Université d'Angers

Stage

Compacité de l'espace des cycles de Barlet : applications aux automorphismes et déformations des variétés de Kähler

Antoine Boivin

Encadrant
Laurent Meersseman

2018-2019

Remerciements

Je remercie chaleureusement mon encadrant Laurent Meersseman pour sa disponibilité, sa patience, ses conseils et sa confiance. Le présent mémoire n'aurait pas abouti sans lui.
Je voudrais étendre ses remerciements à mes enseignants de ses cinq dernières années, et à l'équipe de doctorants et post-doctorants pour leur accueil chaleureux.
Enfin, je voudrais adresser mes remerciements à mes camarades nantais de M2 pour leur (tout aussi) chaleureux accueil en début d'année et pour les très agréables après-midi de travail au CRDM.

Table des matières

Introduction

Dans un article ([Bar75]) publié en 1975, Daniel Barlet a construit une structure naturelle d'espace analytique réduit sur l'espace des cycles d'un espace analytique X i.e. l'ensemble des sommes formelles finies à coefficients positifs de sous-espaces analytiques de X compacts irréductibles disjoints. David Liebermann a entrepris l'étude de cet espace dans son article [Lie78]. Il y explique comment utiliser les cycles afin de redémontrer certains résultats classiques de géométrie complexe et notamment l'étude de groupes d'automorphismes de X.
C'est cet article que l'on étudiera dans ce mémoire. On tâchera de faire les rappels nécessaires afin de comprendre les objets considérés et de donner les détails des preuves afin de comprendre cet article.

Pré-requis Dans ce mémoire, les cours de M2 de 2018/2019 de l'Université de Nantes et de Rennes seront supposés connus : la géométrie différentielle (voir, par exemple, [Laf12]), le langage de la théorie des catégories (voir, par exemple, [LS18]) et les notions de base sur les faisceaux sur un espace topologique et les espaces annelés (voir [Har77],[Voi02],[Gun90]) .
De plus, on utilisera un peu de cohomologie des faisceaux sans faire de rappels (même références que pour les faisceaux) .

Plan et guide de lecture Le chapitre 0 donne les bases de géométrie complexe afin de pouvoir continuer les chapitres suivants.
Pour pouvoir lire le chapitre 1, il faut avoir lu les sections 0.1, le chapitre 2 les sections 0.2 (pour les applications méromorphes) et 0.3 (pour les groupes d'automorphismes) (et les annexes B et C pour les notions de variétés de Kähler et de volumes) et pour le chapitre 3, on pourra regarder la construction de la variété d'Albanese 0.4 et l'annexe A.3 sur les groupes topologiques.
Dans le chapitre 1, on donnera les définitions de cycles et comment mettre une structure d'espace analytique dessus. Le chapitre 2 se divise en deux sections : dans la première, on donnera une caractérisation pratique pour les ensembles relativement compacts de l'espace des cycles (étendant un théorème de Bishop) et les applications de cette caractérisation pour construire des espaces quotients méromorphes et dans la deuxième, on regardera comment la théorie des cycles permet d'étudier les groupes d'automorphismes. Pour finir, dans le chapitre 3, on regardera comment utiliser le chapitre précédent pour étudier les actions compactifiables (qui sont des actions holomorphes de groupes que l'on peut étendre méromorphiquement sur un compact) et on finira par montrer une version plus forte d'un théorème de Matsushima portant sur les variétés de Hodge (i.e. algébriques projectives).

0 Rudiments de géométrie complexe

0.1 Espaces analytiques complexes

Cette section a pour but de définir la notion d'espace analytique complexe, qui étend celle de variété complexe en autorisant des singularités, et qui permettra de définir les cycles et est la structure adéquate à mettre sur l'ensemble des cycles.

0.1.1 Premières définitions et résultats

Comme dans le cas des schémas, on commence par donner des modèles locaux d'espaces analytiques et un faisceau associé puis on définit les espaces analytiques comme un espace annelé localement isomorphe aux modèles.

Définition 0.1. Un sous-ensemble X de $\mathbb{C}^n$ est appelé ensemble analytique complexe modèle défini par les fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_n$ sur U si

$$X = \{x \in U \mid f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0\}$$

On munit X de la topologie induite.

On peut associer à un tel ensemble modèle un faisceau $\mathcal{O}_X$ de $\mathbb{C}$-algèbres, de la façon suivante :
Soit $\mathcal{O}_U$ le faisceau des fonctions holomorphes sur U et $\mathscr{I}$ le $\mathcal{O}_U$-module engendré par $f_1, \ldots, f_n$. On définit $\mathcal{O}_X := i^{-1}\mathcal{O}_U/\mathscr{I}$ où i est l'inclusion $X \hookrightarrow U$.

Définition 0.2. On appelle espace analytique complexe un espace localement annelé en $\mathbb{C}$-algèbres $(X, \mathcal{O}_X)$, où X est un espace topologique séparé et dénombrable à l'infini, tel qu'il existe un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X et des espaces modèles $(Y_i, \mathcal{O}_{Y_i})$ tels que

$$(U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \simeq (Y_i, \mathcal{O}_{Y_i})$$

où $\mathcal{O}_{U_i}$ est la restriction de $\mathcal{O}_X$ sur U_i.

Exemple 0.3.
- Une variété complexe est un espace analytique complexe (localement donné par aucun équation)
- La parabole de Neil donné par $w^2 - y^3$ dans $\mathbb{C}^2$ (qui n'est pas lisse en 0)
- Le point d'ordre m donné par la fonction z^m dans $\mathbb{C}$ (qui n'est pas réduit pour $m > 1$)

On définit la catégorie des espaces analytiques complexes comme la sous-catégorie pleine de la catégorie des espaces localement annelés en $\mathbb{C}$-algèbres, dont les objets sont les espaces analytiques complexes. On appelera application holomorphe un morphisme d'espaces analytiques complexes.

Théorème 0.4. *Les produits fibrés finis existent dans la catégorie des espaces analytiques complexes.*

Démonstration. Voir [GPR13] paragraphe 5 p37 □

En particulier, les produits finis et les noyaux existent dans cette catégorie (la preuve se fait dans l'autre sens : on montre que les produits finies et les noyaux existent). L'espace topologique sous-jacent du produit (resp. du noyau) est le produit des espaces topologiques sous-jacents (resp. noyau des applications continues sous-jacentes).

Définition 0.5. Un espace analytique complexe $(X, \mathcal{O}_X)$ est dit réduit si, pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit (i.e. son nilradical est 0)

Cela sera le cadre de ce mémoire : on ne considérera uniquement des espaces analytiques réduits. Pour la raison suivante :

Théorème 0.6. *Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace analytique réduit alors $\mathcal{O}_X$ est un sous-faisceau de celui des fonctions continues de X.*

Démonstration. Soit $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. On peut associer à s une application continue $[s] : U \to \mathbb{C}$ de la façon suivante :
Soit $x \in U$, on peut décomposer la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$ en une somme directe : $\mathcal{O}_{X,x} = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{m}_{X,x}$ (comme la question est locale, on peut se restreindre aux espaces modèles et on utilise le fait que pour tout ouvert U de $\mathbb{C}^n$ et tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, $\mathcal{O}_{U,x}$ est l'algèbre $\mathbb{C}\{z_1 - x_1, \ldots, z_n - x_n\}$ des séries entières de rayon strictement positif). On définit $[s](x) = c_x$ où $s_x = c_x \oplus t_x$. L'application $[s]$ est continue (avec le même argument sur les espaces modèles). On définit ainsi un morphisme $\mathcal{O}_X \to \mathcal{C}_X$. Pour montrer que c'est un monomorphisme, il suffit de montrer qu'aux fibres, on a un morphisme injectif. Par le Nullstellensatz de Rückert (cf [GPR13] 8.3 p 52), en tout point $x \in X$, le noyau de $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{C}_{X,x}$ est le nilradical de $\mathcal{O}_{X,x}$ qui est nul par hypothèse.

□

Ainsi, une fonction holomorphe est entièrement déterminé par sa fonction continue.
On va maintenant donner quelques résultats importants sur les espaces analytiques :

Théorème 0.7 (Remmert)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe propre. Alors l'image d'un sous-espace analytique fermé $A \subset X$ par f est un espace analytique complexe*

Démonstration. Cela découle du théorème de l'image directe de Grauert (voir [GPR13] chapitre 3 paragraphe 4) □

Définition 0.8. Soit X un espace analytique complexe réduit. Un point de X est dit lisse s'il admet un voisinage ouvert dans M qui est une variété complexe. Dans le contraire, il est dit singulier. On notera $S(X)$ l'ensemble des points singuliers.

Une conséquence de cette définition est que si tous les points de X sont lisses alors X est une variété complexe.

Théorème 0.9. *Soit X un espace analytique complexe réduit. L'ensemble des points singuliers de X est un sous-espace analytique complexe d'intérieur vide de M.*

Proposition 0.10. *Soit X un espace analytique complexe réduit. X est irréductible si, et seulement si, $X \setminus S(X)$ est connexe.*

Définition 0.11. Soit X un espace analytique complexe réduit. On appelle dimension de X la dimension de la variété complexe $X \setminus S(X)$.

0.1.2 Submersion

Dans ce paragraphe, on va montrer qu'on peut restreindre une application holomorphe surjective sur un ouvert de Zariski de telle sorte que celle-ci soit submersive (au sens usuel des variétés).

Théorème 0.12 (du rang constant)**.** *Soient $M \subset \mathbb{C}^n$ et $N \subset \mathbb{C}^p$ deux ouverts et $f : M \to N$ une application holomorphe de rang constant égal à r (i.e pour tout $x \in M, rk(d_x f) = r$). Alors, pour tout $x \in M$, il existe des* *voisinages ouverts de x dans M et W de $f(x)$ dans N et des applications biholomorphes $\varphi : V \to V_1$ et $\psi : W \to W_1$ sur des voisinages ouverts V_1 et W_1 de l'origine respectivement dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^p$ qui vérifient les conditions :*

1. *$\varphi(V) = V_1 = U \times U_1$ et $\psi(W) = W_1 = U \times U_2$, $U \in \mathbb{C}^r$, $U_1 \subset \mathbb{C}^{n-r}$, $U_2 \subset \mathbb{C}^{p-r}$*
2. *$\forall (z_1, z_2) \in U \times U_1, \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z_1, z_2) = (z_1, 0)$*

Démonstration. [Die06] □

Une autre façon de voir ce théorème est qu'en tout point de M, il existe un voisinage V de x tel que $f(V)$ soit une variété de dimension r (qui est égal à $\varphi^{-1}(U \times \{0\})$).

