &= \rho^{-1} \circ \overline{\cdot} \circ \rho(x:s:y:t) = \rho^{-1}\overline{\begin{pmatrix} s & x \\ y & -t \end{pmatrix}} \\ &= \rho^{-1}\begin{pmatrix} -t & -x \\ -y & s \end{pmatrix} = (x:t:y:s) \end{aligned}$$

On sait,d'après la calcul de $(\varphi_T)_+ (= (h, \widetilde{g})_+)$ dans la sous-section 3.2.1 et l'identification par $\rho$ de $(a, b)_+$ avec $\mathrm{Ker}(L_Z)$ où $Z = \begin{pmatrix} a \cdot b & -a \\ -b & 1 \end{pmatrix}$ vu dans la section

4.3 , que :

$$\rho_+((\varphi_T)_+) = \begin{pmatrix} h\cdot\widetilde{g} & -h \\ -\widetilde{g} & 1 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que :

$$\begin{pmatrix} h\cdot\widetilde{g} & -h \\ -\widetilde{g} & 1 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & h \\ \widetilde{g} & h\cdot\widetilde{g} \end{pmatrix}} = \rho(h:1:\widetilde{g}:h\cdot\widetilde{g}) = \rho(c\circ\varphi_{A(T)})$$

On obtient le résultat voulu en composant avec $\rho^{-1}$ à gauche.

□

**Proposition 5.2.2.** *Il existe des applications $a$ et $d$ de l'ensemble des immersions totalement isotropes $\varphi : S \to Q$ vers les applications totalement isotropes de $S$ dans $Q$, telles que si $T = (f, g, h)$ est un triplet de Darboux pour lequel $\varphi_T$ est une immersion (i.e. $f$ est une immersion), alors $a(\varphi_T) = \varphi_{A(T)}$ et que si, de plus, $D(T)$ est défini, alors $d(\varphi_T) = \varphi_{D(T)}$*

*Démonstration.* $a = c\circ\theta_+\circ(\cdot)_+$ et $d : (x : s : y : t) \mapsto (y : s : x : t)$ conviennent. □

Dans la suite, on identifiera $Q$ et $Q_\pm$ et sous-entendra les applications $\theta_\pm$.

**Proposition 5.2.3.** *Si $\varphi : S \to Q$ est une immersion totalement isotrope telle que $\varphi_+$ soit une immersion, on a $\varphi_{++} = \varphi_-$ et $\varphi_{+-} = \varphi$. De même, si $\varphi_-$ est une immersion, on a $\varphi_{--} = \varphi_+$ et $\varphi_{-+} = \varphi$*

*Démonstration.* D'après la trialité différentielle de la propriété 5.1.1 et du théorème 5.1.4, $\psi_+, d\psi_+ \in \mathrm{Ker}(L_{\psi_-}) \cap \mathrm{Ker}(R_\psi)$. Ce dernier ensemble est un espace vectoriel totalement isotrope de dimension 3 car $\psi\psi_- = 0$. On en conclut que $(\varphi_+)_+ = \varphi_-$ et $(\varphi_+)_- = \varphi$. En effet, $V := \mathrm{Ker}(L_{\psi_-}) \cap \mathrm{Ker}(R_\psi)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(L_{\psi_-})$ et $\mathrm{Ker}(R_\psi)$ ; ces deux espaces sont les deux SETIM contenant $V$. $\mathrm{Ker}(L_{\psi_-})$ est le SETIM correspondant à un rotation de SO(4) et $\mathrm{Ker}(R_\psi)$ est le SETIM correspondant à un rotation de $O^-(4)$.
Le même raisonnement fonctionne pour $\varphi_-$. □

De la même, on montre que si $\sigma$ est un anti-automorphisme de $\mathcal{Z}$ (c'est-à-dire $\forall x, y \in \mathcal{Z}, \sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$ alors $(\sigma\circ\varphi)_+ = \sigma\circ\varphi_-$ et si c'est un automorphisme, $(\sigma\circ\varphi)_+ = \sigma\circ\varphi_+$. Maintenant, on peut montrer le

**Théorème 5.2.4** (Darboux)**.** *La transformation $(D\circ A)^6$ est l'identité sur l'ensemble des immersions totalement isotropes $\varphi : S \to Q$ telles que $\varphi_\pm$ sont aussi des immersions*

*Démonstration.* Soit $T = (f, g, h)$ un triplet de Darboux telle que $(\varphi_T)_\pm$ sont aussi des immersions.
On notera $\varphi_T$ par $\varphi$.
En utilisant les propositions 5.2.2 et 5.2.3 et la remarque que l'on a faite avant l'énoncé du théorème,on obtient :

$$d\circ a(\varphi) = d\circ c\circ\varphi_+; (d\circ a)^2(\varphi) = \varphi_-; (d\circ a)^3(\varphi) = d\circ c\circ\varphi$$

$$(d \circ a)^4(\varphi) = \varphi_+; (d \circ a)^5(\varphi) = d \circ c \circ \varphi_-; (d \circ a)^6(\varphi) = \varphi$$

□

Ainsi le groupe engendré par $a$ et $d$ est le groupe diédral à 12 éléments. Les six autres éléments sont :

$$a(\varphi) = c \circ \varphi_+; a \circ d \circ a(\varphi) = d \circ \varphi_-; a \circ (d \circ a)^2(\varphi) = c \circ \varphi;$$
$$a \circ (d \circ a)^3(\varphi) = \varphi_+; a \circ (d \circ a)^4(\varphi) = c \circ \varphi_-; d = a \circ (d \circ a)^5(\varphi) = d \circ \varphi;$$

# 6 Dégénérescences

Dans les sections précédentes, nous avons étudié le cas où les applications $\varphi_+$ et $\varphi_-$ sont des immersions i.e. de rang 2. Dans cette section, nous allons voir l'interprétation géométrique du cas où il existe un ouvert de $S$ où ces applications sont de rang strictement inférieur à 2.
Dans la suite, on va remplacer $S$ par cet ouvert.