Corollaire 0.13. *Soit $f : M \to N$ une application holomorphe entre deux variétés complexes de rang constant. Alors, toute fibre de f est une sous-variété complexe de M de dimension égale à $dim(M) - rk(df)$.*

Démonstration. Notons $r := rk(d_x f)$.
Soit $y = f(x) \in N$. Comme N est une variété alors il existe une carte de N, $(V, \varphi : V \to \mathbb{C}^{\dim(N)})$, autour de y. De la même façon, on a une carte $(U, \psi : U \to \mathbb{C}^{\dim(M)})$ autour de x tel que $f(U) \subset V$. On applique le théorème du rang constant à $f_1 = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$. Il existe donc un ouvert $U' \subset \psi(U)$ et $V' \subset \psi(V)$ et des isomorphismes $\lambda : U' \simeq U'' \times U_1$ et $\mu : V' \simeq U'' \times U_2$ tels que :

$$\forall (z_1, z_2) \in U'' \times U_1, f_2(z_1, z_2) := \mu \circ f \circ \lambda^{-1}(z_1, z_2) = (z_1, 0).$$

Ainsi, $f_2^{-1}(0)$ et $\lambda \circ \varphi$ nous donne une carte de $f^{-1}(y)$ autour de x, ce qui montre que $f^{-1}(y)$ est une variété. □

Corollaire 0.14. *Soit $f : M \to N$ une application holomorphe de rang constant $q < \dim(N)$. Alors $f(M)$ est d'intérieur vide dans N.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Par le théorème du rang constant, il existe un voisinage V de x tel que $f(V)$ est une variété de dimension q. Par un argument de dimension, on déduit que $f(V)$ est d'intérieur vide. Ainsi, l'image de tout voisinage compact de x dans V est d'intérieur vide dans N. Comme M peut être recouvert par de tels voisinages compacts alors $f(M)$ est aussi d'intérieur vide car M est localement compact (propriété de Baire).

□

Supposons M et N connexes (et donc irréductible) pour simplifier les explications :
Si k est le rang maximal d'une application f alors les points où f sont de rang strictement inférieur sont des espaces analytiques d'intérieur vide (comme zéros des mineurs qui sont des fonctions holomorphes). Ainsi, le complémentaire de l'union (finie !) de ces espaces analytiques est un ouvert de Zariski et quitte à l'intersecter avec son lieu régulier, on peut supposer que c'est une variété.
Ainsi, si on suppose f surjective alors $k = \dim(N)$. Sur notre ouvert, les fibres sont des variétés complexes de dimension $\dim(M) - \dim(N)$ ou autrement dit, f est une submersion. Cela nous permet de montrer le résultat suivant :

Théorème 0.15. *Soit $f : X \to Y$ une application surjective holomorphe entre un espace analytique réduit irréductible et une variété connexe. Alors, il existe un ouvert de Zariski U de X (qui est lisse) telle que $f_{|U}$ est une submersion.*

0.1.3 Morphismes lisses

Dans ce paragraphe, on va étendre la définition de submersion au cas général des espaces analytiques afin de pouvoir définir une bonne notion de "familles de variétés" :

Définition 0.16. Soit A un anneau commutatif. Un A-module M est dit A-plat si pour toute morphisme injectif $N_1 \to N_2$ de A-modules, le morphisme induit $N_1 \otimes_A M \to N_2 \otimes_A M$ est injectif.
Autrement dit, M est A-plat si le foncteur $- \otimes M$ est exact.

Définition 0.17. Une application holomorphe $f : X \to Y$ entre deux espaces analytiques réduits est dite plate si, pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-module plat (où l'action de $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ sur $\mathcal{O}_{X,x}$ est donnée par le morphisme induit dans les fibres $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$).

Définition 0.18. Un application holomorphe $f : X \to Y$ est appelée morphisme lisse si f est plate et si le faisceau $coker(df : f^*\Omega^1_Y \to \Omega^1_X)$ est localement libre de dimension $\dim(X) - \dim(Y)$ (où on définit localement df sur les espaces modèles comme la différentielle usuelle)

Pour mieux comprendre cette définition, regardons le cas où X et Y sont des variétés :
La deuxième condition nous dit que f est une submersion. Mais, de plus, on peut montrer que si f est une submersion alors elle est plate. La notion de morphisme lisse étend donc celle de submersion du cas lisse. De plus, on a le résultat, classique pour le cas lisse, suivant :

Proposition 0.19. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif lisse. Alors les fibres de f sont lisses et de dimension* $\dim(Y) - \dim(X)$.

Un morphisme lisse définit ainsi une famille $(f^{-1}(y))_{y \in Y}$ de variétés lisses.

0.1.4 Espaces normaux et faiblement normaux

On va maintenant regarder les espaces analytiques normaux. L'intérêt de ceux-ci est, notamment, de permettre de prolonger une fonction holomorphe définie en dehors d'une hypersurface sur l'espace tout entier.

Définition 0.20. Soient B un anneau commutatif et A est un sous-anneau de B. On dira que $b \in B$ est entier sur A s'il existe un polynôme unitaire $P \in A[X]$ tel que $P(b) = 0$

Définition 0.21. Un anneau commutatif A est dit intégralement clos s'il est intègre et si tout élément du corps de fraction $Frac(A)$ qui est entier sur A est dans A.

Définition 0.22. Un espace analytique complexe réduit X sera dit normal en $a \in X$ si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,a}$ est intégralement clos. On dira que X est normal s'il est normal en chacun de ses points.

A défaut d'être tous normaux, les points normaux est un ouvert de Zariski :

Théorème 0.23 (Oka)**.** *L'ensemble $N(X)$ des points non-normaux d'un espace analytique réduit est un sous-espace analytique de X qui est contenu dans le lieu singulier $S(X)$.*

Démonstration. Voir [GPR13] section 6 paragraphe 5 □

0.1.4.1 Fonctions méromorphes

Soit X un espace analytique complexe réduit. On définit les fonctions méromorphes sur X comme suit :

Définition 0.24. Une fonction méromorphe sur X est la donnée d'une classe d'équivalence (H, f) où H est un sous-ensemble analytique de X d'intérieur vide et f est une fonction holomorphe sur $X \setminus H$ tel que, pour chaque $x \in H$, il existe un voisinage U de x dans X et deux fonctions holomorphes g et h sur V telles que les zéros de h soit inclus dans $H \cap V$ et le quotient g/h coïncide avec f sur $V \setminus (V \cap H)$, pour la relation d'équivalence définit comme suit : (H, f) et (H', f') sont dits équivalents si f et f' coïncident sur $M \setminus (H \cup H')$

Une fonction holomorphe $g : X \to \mathbb{C}$ peut être vu comme une fonction méromorphe donnée par la classe d'équivalence de $(\emptyset, g)$. Réciproquement, on peut voir une fonction méromorphe (H, f) qui contient $(\emptyset, g)$ comme une fonction holomorphe. On dira que g prolonge f à X.

Théorème 0.25. *Un espace analytique complexe réduit X est normal si, et seulement si, pour tout ouvert Ω de X et toute hypersurface $H \subset \Omega$ fermée et d'intérieur vide dans Ω, toute fonction holomorphe $g : \Omega \setminus H \to \mathbb{C}$ localement bornée le long de H se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.*

Proposition 0.26. *Soient X un espace analytique complexe réduit de dimension pure, H un sous-ensemble analytique d'intérieur vide de X et $f : X \setminus H \to \mathbb{C}$ une fonction localement bornée le long de H. Alors f est méromorphe sur X.*

La notion d'espace normal est parfois trop forte. On peut parfois juste supposer l'espace faiblement normal :

Définition 0.27. Un espace complexe réduit X est dit faiblement normal si, pour tout ouvert U de X, toute fonction continue sur U et holomorphe sur un ouvert de Zariski dense de U est holomorphe sur U.

Cette propriété est plus faible que celle de normalité en vertu de la caractérisation 0.25 et de la proposition 0.26

Théorème 0.28. *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces analytiques complexes avec M faiblement normal. Alors, les condition suivantes sont équivalentes :*

- *L'application f est holomorphe.*
- *Le graphe de f est un sous-ensemble analytique (fermé) de $X \times Y$*

Démonstration. $\Rightarrow$: Le graphe de f est le lieu des zéros de $y - f(x)$ et est donc un sous-ensemble analytique de $X \times Y$.
$\Leftarrow$: Soit $\pi : \Gamma_f \to X$ la projection du graphe de f sur X. C'est un homéomorphisme holomorphe (π est donc propre). Il existe donc un ouvert de Zariski U de X tel que $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ soit une submersion et est

donc un biholomorphisme (par le théorème d'inversion locale). Ainsi, π^{-1} est continue, et holomorphe sur U. Comme X est faiblement normal alors π est holomorphe sur X et donc f aussi. □

0.1.5 Espaces irréductibles

Dans ce paragraphe, nous allons étudier comment voir l'irréductibilité d'un espace analytique réduit connexe dans les fibres de son faisceau structural.

Définition 0.29. Soit X un espace analytique complexe réduit. On dira que X est irréductible en un point x de X si x admet un système fondamental de voisinages ouverts irréductibles dans X et que X est localement irréductible s'il est irréductible en tous ses points.

En particulier, il existe un recouvrement de X par des ouverts irréductibles.

Proposition 0.30. *Un espace topologique localement irréductible est irréductible si, et seulement si, il est connexe.*

Démonstration. $\Leftarrow$: Soit X un espace topologique localement irréductible connexe.
Soient $\{U_i\}$ un recouvrement de X par des ouverts irréductibles et V, W deux ouverts de X disjoints.
Montrons, tout d'abord, qu'un ouvert U_i rencontre soit V soit W soit aucun des deux :
Supposons, par l'absurde, qu'il existe U_i tel que $U_i \cap V \neq \emptyset \neq U_i \cap W$. Comme U est irréductible et que $U_i \cap V$ et $U_i \cap W$ sont des ouverts de U_i alors $U_i \cap V = \emptyset$ ou $U_i \cap W = \emptyset$, ce qui montre ce que l'on voulait.
On peut donc trier les ouverts du recouvrement $\{U_i\}$ en trois familles : ceux qui rencontrent V, ceux qui rencontrent W et ceux qui rencontrent ni l'un ni l'autre. Notons par A, B et C l'union de, respectivement, des ouverts de la première famille, ceux de la deuxième et ceux de la troisième. On a ainsi

écrit X comme une union disjointe de trois ouverts :

$$X = A \coprod B \coprod C$$

Comme X est connexe alors $A \coprod B$ ou C est vide :

— Si $A \coprod B$ est vide alors V et W le sont aussi.
— Si C est vide alors $X = A \coprod B$. Comme X est connexe alors A ou B est vide. Et donc V ou W est vide.