## 6.1 $\varphi_\pm$ de rang 0

On a vu, dans la sous-section 3.2.1, que $\varphi_+ = (h, \widetilde{g})$ et sous réserve d'existence, $\varphi_- = (\widetilde{h}, f^*)_-$ où $\widetilde{g} = g - h \times f$, $f^* = \frac{-v_f}{v_f \cdot f}$ et $\widetilde{h} = h - f^* \times \widetilde{g}$.
Ainsi, demander que $\varphi_+$ soit de rang 0 (i.e. est constante) revient à demander que $h$ et $g - h \times f$ soit constante ou autrement dit, que $g = a \times f + b, a, b \in \mathbb{R}^3$.
De la même façon, $\varphi_-$ est de rang 0 si, et seulement si, $\widetilde{h} = h - f^* \times \widetilde{g}$ et $f^*$ sont constantes. On remarque que si $f^*$ est constante alors $Im(d_p f)$ ne dépend pas de $p$. De ce fait, l'image de $f$ est inclus dans ce plan et $g$ est un champ de vecteur normal à ce plan.

## 6.2 $\varphi_+$ de rang 1

Supposons maintenant que la différentielle de $\varphi_+ = (h, \widetilde{g})$ (c.f la sous-section 3.2.1) est de rang 1 en tout point de $S$. Cela revient à demander que $h$ soit de rang 1 car $d\widetilde{g} = h \times df$. Comme les espaces $\mathrm{Ker}(d_p h)$ sont de rang constant alors $\mathrm{Ker}(dh) := \bigcup_{x \in S} \{x\} \times \mathrm{Ker}(d_x h)$ est un sous-fibré de $TS$ (voir le théorème 10.34 de [9]). Ainsi, dans des coordonnées locales $(x_1, x_2)$ appropriées, $\partial_1$ engendre $\mathrm{Ker}(dh)$. On en déduit que

$$\forall p \in S, \partial_1 h(p) = d_p h(\partial_1) = 0$$

et donc comme $\partial_1 \widetilde{g} = h \times df$,

$$\partial_1 \widetilde{g} = \partial_h = 0.$$

De plus, grâce à la formule du lemme 1.0.3,

$$\partial_1 f \times \partial_2 h = \partial_2 f \times \partial_1 h = 0.$$

Ainsi, $h$ ne dépend que de $x_2$ (on notera dorénavant $h(x_2)$ au lieu de $h(x_1, x_2)$) et $\partial_1 f$ est de la forme $\lambda(x_1, x_2) h'(x_2)$ (car en tout point $(x_1, x_2)$, $\partial_1 f(x_1, x_2)$ est colinéaire avec $h'(x_2) = \partial_2 h(x_1, x_2)$) où $\lambda$ est une fonction qui ne s'annule pas. On peut supposer $\lambda \equiv 1$ quitte à changer les coordonnées locales choisies. En effet, si on pose $x_1' = \int_0^{x_1} \lambda(t, x_2) x_1$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1'} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2'} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} = \lambda(x_1, x_2) \frac{\partial f}{\partial x_1'}$$

On a donc $\partial_1 f = h'$ et en intégrant en $x_1$, on obtient :

$$f(x_1, x_2) = f_0(x_2) + x_1 h'(x_2) \tag{14}$$

De la même façon, comme $dg = h \times df$ alors $\partial_1 g = h \times \partial_1 f = h \times h'$ et on obtient, en intégrant cette égalité en $x_1$ :

$$g(x_1, x_2) = g_0(x_2) + x_1 h(x_2) \times h'(x_2) \tag{15}$$

Ainsi, $f$ et $g$ sont réglées.
On en déduit

$$\varphi(x_1, x_2) = \mathbb{R}(\psi_1(x_2) + x_2 \psi_2(x_2)) \tag{16}$$

où $\psi_1 = (f_0, 1, g_0, -f_0 \cdot g_0)$ et $\psi_2 = (h', 0, h \times h', -(f_0, h, h') - g_0 \cdot h')$
Autrement dit,

**Théorème 6.2.1.** *$\varphi(S)$ est réglée*

De plus, on peut remarquer que pour tout $x_2$ tel que

$$V(x_2) = \mathrm{Vect}(\psi_1(x_2), \psi_2(x_2), \psi_1'(x_2), \psi_2'(x_2)$$

soit de dimension 4 alors $V(x_2) = \varphi_+(x_2) = (h(x_2), \widetilde{g}(x_2))_+$. Par exemple, on a $(h, \widetilde{g})_+(f_0, 1) = (g_0, -f_0 \cdot g_0)$. En effet,

$$h \times f_0 + \widetilde{g} = h \times (f - x_1 h') + g - h \times f = g - x_1 h \times h' = g_0$$

et

$$\begin{aligned} -f_0 \cdot g_0 &= -(f - x_1 h') \cdot (g - x_1 h') = -f \cdot g + x_1 + x_1 f \cdot (h \times h') + x_1 g \cdot h' \\ &= -(f - x_1) h' \cdot (g - h \times f) = -f_0 \cdot \widetilde{g} \end{aligned}$$