Ce qui montre que X est irréductible.
$\Rightarrow$: Soit X un espace topologique irréductible.
Soit U, V deux ouverts disjoints tel que $X = U \cup V$.
Comme U et V sont disjoints et que X est irréductible alors U ou V est vide.
Ce qui montre que X est connexe. □

Proposition 0.31. *Soient X un espace analytique complexe réduit et $x \in X$. Alors X est irréductible en x si, et seulement si, l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est intègre.*

Démonstration. Voir [BM14] p171 □

Corollaire 0.32. *Un espace analytique réduit, connexe et normal est irréductible.*

Démonstration. Soit X un espace analytique réduit, connexe et normal. Comme X est normal alors en tout point $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ est intégralement clos et en particulier est intègre. Autrement dit, par la proposition 0.31, X est irréductible en tout ses points ou encore X est localement irréductible. Comme, de plus, X est connexe alors, par 0.30, X est irréductible. □

0.2 Modifications

Dans cette section, nous allons étendre la définition de fonctions méromorphes dans le cas où le domaine d'arrivé est un espace analytique réduit quelconque. Pour cela, on est amené à définir la notion de modification dont un exemple simple est l'éclatement de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$.

Exemple 0.33. On commence par regarder le fibré en droites tautologiques $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ sur $\mathbb{P}^n$ défini par :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) := \{(L, z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in L\}$$

La projection de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ est submersive en tout point en dehors de $\mathbb{P}^n \times \{0\} =: \mathcal{E}$.
En effet, si on regarde dans les cartes (données par :

$$\varphi : (L, z) \in T \cap (U_i \times C^{n+1}) \mapsto (\pi_i(L), z_i) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$$

où $U_i = \{z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$ et $\pi : U_i \simeq \mathbb{C}^n$) de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$, on obtient une application $\widetilde{\pi}_i : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ définie par :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{C}^{n+1}, \widetilde{\pi}_i(x_1, \ldots, x_n, z) = z(x_1, \ldots, 1, x_n)$$

Son jacobien est donné par :

$$\det Jac(\widetilde{\pi}) = \det \begin{pmatrix} z & & & & & z \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & z & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & 1 \\ \vdots & & & z & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & z & x_n \end{pmatrix} = z^n$$

Ainsi, $\widetilde{\pi}$ est submersive en tout point où $z \neq 0$ (et donc π aussi). Par le théorème d'inversion locale, $\pi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \setminus \mathcal{E} \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ est un isomorphisme. On appelle éclatement de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ la variété $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ muni de sa projection sur $\mathbb{C}^{n+1}$.

Définition 0.34. Soit $\tau : \widetilde{X} \to X$ une application holomorphe entre deux espaces analytiques complexes réduits. On dira que l'application τ est une modification si :

— τ est propre

— Il existe un sous-ensemble analytique T d'intérieur vide dans X tel que l'image réciproque $\tau^{-1}(T)$ soit d'intérieur vide dans $\widetilde{X}$ et tel que τ induise un isomorphisme de $\widetilde{X} \setminus \tau^{-1}(T)$ sur $X \setminus T$.

On appelera centre de la modification τ l'intersection des sous-ensembles analytiques T de X qui vérifient la condition ci-dessus (i.e. le plus petit d'entre eux).

On peut remarquer qu'une modification est nécessairement surjective car son image est un espace analytique fermé (car τ est propre) qui contient un ouvert dense, celle-ci est donc X tout entier.

Définition 0.35. Soit X, Y deux espaces complexes réduits. Une fonction méromorphe de X dans Y est la donnée d'un sous-espace analytique réduit Γ de $X \times Y$ muni d'une modification propre $\Gamma \to X$ et une application holomorphe $\Gamma \to Y$. On la note $X \dashrightarrow Y$

Par définition de modification, une application méromorphe $X \dashrightarrow Y$ induit une application holomorphe d'un ouvert de Zariski de X vers Y.
Cette définition coïncide avec la définition donnée dans 0.24 :

Lemme 0.36. *Soit $\widetilde{f}$ une fonction méromorphe (comme défini dans 0.24) sur un espace analytique irréductible X. Pour chaque $(H, f) \in \widetilde{f}$, l'adhérence dans $X \times \mathbb{P}^1$ du graphe :*

$$\Gamma_{(H,f)} = \{(x, [z_0 : z_1]) \in (X \setminus H) \times \mathbb{P}^1 \mid z_0 f(x) = z_1\}$$

est un sous-espace analytique irréductible dans $M \times \mathbb{P}^1$, indépendant du choix du représentant de $\widetilde{f}$. La projection $\overline{\Gamma_{(H,f)}} \to M$ est une modification propre. Ainsi, $\widetilde{f}$ est une application méromorphe $M \dashrightarrow \mathbb{C}$

Démonstration. Soit $x_0 \in H$. Il existe un voisinage U de x_0 dans X et des applications holomorphes $g, h : U \to \mathbb{C}$ tels que les zéros de h soient contenus dans H et tels que f et g/h coïncide sur $U \setminus U \cap H$. Ainsi, par définition de $\Gamma_{(H,f)}$,

$$\Gamma_{(H,f)} \cap (U \times \mathbb{P}^1) \subset \{(x, [z_0 : z_1]) \in U \times \mathbb{P}^1 \mid z_0 g(x) = z_1 h(x)\} =: Z$$

Et donc l'adhérence $\overline{\Gamma_{(H,f)}} \cap (U \times \mathbb{P}^1)$ est aussi inclus dans Z. Ainsi, $\overline{\Gamma_{(H,f)}} \cap (U \times \mathbb{P}^1)$ est égal à la composante irréductible de Z la contenant. Cela prouve que $\overline{\Gamma_{(H,f)}}$ est un ensemble analytique de $M \times \mathbb{P}^1$. De plus, il est indépendant du choix de (H, f) car deux représentants (H, f) et (H', f) sont équivalents si f et f' sont égaux sur $X \setminus \{H \cup H'\}$ □

Au vu des propriétés des espaces normaux, lorsqu'on a une espace X qui ne l'est pas, on voudrait trouver un espace normal $\widetilde{X}$ sans perdre trop d'informations sur X :

Définition 0.37. Soit X un espace analytique complexe réduit. Une application holomorphe $\nu : Y \to X$ est appelé normalisation de M si :
— L'espace complexe réduit N est normal.
— L'application ν est une modification propre de M.
— Les fibres de ν sont finies.

Théorème 0.38. *Tout espace complexe réduit admet une normalisation.*

Démonstration. Voir [GPR13]

□

0.3 Groupe d'automorphisme d'une variété complexe compacte

Soit X une variété complexe compacte. Dans cette section, on va étudier le groupe des automorphismes (biholomorphismes) de X, que l'on notera $Aut(X)$, et certains de ses sous-groupes.
On va commencer par un exemple :

Proposition 0.39. $Aut(\mathbb{P}^n) = PGL_n(\mathbb{C})$

Démonstration. Soit $\varphi = [\varphi_0 : \ldots : \varphi_n] : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ un biholomorphisme.
Par le théorème de Hurwitz-Weierstraß (voir [GR84] chapitre 9 paragraphe 5-3), φ_i/φ_0 est le quotient de polynômes homogènes de même degré. Ainsi, en chassant les dénominateurs, on peut supposer que les φ_i sont des polynômes homogènes de même degré.
On peut faire le même raisonnement avec φ^{-1}. Ainsi, les φ_i sont de degré 1.
Un automorphisme de $\mathbb{P}^n$ est induit par une matrice inversible $(n+1)\times(n+1)$.
Réciproquement, une matrice de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ donne un automorphisme de $\mathbb{P}^n$.
On obtient un morphisme surjectif de groupes $\Phi : \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \to Aut(\mathbb{P}^n)$.
Calculons maintenant son noyau.
Soit $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$. Dire que $A \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ revient à dire que pour tout $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, $[Az] = [z]$ ou encore que pour tout $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, il existe une constante $\lambda(z) \in \mathbb{C}$ tel que $Az = \lambda(z)$. Cela permet de dire que A est une homothétie [1] i.e. $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{C}^* Id$.
Par le premier théorème d'isomorphisme,

$$\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})/Ker(\Phi) \simeq Aut(\mathbb{P}^n)$$

1. Soit $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ une base de $\mathbb{C}^{n+1}$. Alors pour tout $i \neq j$,

$$\lambda(e_i + e_j)(e_i + e_j) = A(e_i + e_j) = Ae_i + Ae_j = \lambda(e_i)e_i + \lambda(e_j)e_j$$

Ainsi, $\lambda(e_i) = \lambda(e_i + e_j) = \lambda(e_j)$. Ce qui montre que $A = \lambda Id$

□

On munit le groupe des automorphismes de la topologie induite par la convergence sur tout compact (on expliquera dans la section 1.33 pourquoi cette topologie est naturelle). Mais dans notre cas, on peut mettre plus de structure sur ce groupe :

Théorème 0.40. *Soit M un variété complexe compacte. Son groupe d'automorphisme est un groupe de Lie complexe dont l'algèbre de Lie est constituée des champs de vecteurs holomorphes sur M.*

Démonstration. Voir [BM47]

□

Remarque 0.41. Si X n'est pas compacte alors ce n'est plus cas :
Si X est un disque de $\mathbb{C}$, alors $Aut(X) = PSL_2(\mathbb{R})$ que l'on ne peut pas munir d'une structure complexe.

Notation 0.42. On notera $Aut_0(X)$ la composante connexe de l'identité dans $Aut(X)$

L'intérêt de travailler avec la composante de l'identité est qu'elle se comporte mieux vis-à-vis des produits :

Proposition 0.43. *Soit X_1 et X_2 des espaces analytiques complexes compacts réduits. Alors, on a un isomorphisme naturel de groupes de Lie complexes :*

$$Aut_0(X_1 \times X_2) \simeq Aut_0(X_1) \times Aut_0(X_2)$$

Démonstration. Voir [Akh12] section 2.4 proposition 2 p 47 □

La fin de cette section servira à montrer que, pour une variété de Kähler (M, ω), tous les éléments de la composantes de l'identité de $Aut(X)$ conserve la classe de $[\omega]$. On note par $Aut_\omega(X)$ le groupe des automorphismes de X préservant la classe de ω.

Lemme 0.44. *Soient M une variété lisse, I un intervalle ouvert. Soit $\rho : M\times I \to M$ une isotopie lisse (i.e. pour tout $t \in I$, $\rho(\cdot, t)$ est un difféomorphisme). Alors, pour toute forme ω et pour tout $t \in I$,*

$$\left[\frac{d}{ds}\rho_{s*}\omega\right](t) = (\rho_t)_*\mathcal{L}_{X_t}\omega$$

où (X_t) vérifie $\frac{d\rho_t}{dt} = X_t(\rho_t(\cdot))$ et $\mathcal{L}$ est la dérivée de Lie.

Démonstration. Voir théorème 36 p 175 [Laf12] □

Lemme 0.45. *Soit $s \in S \mapsto \omega_s$ une famille de formes différentielles fermées. Alors,*

$$\left[\frac{d\omega_s}{ds}\right] = \frac{d}{ds}\left[\omega_s\right]$$

où $[\omega]$ est la classe de cohomologie de ω.