## 6.3 $\varphi_-$ de rang 1

On va maintenant supposer que $\varphi_-$ est de rang 1 en tout point $p \in S$.
Quitte à translater, on peut supposer que l'origine n'appartient pas aux plans affines tangents de $f(S)$. Ainsi, on a vu, dans la sous-section 3.2.1, que $\varphi_- = (\widetilde{h}, f^*)_-$.Comme $\varphi_-$ est de rang 1 et $d\widetilde{h} = \widetilde{g} \times df^*$ alors $df^*$ est de rang 1 et de la même façon que dans le paragraphe précédent, on peut trouver des coordonnées locales pour que $\partial_1$ engendre $df^*$ et donc $f^*$ ne dépend que de $x_2$.
On a vu dans le paragraphe 3.2.1 que $f^* \cdot f = -1$ et $f^* \cdot df = 0$ . De cela, on déduit :

$$0 = d(f \cdot f^*) = df^* \cdot f + f^* \cdot df = df^* \cdot f$$

et, en particulier,

$$0 = f^{*\prime} \cdot f$$

Puis, par le double produit vectoriel,

$$f \times (f^* \times f^{*\prime}) = (f \cdot f^{*\prime}) f^* - (f \cdot f^*) f^{*\prime} = f^*(x_2)$$

Ainsi, en dérivant selon $x_1$,

$$\partial_1 f \times (f^* \times f^*) = 0$$

En refaisant le calcul du paragraphe précédent, on obtient

$$f(x_1, x_2) = f_0(x_2) + \mu(x_1, x_2) f^*(x_2) \times (f^*)'(x_2) \tag{17}$$

où $\mu$ est une fonction telle que $\partial\mu \neq 0$ (car $f$ est une immersion) et $f_0$ une application telle que $f^* \cdot f = -1$ et $f^* \cdot f_0' = 0$.
Cette expression de $f$ et le fait que $f^* \in Im(df)^\perp$ nous permet de voir que l'espace tangent à $f(S)$ en $(x_1, x_2)$ a pour équation

$$f^*(x_2) \cdot x = f^*(x_2) \cdot f(x_1, x_2) = f^*(x_2) \cdot f_0(x_2) = -1$$

Ces plans tangents ne dépend que de $x_2$. On en déduit

**Théorème 6.3.1.** *$f(S)$ est une surface développable*

Autrement dit, $f(S)$ est l'enveloppe d'une famille à un paramètre de plans. Ensuite, comme $d\widetilde{h} = \widetilde{g} \times df^*$ alors en évaluant en $\partial_1$, on obtient que $\partial_1 \widetilde{h} = 0$ et grâce au lemme 1.0.3,

$$\partial_1 \widetilde{h} \times \partial_2 f^* = \partial_2 \widetilde{h} \times \partial_1 f^* = 0$$

et de ce fait, comme dans les cas précédents,

$$\widetilde{g}(x_1, x_2) = \widetilde{g_0}(x_2) + \lambda(x_1, x_2) f^{*\prime}(x_2)$$

Cette égalité et $\widetilde{h} = h - f^* \times \widetilde{g}$ nous donne :

$$h(x_1, x_2) = h_0(x_2) + \lambda(x_1, x_2) f^*(x_2) \times f^{*\prime}(x_2) \tag{18}$$

où $h_0 = \widetilde{h} + f^* \widetilde{g_0}$.
En injectant dans l'égalité $g = \widetilde{g} + h \times f$ et en utilisant les égalités $f^* \cdot f_0 = -1$ et $f*' \cdot f_0 = 0$, on obtient :

$$g(x_1, x_2) = g_0(x_2) + \mu(x_1, x_2) h_0(x_2) \times (f^*(x_2) \times f^{*\prime}(x_2)) \tag{19}$$

Comme dans le paragraphe précédent, $\varphi = \mathbb{R}(\psi_1 + x_1\psi_2)$ est réglée et si $V(x_2)$ est de dimension 4 alors $V(x_2) = \varphi_-(x_2)$. Cependant dans la cas où $\varphi_-$ est de rang 1, on peut dire un peu plus :

**Théorème 6.3.2.** *Il existe une transformation projective entre $h$ et $f$*

*Démonstration.* D'après le lemme 1.0.3, $\partial_1 h \times \partial_2 f = \partial_2 h \times \partial_1 f$. En injectant les égalités (17) et (18) dans chacun des membres, on obtient

$$\partial_1 h \times \partial_2 f = (\partial_1 \lambda f^* \times f^{*\prime}) \times (f_0' + \partial_2 \mu f^* \times f^{*\prime} + \mu f^*(x_2) \times f^{*\prime\prime})$$

$$\partial_2 h \times \partial_1 f = (h_0' + \partial_2 \lambda f^* \times f^{*\prime} + \lambda f^* \times f^{*\prime\prime}) \times (\partial_1 \mu f^* \times f^{*\prime})$$

Calculons chaque partie du produit séparément grâce au double produit vectoriel :

$$(f^*(x_2) \times f^{*\prime}) \times (f^*(x_2) \times f^{*\prime\prime}(x_2) = (f^*, f^{*\prime}, f^{*\prime\prime})f^*$$

$$(f^* \times f^{*\prime}) \times f_0' = -(f^{*\prime} \cdot f_0')f^*$$
$$(f^* \times f^{*\prime}) \times h_0' = -(f^* \cdot h_0')f^*$$

Et grâce à l'égalité $d\widetilde{h} = \widetilde{g} \times df^*$,

$$f^* \cdot h_0' = 0$$

Posons $a = (f^*, f^{*\prime}, f^{*\prime\prime}), b = f_0' \cdot f^{*\prime}$ et $c = h_0' \cdot f^{*\prime}$.
On en déduit l'égalité :

$$\partial_1 \lambda(-bf^*) + \partial_1 \lambda \mu a f^* = c\partial_1 \mu f^* - a\lambda \partial_1 \mu f^*$$

ou encore

$$a\partial_1(\lambda\mu) = b\partial_1\lambda + c\partial\mu$$

Ensuite, en intégrant par rapport à $x_1$, on a

$$a\lambda\mu = b\lambda + c\mu + d$$

où $d$ est une fonction en $x_2$
On en déduit que

$$\lambda = \frac{c\mu + d}{a\mu + b}$$

ce qui est la transformation voulue □

On va finir cette section sur un théorème de non-dégénérescence de $\varphi_+$ et $\varphi_-$ :

**Théorème 6.3.3.** *Supposons que $S$ est une surface compacte sans bord et que $f : S \to \mathbb{R}^3$ et $g : S \to \mathbb{R}^3$ soient des fonctions analytiques (avec $g$ une déformation infinitésimale isométrique.*
*Alors l'immersion totalement isotrope $\varphi = (f : 1 : g : -f \cdot g) : S \to Q$ est telle que $\varphi_-$ est de rang 2 et si $\varphi_+$ n'est pas constante alors $\varphi_+$ est aussi de rang 2*

*Démonstration.* S'il existe un ouvert $U$ tel que $f(U)$ est inclus dans un plan $P$ alors par analycité de $f$, $f$ est à valeurs dans ce plan. Ainsi $f : S \to P$ est un difféomorphisme mais $f(S)$ est compacte donc à bord (car de même dimension que $P$) mais pas $S$.
$f(S)$ ne peut pas être réglée car elle ne peut pas contenir une droite à cause de sa compacité. Ainsi, grâce aux calculs de cette section, $\varphi_+$ et $\varphi$ sont de rang 2. □

# A Espaces projectifs

## A.1 Définitions

On considérera ici seulement des espaces projectifs sur $\mathbb{R}$ mais on peut en définir pour n'importe quel corps (non nécessairement commutatif).

**Définition A.1.1.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$.
On appelle espace projectif associé à $E$ l'espace quotient $E \setminus \{0\}/\mathcal{R}$ où

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, y = \lambda x.$$

On le note $P(E)$

On peut voir $P(E)$ comme l'ensemble des droites vectorielles de $E$. En effet, les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont ces droites vectorielles.
Si $E = \mathbb{R}^{n+1}$, l'espace projectif $P(\mathbb{R}^{n+1})$ est noté $P^n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}P^n$.

**Notation A.1.2.** La classe d'équivalence de $(x_0, \ldots, x_n)$ est noté $[x_0, \ldots, x_n]$.

## A.2 Topologie de l'espace projectif

On munit $\mathbb{R}P^n$ de la topologie quotient. Autrement dit, $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}P^n$ si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$ est la projection canonique, qui est continue par définition de la topologie quotient.

**Proposition A.2.1.** *$\mathbb{R}P^n$ est compact et connexe par arcs.*

*Démonstration.* Comme $\pi(S^n) = \mathbb{R}P^n$ et que la sphère $S^n$ est (quasi-)compacte et connexe par arcs. alors $\mathbb{R}P^n$ est quasi-compact et connexe par arcs (car $\pi$ est continue).
Il faut maintenant montrer que $\mathbb{R}P^n$ est séparé.
Soient $x \neq y \in \mathbb{R}P^n$ et $\alpha$ et $\beta$ tels que $|\alpha| = |\beta|, x = \pi(\alpha)$ et $y = \pi(\beta)$ Par construction, les ensembles saturés de $B(\alpha, |\alpha - \beta|/3)$ et $B(\beta, |\alpha - \beta|/3)$ sont disjoints et donc les ouverts $\pi(B(\alpha, |\alpha - \beta|/3)) \ni x$ et $\pi(B(\beta, |\alpha - \beta|/3)) \ni y$ sont disjoints

□

On peut aller un peu plus loin en montrant que $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe à $S^n/\{\pm Id\}$

## A.3 Structure de variété de l'espace projectif

Soient $U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{R}P^n | x_i \neq 0\}$, $0 \leq i \leq n$, des ouverts de $\mathbb{R}P^n$ et $\varphi_i : [x_0 : \ldots : x_n] \in U_i \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \in \mathbb{R}^n$.

**Théorème A.3.1.** *$(U_i, \varphi_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un atlas de $\mathbb{R}P^n$.*

*Démonstration.* Soit $i \in [\![0, n]\!]$.
$\varphi_i$ est une bijection de réciproque

$$\varphi_i^{-1} : (x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto [x_0, \ldots, 1, \ldots, x_n] \in U_i$$

(le 1 est en $i$ème position).
Comme

$$\forall (x_0, \ldots, x_n) \in \pi^{-1}(U_i), \varphi_i \circ \pi(x_0, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right),$$

on en déduit que $\varphi_i \circ \pi$ est continue et donc $\varphi_i$ aussi.
$\varphi_i^{-1} = \pi(dx_0, \ldots, 1, \ldots, dx_n)$ où $dx_j(x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) = x_j$, $i \neq j$. On en déduit que $\varphi_i^{-1}$ est aussi continue et donc $\varphi_i$ est un homéomorphisme.
De plus, on voit que, pour tout $i \neq j$,

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x_0, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{1}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

pour $(x_0, \ldots, x_n) \in \varphi_j(U_i \cap U_j)$ et donc que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\varphi_j(U_i \cap U_j))$ (car c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas) . $\square$