Démonstration. Il faut seulement montrer que l'égalité ne dépend pas des classes choisies.
Soit (η_s) une autre famille de formes différentielles fermées telle que, pour tout $s \in S$ $[\omega_s] = [\eta_s]$ i.e il existe une famille de formes différentielles exactes (γ_s) telles que :

$$\forall s \in S, \omega_s = \eta_s + d\gamma_s$$

Ainsi,

$$\frac{d}{ds}\omega_s = \frac{d}{ds}\eta_s + \frac{d}{ds}d\gamma_s$$

Or, par le lemme 44 de [Laf12] (page 179), $\frac{d}{ds}$ et d commute et donc $\frac{d}{ds}d\gamma_s$ est nulle en cohomologie. □

Corollaire 0.46. *Sous les hypothèses de 0.44, si on prend une forme fermée ω et si on suppose $\rho_0 = Id$, alors sa classe est préservée par l'isotopie i.e.*

$$\forall t \in I, [\omega] = [\rho_{t*}\omega]$$

Démonstration. Par le lemme 0.44 , on a, pour tout $t \in T$,

$$\left(\frac{d}{ds}\rho_{s*}\omega\right)(t) = (\rho_t)_*\mathcal{L}_{X_t}\omega$$

Or, comme ω est fermé et que le pullback commute avec la différentielle, on a :

$$\rho_{t*}\mathcal{L}_{X_t}\omega = \rho_{t*}(di_{X_t}\omega + i_{X_t}d\omega) = \rho_{t*}di_{X_t}\omega = d(\rho_{t*}i_{X_t})\omega$$

Ainsi, $\frac{d}{ds}\rho_{s*}\omega$ est nulle en cohomologie et donc par le lemme 0.45, $\rho_{s*}\omega$ est constante et donc, pour tout $t \in T$,

$$[\rho_{t*}\omega] = [\rho_{0*}\omega] = [\omega]$$

□

Corollaire 0.47. *Soit* (M, ω) *une variété de Kähler compacte.*

$$Aut_0(M) \subset Aut_\omega(M)$$

Démonstration. Par le théorème 0.40, $Aut_0(M)$ est un groupe de Lie complexe dont l'algèbre de Lie est constitué des champs de vecteurs holomorphes sur M. Par le théorème d'inversion locale, exp est un difféomorphisme autour de 0, disons entre $U \subset \mathfrak{g}$ (que l'on supposera convexe) et $V \subset G$. Par le lemme A.12, V engendre $Aut_0(M)$.
Ainsi, un élément de $Aut_0(X)$ est de la forme

$$f = \exp(u_1)^{\varepsilon_1} \dots \exp(u_n)^{\varepsilon_n}$$

où $u_i \in U, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$.
On peut donc supposer que $f = \exp(u), u \in U$ et montrons que cette application préserve la classe de Kähler. On obtient le résultat voulu en itérant l'égalité obtenue.

L'application f est isotope à l'identité grâce à l'application

$$\rho : (t, x) \in]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\mapsto \exp(tu)(x)$$

pour ε bien choisi ($\varepsilon > 0$ est choisi de tel sorte que $-\varepsilon u$ et $(1+\varepsilon)u$ soient dans U). Les $\rho(t, \cdot)$ sont toujours des difféomorphismes grâce au fait que U est convexe et donc $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[u \subset U$. Par conséquent, on obtient notre résultat grâce au corollaire 0.46,

$\square$

0.4 Variété d'Albanese

Dans cette section, nous allons construire le tore (ou variété) d'Albanese $Alb(X)$ associé à une variété de Kähler X (et l'application alb_X, dite d'Albanese, associée) défini par la propriété universelle suivante :
Pour toute application holomorphe $f : X \to T$ où T est un tore complexe, il existe une unique application holomorphe $g : Alb(X) \to T$ telle que $f = g \circ alb_X$.

Soit X une variété de Kähler connexe de dimension complexe n.
Par la décomposition de Hodge (B.9),

$$H^{2n-1}(X,\mathbb{C}) = H^{n,n-1}(X,\mathbb{C}) \oplus \overline{H^{n,n-1}(X,\mathbb{C})}$$

On en déduit que

$$H^{2n-1}(X,\mathbb{R}) \cap H^{n,n-1}(X,\mathbb{C}) = \emptyset$$

car, dans le cas contraire, un point de l'intersection serait dans l'intersection $H^{n,n-1}(X) \cap \overline{H^{n,n-1}(X)}$ (car réel) qui est vide. L'application

$$H^{2n-1}(X,\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{2n-1}(X,\mathbb{C}) \twoheadrightarrow H^{2n-1}(X)/H^{n,n-1}(X)$$

est injective et donc est un isomorphisme (car ils ont la même dimension). Par la dualité de Poincaré(C.9), on a $H^{2n-1}(X,\mathbb{R}) = H_1(X,\mathbb{R})$ et par celle de Kodaira-Serre ([GH11] p 102),

$$\overline{H^{n,n-1}(X,\mathbb{C})} = H^{n-1,n}(X) \simeq H^{1,0}(X)^* \simeq H^0(X,\Omega_X)^*$$

Ainsi, $H_1(X,\mathbb{Z})^{libre}$ est un réseau de $H^0(X,\Omega_X)^*$ (voir A.20).

Définition 0.48. Le quotient $H^0(X,\Omega_X)^*/H_1(X,\mathbb{Z})^{libre}$ est appelé variété (ou tore) d'Albanese, que l'on note $Alb(X)$.

On associe à cette variété une application $alb_X : X \mapsto Alb(X)$ définie, en fixant un point $x_0 \in X$, par :

$$\forall x \in X, alb_X(x) : [\omega] \mapsto \int_{x_0}^{x} \omega$$

Cette application ne dépend pas du point base choisie grâce au quotient par $H_i(X, \mathbb{Z})^{libre}$.

Proposition 0.49. *L'application $alb_X : X \to Alb(X)$ est holomorphe et son image engendre $Alb(X)$ en tant que groupe.*

Démonstration. La première partie est un cas particulier d'un résultat de Griffiths dont la preuve peut être trouvé dans [Voi02] (Théorème 12.4 p 274) et la deuxième se trouve au même endroit (lemme 12.11 p 278).

□

Lemme 0.50. *Si $\mathcal{T}$ est un tore complexe alors $Alb(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ et $alb_{\mathcal{T}}$ est une translation.*

Démonstration. Par définition, on peut écrire $\mathcal{T}$ sous la forme $\mathbb{C}^n/\Lambda$ où Λ est un réseau de $\mathbb{C}^n$.
Comme T est un groupe de Lie complexe alors il est parallélisable (voir B.18) i.e

$$T\mathcal{T} = \mathcal{T} \times \mathbb{C}^n$$

Une forme différentielle est une application holomorphe

$$\omega : \mathcal{T} \to T^*\mathcal{T} = \mathcal{T} \times (\mathbb{C}^n)^*$$

tel que $\omega(x) \in T_x\mathcal{T}$. Dans notre cas, une forme différentielle se résume à une application holomorphe $\mathcal{T} \to (\mathbb{C}^n)^*$ et donc comme $\mathcal{T}$ est compacte alors elles sont constantes (et donc $alb_{\mathcal{T}}$ est une translation). Ainsi,

$$H^0(\mathcal{T}, \Omega_{\mathcal{T}}) = (\mathbb{C}^n)^*$$

Ensuite, comme $\mathbb{C}^n$ est simplement connexe et que $\mathcal{T}$ est une variété alors $\mathbb{C}^n$ est le revêtement universel de $\mathcal{T}$ et donc, pour tout $x \in \mathcal{T}$,

$$\pi_1(\mathcal{T}, x) = \Lambda$$

Et donc,

$$H^1(\mathcal{T}, \mathbb{Z}) = \pi_1(\mathcal{T}, x)^{ab} = \Lambda^{ab} = \Lambda$$

On en déduit que :

$$\mathcal{T} = \mathbb{C}^n/\Lambda = H^0(\mathcal{T}, \Omega_{\mathcal{T}})^*/H_1(\mathcal{T}, \mathbb{Z})^{libre} = Alb(\mathcal{T})$$

□

Lemme 0.51. *Si $f : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ est une application holomorphe entre deux tores complexes alors f est un morphisme de groupes suivi d'une translation.*

Démonstration. Quitte à translater, on peut supposer $f(0) = 0$.
On peut écrire les deux tores sous la forme $\mathcal{T}_1 = \mathbb{C}^n/\Lambda_1$ et $\mathcal{T}_1 = \mathbb{C}^m/\Lambda_2$. Ces deux tores sont parallélisables et donc $T\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1 \times \mathbb{C}^n$ et $T\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \times \mathbb{C}^m$. L'application df est donc une application $\mathcal{T}_1 \times \mathbb{C}^n \to \mathcal{T}_2 \times \mathbb{C}^m$. Si on fixe $v \in \mathbb{C}^m$, on peut définir une application holomorphe $x \in T_1 \mapsto d_x f(v) \in \mathbb{C}^m$. Celle-ci est constante car $\mathcal{T}_1$ est compacte. On en déduit que $d_x f(v)$ ne dépend pas de x et donc df est uniquement déterminé par une application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ (que l'on notera A).
Soit $\overline{f} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ l'application qui relève $\pi_2 \circ f : \mathcal{T}_1 \to \mathbb{C}^m$ et telle que $\overline{f}(0) = 0$. Il suffit donc de montrer que $\overline{f} = A$. Montrons le au voisinage de 0.
La différence de f et celle de $\overline{f}$ coïncide (car la projection est un difféomorphisme local). Soit z dans un voisinage de 0et γ un chemin de 0 et z. Alors,

$$\overline{f}(z) = \int_0^1 d_{\gamma(t)}\overline{f}(\gamma'(t))dt = \int_0^1 A(\gamma'(t))dt = A(\gamma(1)) - A(\gamma(0)) = A(z)$$

Par le prolongement analytique, on obtient $\overline{f} = A$ $\square$

Théorème 0.52. *Soit X une variété de Kähler.*
$(Alb(X), alb_X)$ vérifie la propriété universelle suivante : Pour toute application holomorphe $f : X \to T$ où T est un tore complexe, il existe une unique application holomorphe $g : Alb(X) \to T$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "alb_X"'] & T \\ Alb(X) \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Existence :
Par naturalité, il existe une application $f_* : H_0(X, \Omega_X)^* \to H_0(T, \Omega_T)^*$ qui se restreint en une application $f_* : H_1(X, \mathbb{Z}) \to H_1(T, \mathbb{Z})$. Par passage au quotient, on obtient une application $f_* : Alb(X) \to Alb(T)$. On remarque que cette application vérifie l'égalité $alb_T \circ f = f_* \circ alb_X$ en envoyant le point base de X sur celui de T (i.e est naturelle). Comme alb_T est une translation (par 0.50) donc est inversible. On en déduit que $f = alb_T^{-1} \circ f_* \circ alb_X$.
Unicité :
Soit g_1, g_2 deux solutions du problème. Posons $g := g_1 - g_2$.
L'application g est une application holomorphe $Alb(X) \to T$ nulle sur $alb_X(X)$ et en particulier en 0. Par 0.51, c'est une morphisme de groupes. Comme $alb_X(X)$ engendre $Alb(X)$ par 0.49 alors g est nulle sur tout $Alb(X)$. $\square$