**Corollaire A.3.2.** *Muni de l'atlas* $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$, $\mathbb{R}P^n$ *est une variété différentielle.*

# B Théorème de Darboux-Sauer

**Définition B.0.1.** On dit qu'une immersion $f : S \to \mathbb{R}^3$ est infinitésimalement rigide si toute déformation infinitésimale $g$ est un déplacement infinitésimale $g$ est un déplacement infinitésimal $g = a \times f + b$, $a, b \in \mathbb{R}^3$

**Lemme B.0.2.** *Une immersion $f : S \to \mathbb{R}^3$ est infinitésimalement rigide si, et seulement si, toute immersion totalement isotrope $\varphi : S \to Q$ relevant $f$, i.e. telle que $\pi \circ \varphi = f : S \to \mathbb{R}^3$ est telle que $\varphi_+$ est constante.*

*Démonstration.* $\Rightarrow$: Fait en 6.1
$\Leftarrow$: Soit $\varphi = (f : 1 : g : -f \cdot g) : S \to Q$ telle que $df \cdot dg = 0$ et $\varphi_+$ est constante.
Alors il existe $h : S \to \mathbb{R}^3$ telle que $dg = h \times df$.
Grâce à la formule du produit triple,

$$d\varphi = (df : 0 : dg : -df\dot{g} - dg \cdot f) = (df : 0 : h \times dg : -df \cdot (g + f \times h))$$

On en déduit que $d\varphi = (h, g + f \times h)_+(df, 0)$. Et donc $\varphi_+ = (h, g + f \times h)_+$. Comme $\varphi_+$ est constante alors $h$ et $g + f \times h$ aussi, c'est-à-dire, $g = -h \times f + b$, $b \in \mathbb{R}^3$. □

**Théorème B.0.3** (Darboux-Sauer)**.** *La rigidité infinétésimale est projectivement invariante : si $f : S \to \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}P^3$ est une immersion, et $A \in \mathrm{PGL}_4(\mathbb{R}) = Aut(\mathbb{R}P^3)$ est une transformation projective telle que $A \circ f(S) \subset \mathbb{R}^3$, alors $A \circ f$ est infinitésimalement rigide si, et seulement si, $f$ l'est.*

*Démonstration.* On peut commencer par remarquer qu'il suffit de montrer qu'un sens car il suffit de remplacer $A$ par $A^{-1}$ pour montrer l'autre sens.
$\mathrm{PGL}_4(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}P^7$ par

$$A \cdot (u : v) = (Au : {}^tA^{-1}v)$$

où $u, v \in \mathbb{R}^4, A \in \mathrm{PGL}_4(\mathbb{R})$.
Cette action laisse stable $Q$ :

$$\forall (u : v) \in Q, \forall A \in \mathrm{PGL}_4(\mathbb{R}), q(A \cdot (u : v)) = q(Au : {}^tA^{-1}v) = Au \cdot {}^tA^{-1}v = u \cdot v = 0$$

Elle laisse stable aussi $P_1 = P(\mathbb{R}^4 \oplus 0)$ et $P_2 = P(0 \oplus \mathbb{R}^4)$.
Cette action commute avec $\pi_1 : Q \setminus P_2 \to P_1$ (sur $Q \setminus P_2$) :

$$\forall (u : v) \in Q, \forall A \in \mathrm{PGL}_4(\mathbb{R}), \pi_1(A \cdot (u, v)) = (Au : 0) = A(u \oplus 0) = A(\pi(u : v)).$$

Par conséquent, pour $A \in \mathrm{PGL}_4(\mathbb{R})$ et $\varphi$ une immersion totalement isotrope relevant $f$ :

$$\pi_1(A \circ \varphi) = A(\pi_1(\varphi)) = A \circ f$$

i.e. $A \circ \varphi$ relève $A \circ f$
Comme, de plus, pour tout $p \in S$,

$$d_p(A \circ \varphi) = d_{\varphi(p)}A \circ d_p\varphi = A \circ d_p\varphi,$$

alors $\tau_p(A \circ \varphi) = A\tau_p\varphi$ et donc $A(\varphi_+) = (A \circ \varphi)_+$, ce qui est le résultat voulu. □

# C Plongement de Plücker

Dans cette annexe, on va expliquer comment réaliser la grassmannienne comme variété algébrique projective.

## C.1 Algèbre extérieure

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $k$.
On appelle $p$ème puissance extérieure de $E$ l'espace vectoriel $\bigwedge^p E$,quotient de $E^{\otimes p}$ par le sous-espace vectoriel

$$\mathcal{Z}_p = \text{Vect}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p | x_i \in E, \exists m \neq n, x_m = x_n)$$

(par convention, $\bigwedge^0 E = k$).
On note $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ la classe d'équivalence de $x_1 \otimes \ldots \otimes x_p$.
Le passage au quotient conserve les propriétés d'associativité et de $p$-linéarité.
De plus, $\forall u, v \in E, u \wedge v = -v \wedge u$ et donc

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_r, u_1 \wedge \ldots \wedge u_r = \varepsilon(\sigma) u_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge u_{\sigma(r)}$$

On appelle algèbre extérieure la somme directe des puissances extérieures :

$$\bigwedge^* E := \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \bigwedge^p E.$$

On munit $\bigwedge^* E$ d'une structure d'algèbre graduée grâce au produit :

$$(x_1 \wedge \ldots x_p, y_1 \wedge \ldots \wedge y_q) \in \bigwedge^p E \times \bigwedge^q E \mapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_q \in \bigwedge^{p+q} E$$

**Lemme C.1.1.** $\mathcal{Z}_p = \text{Vect}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_p | x_i \in E, \{x_1, \ldots, x_p\}$ *est une famille liée* )

*Démonstration.* Posons $V$ le membre à droite de l'égalité.
On a clairement $\mathcal{Z}_p \subset V$.
Réciproquement, soit $x_1 \wedge \ldots \wedge x_p \in V$ i.e. $\{x_1, \ldots, x_p\}$ est liée. On a donc un $i \in [\![1, n]\!]$ et des $\lambda_j \in k, j \neq i$ tel que $x_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j$ et donc : $x_1 \wedge \ldots \wedge x_i \wedge \ldots \wedge x_p = \sum_{j \neq i} \lambda_j x_1 \wedge \ldots \wedge x_j \wedge \ldots \wedge x_p \in \mathcal{Z}_p$ □

Cela nous permet de voir que $\bigwedge^p E = \{0\}$ si $p > dim(E)$

**Proposition C.1.2.** *Soit* $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *une base de* $E$.
*Pour* $p \leq n$,$\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}, 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n\}$ *est une base de* $\bigwedge^p E$.

*Démonstration.* Comme la famille $\{e_1 \otimes \ldots \otimes e_p | e_i \in \mathcal{B}\}$ est une base de $E^{\otimes p}$ alors le passage au quotient fait que l'espace quotient a comme base $\{e_1 \wedge \ldots \wedge e_p | e_i \in \mathcal{B}, i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j\}$. En ordonnant les $e_i$ ; on obtient le résultat. □

**Corollaire C.1.3.** $\dim_k \bigwedge^p E = \binom{\dim E}{p}$

En particulier, $\dim_k \bigwedge^{\dim E} E = 1$ (cela permet de définir le déterminant)

**Corollaire C.1.4.** *Soient* $\{e_1, \ldots, e_m\}, \{f_1, \ldots, f_m\}$ *deux familles libres d'éléments de* $E$*. Si* $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_m)$ *alors* $e_1 \wedge \ldots \wedge e_m$ *et* $f_1 \wedge \ldots \wedge f_m$ *sont colinéaires.*

*Démonstration.* Soit $W = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$. Alors $e_1 \wedge \ldots \wedge e_m$, $f_1 \wedge \ldots \wedge f_m \in \bigwedge^k W$. Ce dernier ensemble étant de dimension 1, $e_1 \wedge \ldots \wedge e_m$ et $f_1 \wedge \ldots \wedge f_m$ sont colinéaires.

□

## C.2 Plongement de Plücker

**Définition C.2.1** (Plongement de Plücker)**.** On appelle plongement de Plücker l'application $\psi_{r,n} : G(r, n) \to P(\bigwedge^r k^n)$ qui envoie un sous-espace vectoriel $W$ de dimension $r$ de $k^n$ de base $e_1, \ldots, e_r$ sur $[e_1 \wedge \ldots \wedge e_r]$

**Corollaire C.2.2.** $\psi_{r,n}$ *ne dépend pas du choix de la base*

On va maintenant montrer l'injectivité de $\psi_{r,n}$ afin de justifier l'appellation "plongement"

**Proposition C.2.3.** *Soit* $W \in G(r, n)$ *et* $\{e_1, \ldots, e_r\}$ *une base de* $W$*. Alors* $W = \{x \in k^n | x \wedge (e_1 \wedge \ldots \wedge e_r) = 0\}$

*Démonstration.* Posons $E_W = \{x \in k^n | x \wedge (e_1 \wedge \ldots \wedge e_r) = 0\}$. On remarque que $E_W$ est un espace vectoriel et que $W \subset E_W$.
Soit $x \in E_W$ ie $x \wedge (e_1 \wedge \ldots \wedge e_r) = 0$ et donc $\{x, e_1, \ldots, e_r\}$ est une famille liée. Comme $\{e_1, \ldots, e_r\}$ est une base alors $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) = W$ □

L'injectivité de $\psi_{r,n}$ en découle immédiatement.

La réciproque de la proposition C.2.3 est vraie :

**Proposition C.2.4.** *Soit* $\Lambda \in \bigwedge^r k^n$ *tel que* $W = \{x \in k^n | \Lambda \wedge x = 0\}$ *soit de dimension* $r$*. Alors* $\psi_{r,n}(W) = [\Lambda]$

*Démonstration.* Soit $\{e_1, \ldots, e_r\}$ une base de $W$. On peut compléter cette base en un base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $k^n$.
On peut décomposer $\Lambda$ sur la base associée de $\bigwedge^r k^n$ :

$$\Lambda = \sum_p \lambda_p e_{i_{1p}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{rp}}$$

Comme $\Lambda \wedge e_i = 0$ alors $\Lambda = \sum_{p, i_{jp} \neq 0} \lambda_p e_1 \wedge e_{i_{1p}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{rp}}$.
Comme les $e_1 \wedge e_{i_{1p}} \wedge \ldots \wedge e_{i_{rp}}$ forment une famille libre alors les $\lambda_p$ correspondant sont nulles. En itérant ce processus, on trouve que les scalaires correspondant aux multi-vecteurs contenant $e_j$ pour $j > r$ sont nuls et donc $\Lambda = \lambda e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$, ce qu'il fallait démontrer. □

### C.2.1 L'image de $\psi_{r,n}$ comme variété algébrique projective

Nous allons maintenant montrer que $\psi_{r,n}(G(r,n))$ est donnée par des équations polynomiales . Pour cela, nous allons introduire quelques notations :