Théorème 0.53. *Soit X une variété de Kähler compacte. Alors,*

$$Aut_0(Alb(X)) \simeq Alb(X)$$

Démonstration. Par la proposition 0.51, un automorphisme de $Alb(X)$ est la composée d'un automorphisme de groupes suivi d'une translation.
Comme $Aut_0(X)$ est un groupe de Lie connexe alors en particulier, il est connexe par arcs. Alors, les automorphismes de $Aut_0(X)$ sont ceux atteignables par un arc à partir de l'identité. Commençons au voisinage de l'identité :

Soit (f_n) une suite de $Aut_0(Alb(X))$ convergeant vers l'identité. On peut décomposer f_n sous la forme $\varphi_n + \lambda$ où φ_n est un automorphisme de groupes et λ_n une constante.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) converge vers l'identité et que $Aut(X)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\|Id - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

i.e pour tout $x \in X$,

$$|x - f_n(x)| < \varepsilon$$

En particulier, pour $x = 0$,

$$|\lambda_n| < \varepsilon$$

Supposons que $\varphi_n \neq Id$ i.e il existe $x \in X$ tel que $\varphi_n(x) \neq x$. Pour ε suffisamment petit, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$m|\varphi_n(x) - x| = |\varphi_n(mx) - mx| > 2\varepsilon$$

(car φ_n est un morphisme de groupes). Ainsi, $\|Id - \varphi_n\|_\infty > 2\varepsilon$.
On obtient ainsi une contradiction car :

$$\|Id - \varphi_n\|_\infty \leq \|Id - f_n\|_\infty + |\lambda_n| \leq 2\varepsilon$$

On en déduit que $\varphi_n = Id$.
Soient $f \in Aut_0(Alb(X))$ et un arc $\gamma : [0,1] \to Aut_0(X)$ reliant Id et f. En recouvrant $\gamma([0,1])$ par un nombre (fini) d'ouverts suffisamment petit, on en déduit, grâce à la discussion précédente que, pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ est une translation.
L'isomorphisme $Aut_0(Alb(X)) \to Alb(X)$ est donnée par $f \mapsto f(0)$. $\square$

1

Espace des cycles de Barlet

1.1 Premières définitions

Soit X un espace analytique et $n \in \mathbb{N}^*$. Un n-cycle (fermé) de X est une somme formelle localement finie

$$Z := \sum_{i \in I} n_i Z_i$$

où $n_i \in \mathbb{N}^*$ et les Z_i sont des sous-espaces analytiques distincts de X irréductibles fermés de dimension n .
On appelle support d'un tel cycle le sous-espace analytique $\bigcup Z_i$ et on l'identifiera à Z si pour tout $i \in I$, $n_i = 1$. On dira alors que Z est réduit.
Un cycle sera dit compact lorsque son support est compact. Dans ce cas, J est fini et les Z_j sont compacts (la réciproque est évidemment vraie).
On notera $\mathscr{C}_n^{loc}(X)$ (resp. $\mathscr{C}_n(X)$) l'ensemble des n-cycles fermés (resp. compacts).
Dans la suite, on étudiera surtout les cycles compacts mais quelques résultats seront donnés pour les n-cycles fermés pour des raisons de simplicité.
On peut définir de façon naturelle la somme de deux cycles en ajoutant terme à terme les deux sommes formelles.

Proposition 1.1. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe. Alors il existe une unique application $f_* : \mathscr{C}_n(X) \to \mathscr{C}_n(Y)$, appelé image directe, telle que :*

- *Pour toute famille finie de n-cycles $(Z_i)_{i \in I}$, $\sum_{i \in I} f_*(X_i) = f_*(\sum_{i \in I} X_i)$*
- *Si $X \in \mathcal{C}_n(X)$ et si $\dim(f(|X|)) < n$ alors $f_*(X) = \emptyset[n]$.*
- *Si le n-cycle Z est réduit et si f est génériquement de degré k sur son image $Y = f(X)$ alors $f_*(X) = kY$*

Démonstration. On utilise le lemme 1.3.6 de [BM14] et on remarque que dans le cas compact, l'application $f : |Z| \to Y$ est toujours propre. De plus, l'image de l'application $f_* : \mathscr{C}_n(X) \to \mathscr{C}_n^{loc}(Y)$ obtenue par ce lemme est à image dans $\mathscr{C}_n^{loc}(Y)$ par continuité de f. $\square$

Cela définit ainsi un foncteur $\mathscr{C}_n$ de la catégorie des espaces analytiques réduits vers la catégorie des ensembles.

Dans la suite, on va munir $\mathscr{C}_n(X)$ d'une structure d'espace analytique réduit en le voyant comme le représentant d'un foncteur contravariant F_X^n de la catégorie des espaces analytiques réduits vers la catégorie des ensembles.

1.2 Produits symétriques

Définition 1.2. Soit M un espace topologique et $k \in \mathbb{N}^*$. On appelle $k$ème produit symétrique de M l'espace topologique $Sym^k(M)$, quotient de M^k par l'action de $\mathfrak{S}_k$ donnée par, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ et pour tout $(z_1, \ldots, z_k) \in M^k$,

$$\sigma \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(k)})$$

Proposition 1.3. *Si M est séparé alors $Sym^k(M)$ l'est aussi. De plus, si M est compact, localement compact ou dénombrable à l'infini, $Sym^k(M)$ l'est aussi.*

Démonstration. Supposons M séparé.
Soit $[x] \neq [y] \in Sym^k(M)$.
Soient $x_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_k$ les représentants de $[x]$ et $y_\tau, \tau \in \mathfrak{S}_k$ ceux de $[y]$.
Comme M est séparé, il existe, pour tout $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_k$, un voisinage $V_{\sigma\tau}$ de x_σ et un voisinage $W_{\tau\sigma}$ de y_τ tels que $V_{\sigma\tau} \cap W_{\tau\sigma} = \emptyset$. On se fixe un $V_{\sigma\tau}$ et un $W_{\tau\sigma}$ pour tout τ et tout σ.
Soient $V_\sigma := \bigcap_\tau V_{\sigma\tau}$ et $W_\tau := \bigcap_\sigma W_{\tau\sigma}$. On remarque que, pour tout τ et tout σ,

$$V_\lambda \cap W_\mu = \emptyset$$

Soient $V := \bigcap \sigma^{-1} V_\sigma$ et $W = \bigcap \tau^{-1} W_\tau$. Ce sont des voisinages de respectivement x_{id} et y_{id}. Les ensembles $\pi(V)$ et $\pi(W)$ contiennent respectivement $[x]$ et $[y]$ et sont disjoints. $Sym^k(M)$ est donc séparé.
En effet, supposons qu'il existe $[z] \in \pi(V) \cap \pi(W)$ alors, si on note z un de ses représentants, il existe $\lambda, \mu \in \mathfrak{S}_k$ tels que :

$$\lambda z \in V \text{ et } \mu z \in W$$

Ainsi,

$$z \in \lambda^{-1} V \cap \mu^{-1} W \subset V_\lambda \cap W_\mu$$

D'où, la contradiction.

□

Dans la suite, on considérera $M = \mathbb{C}^p$ (ou ses ouverts) avec la topologie classique.
Pour donner une structure complexe sur $Sym^k(\mathbb{C}^p)$, nous allons montrer que $Sym^k(\mathbb{C}^p)$ est un sous-ensemble algébrique de $\bigoplus_{j=0}^k S^j(\mathbb{C}^p)$ où $S(\mathbb{C}^p) = \bigoplus_{i\geq 0} S^i(\mathbb{C}^p)$ est l'algèbre symétrique de $\mathbb{C}^p$:
Soit $S_j : Sym^k(\mathbb{C}^p) \to S^j(\mathbb{C}^p)$ l'application définie pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$ par :

$$S_j(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_j\leq k} x_{i_1} \ldots x_{i_j}$$

Proposition 1.4. *L'application $S = \bigoplus_{j=0}^k S_i : Sym^k(\mathbb{C}^p) \to \bigoplus_{j=0}^k S^j(\mathbb{C}^p)$ est propre et induit un homémorphisme sur son image. Cette image est un sous-ensemble algébrique de $\bigoplus_{j=0}^k S^j(\mathbb{C}^p)$*

Démonstration. cf [BM14] p 67 □

Théorème 1.5. *Soient V un ouvert de $Sym^k(\mathbb{C}^p)$ et M une variété complexe.*

— *Une fonction $f : V \to \mathbb{C}$ est holomorphe si, et seulement si, la fonction $f \circ \pi : \pi^{-1}(V) \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe (où $\pi : (\mathbb{C}^p)^k \to Sym^k(\mathbb{C}^p)$ est la projection canonique).*
— *Une application $M \to V$ est holomorphe si c'est une application continue telle que pour toute fonction holomorphe $Sym^k(\mathbb{C}^p)$, leur composée est holomorphe.*

Démonstration. [BM14] p 78-85 □

1.2.1 Revêtements ramifiés

L'utilité de ces produits symétriques est de permettre de décrire les revêtements ramifiés :

Définition 1.6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Un polydisque (ouvert) de $\mathbb{C}^p$ est un sous-ensemble U de $\mathbb{C}^p$ tel qu'il existe $R_1, \ldots, R_p \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ tels que :

$$U = \{(x_1, \ldots, x_r) \mid \forall i \in \{1, \ldots, p\}, |x_i| < R_i\}$$

Lorsque qu'il n'y aura pas de risque de confusion (et notamment si tous les R_i sont finis), on notera Δ^k un polydisque de $\mathbb{C}^k$ (car ils sont tous isomorphes).

Définition 1.7. Soit U un espace analytique normal de dimension finie et B un polydisque de $\mathbb{C}^p$ (qui peut être égal à $\mathbb{C}^p$).
On appelera revêtement ramifié de degré k de U , contenu dans $U \times B$, la donnée d'un nombre fini de sous-ensembles analytiques irréductibles Z_i fermés disjoints dans $U \times B$, affectés de multiplicités $n_i > 0$, tels que la restriction à chaque Z_i de la projection naturelle $U \times B \to U$, soit propre, surjective et de degré k_i [1], de sorte que l'on ait $\sum n_i k_i = k$.
On notera $|Z|$ le revêtement ramifié $(Z_i, 1)$ que l'on appelera support de Z qu'on identifiera avec l'ensemble analytique $\bigcup Z_i$.

Remarque 1.8. Cette définition de revêtements ramifiés peut être relié à celle plus classique disant que c'est une application propre à fibre finies $|Z| \to U$ qui soit un revêtement sur un ouvert de Zariski de U.