**Notation C.2.5.** On note $I(r,n)$ l'ensemble des sous-ensembles de $[\![1,n]\!]$ à $r$ éléments que l'on aura ordonné.
Pour tout $I=\{i_1<\ldots<i_r\}\in I(r,n)$ et $P\in \mathrm{GL}_n(k)$, $P\cdot[e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_r}]=[Pe_{i_1}\wedge\ldots\wedge Pe_{i_r}]$. On étend l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ en tout point de $\bigwedge^r k^n$, linéairement.
On note, de la même façon, l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur la Grassmanienne $G(r,n)$ données par : $P\cdot W=P(W)$.
Pour tout $I,J\subset[\![1,n]\!]$, on note le nombre d'inversion $\iota(I,J)=\{(i,j)\in I\times J|i>j\}$.
Enfin, les polynômes de Plücker $\mathscr{P}_{I,J}$, avec $I\in I(r-1,n)$ et $J=\{j_1<\ldots<j_r\}\in I(r+1,n)$, sont données par :

$$\mathscr{P}_{I,J}(X)=\sum_{i,j_i\notin I}(-1)^{i+\iota(I,j_i)}X_{I\cup\{j_i\}}X_{J\setminus\{j_i\}}$$

où $X=(X_K|K\in I(r,n))$ sont les indéterminées.

**Lemme C.2.6.** *Soient $W\in G(r,n)$, $\{v_1,\ldots,v_r\}$ une base de $W$ et $P=(v_1,\ldots,v_r)\in\mathcal{M}_{n,r}(k)$. Alors*

$$\psi_{r,n}(W)=\sum_{K=\{k_1<\ldots<k_r\}}\Delta_{K,[\![1,r]\!]}(P)e_{k_1}\wedge\ldots\wedge e_{k_r},$$

*où pour $P=(p_{i,j})$, $\Delta_{I,J}(P)$ est le mineur* $\det((p_{i,j})_{i\in I,j\in J})$

*Démonstration.* Posons $v_i=(v_i^{(1)},\ldots,v_i^{(n)})$ pour tout $1\leq i\leq n$.

$$v_1\wedge\ldots\wedge v_r=\sum_{k_1=1}^{n}\ldots\sum_{k_r=1}^{n}v_1^{(k_1)}\ldots v_r^{(k_r)}e_{k_1}\wedge\ldots\wedge e_{k_r}$$

Par antilinéarité du produit extérieur,

$$v_1\wedge\ldots\wedge v_r=\sum_{K=\{k_1<\ldots<k_r\}}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r}\varepsilon(\sigma)v_{\sigma(1)}^{(k_1)}\ldots v_{\sigma(r)}^{(k_r)}\right)e_{k_1}\wedge\ldots\wedge e_{k_r}$$

□

**Lemme C.2.7.** *L'action de* $\mathrm{GL}_n(k)$ *commute avec* $\psi_{r,n}$

*Démonstration.* Si $V\in G(r,n)$, $\{v_1,\ldots,v_n\}$ est une base de $V$ et $P\in\mathrm{GL}_n(k)$ alors $\{Pv_1,\ldots,Pv_n\}$ est une base de $P\cdot V$ □

**Théorème C.2.8.** $\psi_{r,n}(G(r,n))=\{v=(v_K)_{K\in I(r,n)}|\forall I\in I(r-1,n),\forall J\in I(r+1,n),\mathscr{P}_{I,J}(v)=0\}$

*Démonstration.* $\subset$ : Soient $w = w_1 \wedge \ldots \wedge w_r \in \psi_{r,n}(G(r,n))$, $A = (a_{ij})$ la matrice $(w_1, \ldots w_r)$, $L_i$ les lignes de $A$, $(\Delta_K)_{K \in I(r,n)}$ les coordonnées de $W$ dans la base canonique de $\bigwedge^r W$.
Soit $I = \{i_1 < \ldots < i_{r-1}$ et $j_i \in [\![1, n]\!]$. On considère $i_1 < \ldots < j_i < \ldots < i_r$ où $I \cup j_r$ est écrit dans l'ordre croissant.

$$(-1)^{\iota(I,j_i)} \Delta_{I \cup \{v_j\}} = (-1)^{\iota(I,j_i)} \det \begin{pmatrix} L_{i_1} \\ \vdots \\ L_{j_i} \\ \vdots \\ L_{i_{r-1}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_{i_1} \\ \vdots \\ L_{i_{r-1}} \\ L_{j_i} \end{pmatrix}.$$

En développant sur la dernière ligne,

$$(-1)^{\iota(I,j_i)} \Delta_{I \cup \{v_j\}} = \sum_{r=1}^{s} (-1)^{r+s} a_{j_i,s} \underbrace{\det((a_{i_l,m})_{1 \leq l \leq r-1, m \neq s})}_{= \Delta_{I, [\![1,r]\!] \setminus \{s\}}(A) =: \delta_s}.$$

$$\mathscr{P}_{I,J}(w) = \sum_{i, j_i \notin I} (-1)^i \Delta_{J \setminus \{j_i\}} \sum_{s=1}^{r} a_{j_i,s} \delta_s = \sum_{s=1}^{r} (-1)^r \delta_s \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+s} \Delta_{J \setminus \{j_i\}} a_{j_i,s}.$$

(on a pu étendre pour tous les éléments de $J$ car les valeurs supplémentaires sont nulles)
De plus,

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_{j_1,1} & \ldots & a_{j_1,s} & a_{j_1,s} & \ldots a_{j_1,r} \\ \vdots & & & & \\ a_{j_{r+1},1} & \ldots & a_{j_{r+1},s} & a_{j_{r+1},s} & \ldots a_{j_{r+1},r} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{k+s} \Delta_{J \setminus \{j_i\}} a_{j_i,s}$$

D'où $\mathscr{P}_{I,J}(v) = 0$.
$\supset$ : Soit $[v] = [(v_K)_{K \in I(r,n)}] \in P(\bigwedge^r k^n)$ tel que :
$\forall I \in I(r-1, n), \forall J \in I(r+1, n), \mathscr{P}_{I,J}(v) = 0$.
Soit $L = \{l_1 < \ldots < l_r\}$ tel que $v_L \neq 0$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma(l_i) = i$ croissante sur le complémentaire de $L$ et $P_\sigma$ la matrice de permutation associée. En développant les calculs sur le nombre d'inversions, on en déduit que :
$\forall I \in I(r-1, n), \forall J \in I(r+1, n), \mathscr{P}_{I,J}(P_\sigma(v)) = \mathscr{P}_{\sigma^{-1}(I), \sigma^{-1}(J)}(v) = 0$.
Comme $\psi_{r,n}$ commute avec l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ alors on peut supposer $L = \{1, \ldots, r\}$.
Par homogénéité, on peut supposer $v_L = 1$.

Soit $A = \begin{pmatrix} & I_r & \\ & & \\ a_{r+1,1} & \ldots & a_{r+1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,r} \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![r+1, n]\!], \forall j \in [\![1, r]\!], a_{i,j} = (-1)^{r-j} v_{L \setminus \{j\} \cup \{i\}}$.

On va montrer que $\Delta_K(A) = v_K$ par récurrence sur le nombre d'éléments de $L \cap K^c$.

— Si $Card(L \cap K^c) = 0$ alors $K = L$ et $\Delta_K(A) = 1 = v_L$

— Si $Card(L \cap K^c) = 1$ alors $K$ est de la forme $\{1 < \ldots < i-1 < i+1 < \ldots < r < l\}$ et donc :
$\Delta_K(A) = \det \begin{pmatrix} I_{i-1} & & 0_{r-i+1} \\ 0_r & & I_{n-r} \\ a_{k,1} & \ldots & a_{k,r} \end{pmatrix} = (-1)^{r+1} a_{li} = v_{L \setminus \{l\} \cup \{i\}} = v_K$

— Soit $s \geq 2$ et supposons la propriété vraie au rang $s-1$. Soit $K = \{k_1 < \ldots < k_r\}$ tel que $Card(L \cap K^c) = s$.
Alors,en développant le déterminant sur la $k_r$ ème ligne,
$\Delta_K(A) = \sum_{i=1}^r (-1)^{r+i} a_{k_r,i} \underbrace{\Delta_{K \setminus \{k_r\}, [\![1,r]\!] \setminus \{i\}}(A)}_{=:m_{k_r,i}}$.
De plus, si $1 \leq i \leq r$, on obtient, en développant par rapport à la $i$ème ligne (qui est de la forme $(0 \ldots 1, 0 \ldots 0)$ où le 1 est à la $i$ème ligne),
$\Delta_{I \cup \{i\}} = (-1)^{\iota(I,i)} (-1)^{r+i} m_{k_r,i}$ ( le $(-1)^{\iota(I,i)}$ permet de réordonner la matrice)
où $I = K \setminus \{k_r\}$
Comme $Card(L \cap (I \cup \{i\})^c) = s - 1$ alors, par hypothèse de récurrence, $v_{I \cup \{i\}} = \Delta_{I \cup \{i\}}$. On a donc :
$$\Delta_K(A) = \sum_{i=1}^r (-1)^{r+i} a_{k_r,i} m_{k_r,i} = \sum_{i=1}^r (-1)^{r+i} (-1)^{\iota(I,i)} (-1)^{r+i} a_{k_r,i} \Delta_{I \cup \{i\}}.$$
$$\Delta_K(A) = \sum_{i=1}^r (-1)^{r+i} (-1)^{\iota(I,i)} \Delta_{J \setminus \{i\}} \Delta_{I \cup \{i\}} \text{ où } J = \{1, \ldots, r, k_r\}$$
$\Delta_K(A) = (-1)^r \mathscr{P}_{I,J}(v) + v_K v_L = v_K$ car $v_L = 1$
Si on note $v_1, v_r$ les colonnes de $A$ alors $v = \psi_{r,n}(\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_r))$.

□

# Références


[1] J. C. Baez. The Octonions. *ArXiv Mathematics e-prints*, May 2001.

[2] Gaston Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal.* Gauthiers-Villars, 1896.

[3] Bart de Bruyn. *An introduction to incidence Geometry.* Frontiers in Mathematics. Birkhüser Baselr, 2016.

[4] Clément de Seguins Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques.* Calvage & Mounet, 2011.

[5] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.* GRENOBLE SCIENCES. EDP Sciences, 2012.

[6] Kevin McCrimmon. *A Taste of Jordan Algebras.* Universitext. Springer, 2004.

[7] J.W. Milnor. *Morse Theory.* Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1963.

[8] J.W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, 1997.

[9] John M.Lee. *Introduction to smooth manifold, Second Edition.* Graduate Texts in Mathematics 218. Springer-Verlag New York, 2012.

[10] Jérôme Germoni Philippe Caldero. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries tome 2.* Mathematiques En Devenir. EDP Sciences, 2017.

[11] B. Sévennec. Les douze surfaces de Darboux et la trialité. *ArXiv e-prints*, September 2017.

[12] F. van der Blij and T. A. Springer. Octaves and triality. *Nieuw Arch. Wisk. (3)*, 8 :158–169, 1960.