Définition 1.9. On appellera ensemble de ramification de $|Z|$, noté $R(|Z|)$, la réunion de l'ensemble des points singuliers de U et de l'ensemble des points de U ne possédant pas un voisinage ouvert V dans U tel que $|Z| \cap V \times \mathbb{C}^p$ soit un revêtement de V par la projection naturelle.

Proposition 1.10. *Soit U un espace analytique normal de dimension finie et soit B un polydisque de $\mathbb{C}^p$ (ou bien $\mathbb{C}^p$).*
Il y a une bijection naturelle entre l'ensemble des revêtements ramifiés de degré k de U, contenus dans $U \times B$, et l'ensemble des applications analytiques

1. ici, propre implique finie

$f : U \to Sym^k(B)$.

On a, alors,

$$(f \times id_B)^{-1}(Sym^k(\mathbb{C}^p)\sharp\mathbb{C}^p) = |X|$$

où $Sym^k(\mathbb{C}^p)\sharp\mathbb{C}^p = \Big\{(x,y) \in Sym^k(\mathbb{C}^p) \times \mathbb{C}^p \mid \sum_{h=0}^{k}(-1)^h S_h(x) y^{k-h} = 0\Big\}$.

Idée de preuve, voir [Bar75] p 25. Soit Z un revêtement ramifié de degré k de U, contenus dans $U \times B$.
Comme l'ensemble des points singuliers de U est inclus dans l'ensemble des points de ramifications alors tous les points de $U \setminus R(|Z|)$ sont lisses et donc, pour tout point $t \in U \setminus R(|Z|)$, il existe un voisinage ouvert V_t de t isomorphe à un polydisque (et est donc simplement connexe). Le fait que V_t soit simplement connexe nous donne l'existence de branche locale $(f_j)_{j\in\{1..k\}}$ de Z sur V_t [2]. Celles-ci sont uniques à permutation près.
Posons $f_t := q(f_1, \ldots, f_k) : V_t \to Sym^k(B)$ où $q : B^k \to Sym^k(B)$ est l'application quotient. Par unicité (à permutation près), on a $f_{t_1} = f_{t_2}$ sur $V_{t_1} \cap V_{t_2}$. Elles se recollent en une application $f : U \setminus R(|Z|) \to Sym^k(B)$.
Soit $S : Sym^k(\mathbb{C}^p) \to \bigoplus_{j=0}^{k} S^j(\mathbb{C}^p) =: E$ le plongement de 1.4. Montrons que l'application $S \circ f : U \setminus R(|Z|)$ s'étend holmormophiquement sur tout U. Par normalité de U (voir 0.25), il suffit de montrer que cette application est localement bornée sur $R(|Z|)$. Si $t_0 \in R(|Z|)$ et si K est un voisinage compact de t_0 dans U, alors comme la projection $|Z| \to U$ est propre (car les projections $Z_i \to U$ le sont, par définition de revêtement ramifié) alors $|Z| \cap K \times B = \pi^{-1}(K)$ est compact. Sa projection est compacte et est donc inclus dans un polydisque relativement compact inclus dans B. On en déduit que, pour tout $t \in K \setminus (K \cap R(|Z|)$,

$$S(f(t)) \in S(Sym^k(\overline{B'}))$$

2. i.e. des applications $(f_j : V_t \to \mathbb{C}^p)$ telles que :
— les germes des f_j en tout point x de V_t sont des sections de $|Z| \to U$ autour de t
— Si en tout point x de V_t, la germe de f_j est répétée un nombre de fois égale à la multiplicité de la composante irréductible de $f_j(x)$

qui est compact. Ce qui permet de montrer que $S \circ f$ est localement bornée. Le prolongement de $S \circ f$ est à valeurs dans $S(Sym^k(B))$ par continuité. On peut donc définir f par composition avec S^{-1}.
Réciproquement, si on se donne une application holomorphe $f : U \to Sym^k(B)$, on veut construire un revêtement ramifié qui permet de récupérer f avec la construction précédente. On va montrer ce résultat par récurrence sur k :

Initialisation : Pour $k = 1$, cela vient du fait que pour un espace faiblement normal (et a fortiori un espace normal), on a une bijection naturelle entre les applications analytiques $U \to B$ et les graphes analytiques dans $U \times B$ (voir 0.28)

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang $k - 1$.
Posons :

$$|Z| = (f \times id_B)^{-1}(Sym^k(\mathbb{C}^p)\sharp\mathbb{C}^p)$$

On va maintenant construire un espace analytique dont le support est Z.
Soit (Z_i) la famille (finie) des composantes irréductibles de $|Z|$. L'application $|Z| \to U$ est surjective. Montrons qu'elle est propre :
Soit K un ouvert de U. Alors $f(K)$ est un compact de $Sym^k(B)$, il existe donc un polydisque B' relativement compact dans B tel que $f(K) \subset Sym^k(B')$, cela montre que l'image réciproque de K est un fermé inclus dans $K \times B'$, qui est compact. Celui-ci est donc compact.
Soit Z_i une composante irréductible de $|Z|$ telle que la projection sur Z_i soit surjective.
$(X_i, 1)$ est un revêtement ramifié de U contenu dans $U \times B$ de degré $k_i < k$.
Par la première partie de la preuve, il existe une application holomorphe $f_i : U \to Sym^{k_i}(B)$ tel que :

$$|Z_i| = (f_i \times id_B)^{-1}(Sym^k(\mathbb{C}^p)\sharp\mathbb{C}^p)$$

On peut montrer qu'il existe une fonction $g : U \to Sym^{(k-k_i)}(B)$ tels que :

$$\Delta_{k-k_i,k_i}(g \times f_i) = f$$

où $\Delta_{k-k_i,k_i} : Sym^{k-k_i}(B) \times Sym^{k_i}(B) \to Sym^k(B)$ est l'application induite par l'isomorphisme $B^{k-k_i} \times B^{k_i} \to B^k$.
Comme $k-k_i < k$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à g et obtenir un revêtement ramifié de degré $k - k_i$.
Posons $Z := Y + (X_i, k_i)$.
Montrons que l'application associée à Z est f.
Soit $t \in U \setminus (R(|Y|) \cap R(|Z_i|)$.
Par définition, les composantes irréductibles de Z sont X_i et les composantes irréductibles de Y. Ainsi, les branches locales de Z sont la juxtaposition des branches locales de Y et k_i fois celle de X_i. Ainsi, $\Delta_{k-k_i,k_i}(g \times f_i)$ est l'application associée à X sur $U \setminus (R(|Y|) \cap R(|Z_i|)$. On conclut par normalité de U. $\square$

1.3 Écailles

Définition 1.11. Une n-écaille sur un espace analytique X est la donnée d'un triplet $E = (U, B, f)$ où $U \subset \mathbb{C}^n, B \subset \mathbb{C}^p$ sont des polydisques relativement compacts et $f : V_E \to W$ est un biholomorphisme d'un ouvert de X dans un sous-espace analytique d'un voisinage W de $\overline{U} \times \overline{B}$. L'ouvert $f^{-1}(U \times B)$ est appelé centre de l'écaille.
On dira qu'une écaille (U, B, f) est adaptée au n-cycle Z si

$$f^{-1}(\overline{U} \times \partial B) \cap |Z| = \emptyset$$

Autrement dit, une écaille est la donnée d'une carte de X dans un ouvert $W \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ tels que $\overline{U} \times \overline{B} \subset W$.

Le lemme suivant nous dit qu'on peut toujours trouver une écaille adaptée à un cycle donné :

Lemme 1.12. *Soit X un espace analytique. Pour tout n-cycle complexe Z, tout point $z \in X$ et tout voisinage V de z, il existe une n-écaille adaptée à Z dont le centre contient z et dont le domaine est contenu dans V. Si $z \notin |Z|$, on peut choisir E de sorte que* $\deg_E(Z) = 0$.

Démonstration. Cela vient du théorème de paramétrisation locale cf. [BM14] thm 3.5.4 page 154 et du caractère local de la définition d'écaille adaptée. □

Si $E = (U, B, f)$ est une écaille de X et $Z = \sum n_i Z_i$ un cycle de X, on note par $f_*(Z \cap V_E)$ le cycle $\sum n_i f(V_E \cap Z_i)$. Si, de plus, E est une écaille adaptée à X alors on a un revêtement ramifié $Z_E := f_*(Z \cap V_E) \cap U \times B \to U$ ([BM14] p 151). On notera par $\deg_E(X)$ le degré de ce revêtement ramifié.

Notation 1.13. Soit $U \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert relativement compact de $\mathbb{C}^n$ et F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On note $\mathcal{H}(\overline{U}, F)$ l'espace de Banach des applications continues $\overline{U} \to F$, holomorphes sur U muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in \overline{U}} \|f(x)\|_F$

Remarque 1.14. Si l'écaille $E = (U, B, f)$ est adaptée au cycle Z, alors $f_*(Z \cap V_E)$ définit un revêtement ramifié sur U_1, un polydisque ouvert suffisamment petit contenant $\overline{U}$ (tel que $U_1 \times \overline{B} \subset W$). En notant $k = \deg_E(Z)$, on peut donc associer à Z un élément $f_E \in \mathcal{H}(\overline{U}, Sym^k(B))$ tel que le cycle sous-jacent à son graphe coïncide avec Z_E sur $U \times B$ en restreignant l'application obtenue par 1.10 à $\overline{U}$ qui ne dépend pas du voisinage de $\overline{U}$ choisie.

1.4 Familles analytiques et espaces des cycles

Pour définir notre foncteur F_X^n, on va considérer, pour un espace analytique S, une certain type de familles paramétrées par S :

Définition 1.15. Soient X un espace analytique et S un espace analytique réduit. Une famille $(Z_s)_{s\in S}$ de n-cycles sera dite analytique [3] au voisinage de $s_0 \in S$, s'il existe un ouvert W relativement compact dans X tel que, pour chaque $s \in S$ suffisamment proche de s_0, on ait $|Z_s| \subset W$ et si, pour toute écaille $E = (U_E, B_E, f_E)$ adaptée à X_{s_0}, il existe un voisinage ouvert S_E de s_0 dans S tel que :

— E soit adapté à Z_s pour tout s dans S_E.

— $\deg_E(Z_s) = \deg_E(Z_{s_0})$ pour tout s dans S_E

— L'application $f_E : S_E \times U \to Sym^k(B_E)$ induite par les cycles $(f_{E*}Z_s)_{s\in S_E}$ est holomorphe.

La famille $(Z_s)_{s\in S}$ sera dite analytique si elle l'est en tout point.

Théorème 1.16. *Soit S un espace analytique réduit. Pour chaque famille analytique $(Z_s)_{s\in S}$ de cycles compacts de dimension n de X paramétrée par S, le sous-ensemble $Y = \{(s, z) \in S \times X \mid z \in |Z_s|\}$ de $S \times X$ est analytique fermé. La restriction à Y de la projection naturelle sur S est propre, surjective et à fibres de dimension n. Si S est irréductible, pour chaque composante irréductible Y_i de Y, il existe un entier $n_i \geq 0$, tel que les multiplicités des composantes irréductibles de $|Z_s|$ contenues dans Y_i soient génériquement sur S égales à n_i.*

Réciproquement, si S est normal, la donnée d'un nombre fini de sous-ensembles analytiques Y_i de $S \times X$ affectés d'entiers $n_i > 0$, tels que les projections $Y_i \to S$ soient propres, surjectives et à fibres de dimension n, définit une famille analytique $(Z_s)_{s\in S}$ de cycles de dimension n de X paramétrés par S.

3. dans [BM14], c'est analytique propre car ils considèrent une définition plus restrictive de famille analytique adaptée aux cycles non nécessairement compacts

On va maintenant définir un foncteur contravariant F_X^n des espaces complexes réduits de dimension finie dans celui des ensembles qui associe à S l'ensemble des familles analytiques de n-cycles paramétrées par S. Pour ce faire, il faut étudier comment il agit sur les morphismes d'espaces analytiques :

Lemme 1.17. *Si $f : S \to T$ est une fonction holomorphe et $(Z_t)_{t\in T}$ est une famille analytique alors $(Z_{f(s)})_{s\in S}$ est une famille analytique.*

Démonstration. Soit $s_0 \in S$. Soit W un ouvert relativement compact tel que pour $t \in T$ suffisamment proche de $f(s_0)$, on ait $|Z_t| \subset W$.
Alors, par continuité de f, pour tout s suffisamment proche de s_0, $|Z_{f(s)}| \subset W$.
Soit $E = (U, B, f)$ une écaille adaptée à $Z_{f(s_0)}$.
Comme $(Z_t)_{t\in T}$ est une famille analytique alors il existe un voisinage ouvert T_E de $f(s_0)$ dans T qui vérifient les conditions de la définition.
Soit $S_E := f^{-1}(T_E)$.
Par définition, E est adaptée à $Z_{f(s)}$ et $\deg_E(X_{f(s)}) = \deg_E(X_{f(s_0)})$ pour tout $s \in S_E$ car $f(S_E) \subset T_E$.
L'application $f_E : S_E \times U \to Sym^k(B)$ induite par les cycles $(f_*Z_{f(s)})_{s\in S}$ est la composée de l'application $f \times Id$ (qui est holomorphe) suivie de l'application induite par les cycles $(f_*Z_t)_{t\in T}$ (qui est holomorphe). Elle est donc holomorphe, ce qui permet de montrer que $(Z_{f(s)})_{s\in S}$ est analytique. □

Barlet a étudié ce foncteur dans [Bar75] et a montré le résultat suivant :

Théorème 1.18 (Barlet)**.** *F_X^n est un foncteur représentable par un espace analytique $\mathscr{C}_n(X)$.*

Pour exploiter ce résultat, on va utiliser le lemme de Yoneda :

Théorème 1.19 (Lemme de Yoneda)**.** *Soit $F : \mathcal{C} \to$ **Ens** un foncteur et $X \in Ob(\mathcal{C})$. Alors, on a une bijection naturelle,*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(X, -), F) \simeq F(X)$$

entre les transformations naturelles entre $\mathrm{Hom}(X,-)$ *et* F*, et les éléments de* $F(X)$

En particulier, si F est représentable par un objet X i.e. s'il existe un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}(X,-) \to F$ alors, par ce lemme, on obtient un objet $s \in F(X)$. On dira que le couple (X, s) est universel pour F.
Expliquons cette dénomination dans notre cas : F est un foncteur de la catégorie opposée à celle des espaces analytiques réduits de dimension finie à celle des ensembles.
Il existe une famille analytique de cycles indexés par $\mathscr{C}_n(X)$, $(C_s)_{s\in\mathscr{C}_n(X)}$, (le s du couple) telle que, pour tout espace complexe réduit de dimension finie S et toute famille analytique $(B_s)_{s\in S}$, il existe une unique application holomorphe $h : S \to \mathscr{C}_n(X)$ telle que pour tout $s \in S$, $B_s = C_{h(s)}$.
On appellera cette famille la famille universelle des n-cycles.
On en déduit qu'il existe une bijection entre $\mathscr{C}_n(X)$ et l'ensemble des n-cycles (en prenant S un singleton). On peut ainsi munir l'ensemble des n-cycles d'une structure d'espace analytique réduit de dimension finie.

Proposition 1.20. $\mathscr{C}_n$ *est un foncteur de la catégorie des espaces analytiques complexes réduits de dimension finie dans elle-même.*

Démonstration. Dans la proposition 1.1, on a vu que $\mathscr{C}_n$ est un foncteur de la catégorie des espaces analytiques réduits de dimension finie dans les ensembles.
Soit $f : X \to Y$ une fonction holomorphe.
Pour la structure d'espace analytique sur $\mathscr{C}_n(X)$, l'application $\mathscr{C}_n(f)$ est holomorphe par le théorème 3.5.4 p 459 de [BM14]

□

1.4.1 Cycles relatifs

Dans ce paragraphe, nous allons donner des énoncés sur les cycles relatifs qui peuvent être vus comme un analogue des familles de variétés vues dans 0.19.

Définition 1.21. Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces analytiques réduits. Un n-cycle Z de X est dit f-relatif s'il existe $y \in Y$ tel que l'on ait l'inclusion $|Z| \subset f^{-1}(y)$.
On notera $\mathscr{C}_n(X)^f$ les n-cycles f-relatifs de X

Théorème 1.22. *Soit $f : X \to Y$ une application entre deux espaces analytiques réduits. Alors, l'ensemble $\mathscr{C}_n(X)^f$ est un sous-espace analytique de $\mathscr{C}_n(X)$*

Démonstration. Voir [BM14] Chapitre 4, 8.2.2

□

Proposition 1.23. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre deux espaces analytiques réduits et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\{(y, Z) \in Y \times \mathscr{C}_n(X) \mid |Z| \subset f^{-1}(y)\}$ est un sous-espace analytique fermé dans $Y \times \mathscr{C}_n(X)$*

1.5 Topologie de $\mathscr{C}_n(X)$

L'espace analytique $\mathscr{C}_n(X)$ obtenu précédement est en particulier un espace topologique. Ces ouverts se décrivent de la façon suivante :

Théorème 1.24. *Un sous-ensemble U de $\mathscr{C}_n(X)$ est ouvert si, et seulement si, pour tout $Z_0 \in U$, il existe des écailles $E_1, \ldots, E_m$ sur M adaptée à Z_0 et un voisinage ouvert W de Z_0 tels que, si l'on pose $k_i := \deg_{E_i}(Z_0)$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$,on ait :*

$$\bigcap_{i=1}^{m} \left\{ Z \in \mathscr{C}_n(W) \mid E_i \textit{ est adaptée à } Z, \deg_{E_i}(Z) = k_i \right\} \subset U$$

En particulier,

Proposition 1.25. *Soit X un espace analytique réduit. Pour tout ouvert U de X, $\mathscr{C}_n(U)$ est un ouvert de $\mathscr{C}_n(X)$.*

Démonstration. En tout cycle de $\mathscr{C}_n(U)$, on choisit aucune écaille et $W = U$. $\square$

Proposition 1.26. *Soit $(Z_s)_{s\in S}$ une famille de n-cycles d'un espace analytique X. Alors cette famille est continue en $s_0 \in S$ si, et seulement si, pour toute écaille $E = (U, B, f)$ adaptée à X_{s_0}, il existe un ouvert S_0 de s_0 dans S, tel que, pour tout $s \in S_0$, l'écaille E soit adaptée à X_s et* $\deg_E(X_s) = \deg_E(X_{s_0})$.

Remarque 1.27. Les ouverts $\mathscr{C}_n^{loc}(X)$ sont donnés par les unions quelconques d'intersections finies des

$$\Omega_k(E) := \{Z \in \mathscr{C}_n^{loc}(X) \mid E \text{ est adaptée à } X, \deg_E(Z) = k\}$$

Par conséquent, si (Z_n) est une suite de $\mathscr{C}_n(X)$ et Z est un cycle compact de M alors Z_n converge vers Z dans $\mathscr{C}_n(X)$ si, et seulement si, Z_n converge vers Z dans $\mathscr{C}_n^{loc}(X)$ et pour tout voisinage ouvert de $|Z|$ dans X, il existe un entier N_W tel que pour tout $n \geq N_W$, $|Z_n| \subset W$

Les quatre résultats qui viennent sont énoncés pour $\mathscr{C}_n^{loc}$ pour la simplicité mais grâce à la remarque précédente, on peut les traduire dans $\mathscr{C}_n$.

Proposition 1.28. *Soient $U \subset \mathbb{C}^n$, $B \subset \mathbb{C}^p$ deux polydisques ouverts relativement compacts et un entier $k > 0$. Alors l'application*

$$\mathcal{H}(\overline{U}, Sym^k(B)) \to \mathscr{C}_n^{loc}(U \times B), f \mapsto Z_f$$

est continue. (Z_f est le cycle que l'on a associé à f dans 1.14)

Démonstration. Voir [BM14] p 386 □

Proposition 1.29. *Soit $E = (U, B, f)$ une écaille sur un espace analytique X. L'application naturelle $\mu : \Omega_k(E) \to \mathcal{H}(\overline{U}, Sym^k(B))$ est continue.*

Démonstration. Voir [BM14] p 385 □

Théorème 1.30. *Soient X un espace analytique complexe réduit et $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Alors, l'application induite par les restrictions*

$$res : \mathscr{C}_n^{loc}(X) \to \prod_{i\in I} \mathscr{C}_n^{loc}(X_i)$$

est un homéomorphisme sur son image (qui est fermée).

Démonstration. Voir [BM14] p 396 □

Proposition 1.31. *Soit $(Z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}_n^{loc}(X)$ telle que pour chaque $x \in X$, il existe un voisinage ouvert X_x tel que $(Z_m \cap X_x)_{m\in\mathbb{N}}$ soit une sous-suite convergente dans $\mathscr{C}_n^{loc}(X_x)$. Alors, la suite converge dans $\mathscr{C}_n^{loc}(X)$*

Démonstration. Voir [BM14] p 409 □

1.6 Topologie du groupe d'automorphismes

Soit X un espace analytique complexe réduit, compact, normal et connexe de dimension m et Y un espace analytique complexe. On identifiera une fonction holomorphe $X \to Y$ à son graphe, irréductible car X l'est (0.32) lui-même identifié à un m-cycle irréductible et réduit de $X \times Y$. Autrement dit, on identifie $Hol(X, Y)$ à un sous-ensemble de $\mathscr{C}(X \times Y)$.

Théorème 1.32. *Sous les hypothèses précédentes, $Hol(X, Y)$ est un ouvert de $\mathscr{C}_m(X \times Y)$.*

Démonstration. Soit $p : X \times Y \to Y$ la projection canonique et $p_* : \mathscr{C}_m(X \times Y) \to \mathscr{C}_m(X)$ l'application (holomorphe) d'image directe induite par p. Comme X est irréductible (par 0.32) alors le seul sous-espace irréductible de X est X et donc $\mathscr{C}_m(X) = \mathbb{N}[X]$.
$p_*^{-1}(1[X])$ est ouvert et fermé dans $\mathscr{C}(X \times Y)$ (car $1[X]$ l'est). Ainsi, $p_*^{-1}(1[X])$ est l'union de composantes connexes de $\mathscr{C}_m(X \times Y)$ et contient $Hol(X, Y)$.
Montrons que $Hol(X, Y)$ est un ouvert de $\mathscr{C}_m(X \times Y)$.
Soit $X_0 \in Hol(X, Y)$. Soient B_i un recouvrement (fini) de l'image de X_0 et $U_i := X_0^{-1}(B_i)$ un recouvrement de X. Ainsi, $X_0 \cap (U_i \times Y) \subset U_i \times B_i$.
Soit $L := \bigcup U_i \times (N \setminus B_i)$ un fermé de $X \times Y$ tel que : $L \cap X_0 = \emptyset$. Par 1.25, $\mathscr{C}(X \times Y \setminus L)$ est un ouvert de $\mathscr{C}(X \times Y)$. Ainsi, $U := p_*^{-1}(1[X]) \cap \mathscr{C}_m(X \times Y \setminus L)$ est un voisinage ouvert de X_0 dans $\mathscr{C}_m(X \times Y)$.
Montrons que $U \subset Hol(X \times Y)$:
Soient $Z \in U$, $p_Z : |Z| \to X$ la projection canonique. Cette application est propre car $|Z|$ est compact. De plus, comme $\dim(|Z|) = \dim(X)$, alors il existe un ouvert de Zariski V tel que la fibre $p^{-1}(x)$ soit finie. Comme $Z = |Z| \in p_*^{-1}(1[X])$ alors le degré de p_Z est de degré 1.
L'espace analytique $Z \cap V \times Y$ est le graphe de l'application $x \in V \subset X \mapsto \pi(p_z^{-1}(x)) \in Y$. Par faible normalité de X et le fait que $Z \cap V \times Y$ soit un espace analytique, on obtient que c'est le graphe d'une fonction holomorphe

$V \to Y$. La normalité de X nous donne que cette application se prolonge en une fonction holomorphe sur X (voir 0.25).

□

Proposition 1.33. *La topologie sur $Hol(X, Y)$ est la topologie de la convergence uniforme des applications holomorphes.*

Démonstration. On va commencer par considérer le cas où X est un sous-espace analytique de dimension m d'un ouvert V_1 de $\mathbb{C}^n$ et Y un sous-espace analytique d'un ouvert V_2 de $\mathbb{C}^p$:
Soit $f \in Hol(X, Y)$. Son graphe Γ est un espace analytique irréductible dans l'ouvert $V_1 \times V_2$ de $\mathbb{C}^{n+p}$.
Par la proposition 1.12 et la remarque 1.14 pour $\Gamma \times \Delta^{n-m}$, il existe deux polydisques U et B de, respectivement $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^{n-m-p}$ et une application $g \in \mathcal{H}(\overline{U}, Sym^1(B)) = \mathcal{H}(\overline{U}, B)$ tels que Γ soit localement associée à g. En prenant, les p premières composantes de g, on obtient une application $\widetilde{g} \in \mathcal{H}(\overline{U}, \Delta^p)$. Par construction,

$$f_{X \cap \overline{U}} = \widetilde{g}_X \tag{1.1}$$

Par la proposition 1.31, si une suite de cycles converge localement alors les restrictions se recollent. On peut donc travailler localement.
Par les propositions 1.28 et 1.29, une suite de fonctions holomorphe f_n (et donc leur graphe) convergent si, et seulement si, les applications $\widetilde{g_n} \in \mathcal{H}(\overline{U}, \Delta^p)$ convergent. Comme la topologie sur $\mathcal{H}(\overline{U}, \Delta^p)$ est celle de la convergence uniforme alors grâce à (1.1), la suite f_n converge dans $Hol(X, Y)$ si, et seulement si, elle converge uniformément.
Le cas général se déduit de celui-ci en utilisant la localisation de la convergence 1.31 et en remarquant que le fait suivant :
Soit $\{U_i\}_{i=1..n}$ un recouvrement (fini) d'espaces analytiques modèles de X. Alors, en notant par f_n une suite de fonctions holomorphes, f une fonction holomorphe et d la distance sur Y,

$$\|f - f_n\|_\infty := \max_{x \in X} d(f(x), f_n(x)) = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{x \in \overline{U_i}} d(f(x), f_n(x))$$

Et donc, si pour un $\varepsilon > 0$, on a une borne N_i pour que, pour tout $n \geq N_i$,

$$\max_{x \in \overline{U_i}} d(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

alors en notant $N := \max_{1 \leq i \leq n} N_i$, on a, pour tout $n \geq N$,

$$\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

□

Définition 1.34. Soit X un espace analytique. On munit $Aut(X)$ de la topologie induite par $Hol(X, X)$

2

Propriétés de l'espace des cycles et applications

2.1 Théorème de compacité de Liebermann et applications

On va maintenant étudier les propriétés de l'espace des cycles. On va commencer par démontrer une version généralisée du théorème de Bishop (voir A.9) donnant des conditions sur la convergence d'espaces analytiques pour la topologie de Hausdorff.
Soit X une variété complexe compacte.
On se fixe une métrique hermitienne h et la 2-forme ω associée. Ce choix ne change pas le théorème.

Théorème 2.1 (de compacité)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
Soit S un sous-ensemble normal de $\mathscr{C}_n(X)$. S est relativement compact si, et seulement si, il existe un compact contenant le support de chaque cycle de S, et si le volume de ces cycles est uniformément borné.

Démonstration. $\Rightarrow$: Supposons S compact.
Soit $(Z_s)_{s \in S}$ la famille de cycles analytiques donnée par la restriction de la famille universelle.

Soit $Y := \{(s,y) \in S \times X \mid y \in |Z_s|\}$ le "cycle universel".
La projection de Y sur S est propre (cf. 1.16).
Ainsi, si on note pr_1 (resp. pr_2) la projection de Y sur S (resp. sur X), on obtient que $pr_1^{-1}(S)$ est compact et donc $pr_2(pr_1^{-1}(S))$ l'est aussi. Mais on peut voir que $pr_2(pr_1^{-1}(S)) = \bigcup_{s\in S} |Z_s|$. Ensuite, l'application $s \in S \mapsto \frac{1}{k!}\int_{Z_s} \omega^k$ est une application continue comme composée de l'application continue $X \mapsto \frac{1}{k!}\int_X \omega^k$ (cf. C.12) et de l'application continue $s \mapsto Z_s$. Comme S est compact alors cette application est bornée, ce qui finit la preuve de l'implication.
$\Leftarrow$: Soit $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de cycles de S. Soit K un compact contenant tous les supports.
On va extraire une sous-suite de Z_i de sorte que les supports $|Z_i|$ convergent, pour la topologie de Hausdorff vers un compact que l'on notera $|Z_\infty|$(cf. A.2 et plus précisément la proposition A.8 pour la compacité de l'ensemble des compacts de K muni de cette topologie). On peut ensuite remarquer, en notant $Z_i = \sum m_{ij} Z_{ij}$ (avec $m_{ij} \neq 0$), que l'on a

$$Vol(|Z_i|) = \sum Vol(Z_{ij}) \leq \sum m_{ij} Vol(Z_{ij}) = Vol(Z_i)$$

C'est-à-dire, le volume des supports est uniformément bornée. On en déduit, par le théorème de Bishop(A.9) , que $|Z_\infty|$ est un ensemble analytique.
Montrons maintenant qu'une sous-suite de Z_i converge vers un cycle Z_∞ pour la topologie de l'espace de Barlet :
Soit U_i un recouvrement de $|Z_\infty|$ par des ouverts de X et pour chacun de ses ouverts une écaille adaptée $E_i = (\Delta^k, \Delta^{n-k}, j : U_i \to W \supset \overline{\Delta^k} \times \overline{\Delta^{n-k}})$ à X (elles existent par le lemme 1.12). Par définition d'écaille adaptée, on a alors, pour tout j,

$$d(f_j(|Z_0| \cap U_j), \overline{\Delta^k} \times \partial\Delta^{n-k}) > 0$$

Comme $\lim |Z_i| = |Z_\infty|$ alors, pour i suffisament grand et pour tout j,

$$d(f_j(|Z_i| \cap U_j), \overline{\Delta^k} \times \partial\Delta^{n-k}) > 0$$

Quitte à restreindre U_j, on a alors :

$$|Z_i| \cap U_j \cap f_j^{-1}(\overline{\Delta^k} \times \partial\Delta^{n-k}) = \emptyset$$

On en déduit que ${f_j}_*(|Z_i| \cap U_j)$ est un revêtement ramifié sur Δ^k. De même, en notant $Z_i = \sum m_{ik} Z_{ik}$, on obtient que ${f_j}_*(Z_{ik} \cap U_j)$ est un revêtement ramifié. On peut donc voir ${f_j}_*(Z_i \cap U_j)$ comme un revêtement ramifié à n_{ij} feuilles[1]
Comme le volume des Z_i est uniformément borné alors les n_{ij} le sont aussi (car il y a un nombre fini de j par compacité de $|Z_\infty|$ Les n_{ij} étant des entiers, on peut extraire une sous-suite de la suite Z_i de sorte que pour tout j, la suite $(n_{ij})_i$ soit constante.
Par la remarque 1.14, on peut identifier $({f_j}_*(Z_i \cap U_j))_j$ avec un point f_i de $B := \prod_j \mathcal{H}(\overline{\Delta^k}, Sym^{n_j}(\Delta^{n-k})$. On peut plonger $Sym^{n_j}(\Delta^{n-k})$ dans un certain $\mathbb{C}^N$ (voir 1.4). Ensuite, on sait que, pour tout ouvert $U' \subset U$ relativement compact, il existe une sous-suite de (f_i) qui converge uniformément sur $\overline{U'}$, par le théorème de Vitali[2]. Et ainsi, les cycles associés de $\mathscr{C}_n^{loc}(U' \times B)$ convergent (cf 1.28). Par le théorème de localisation 1.31, on en déduit la convergence dans $\mathcal{C}_n^{loc}(U \times B)$ On en déduit que les $Z_i \cap U_j$ convergent dans $\mathscr{C}_n^{loc}(U_j)$ (car les applications induites sont continues). Par le théorème 1.30, la suite Z_i converge dans $\mathscr{C}_n^{loc}(\bigcup U_j) \hookrightarrow \mathscr{C}_n^{loc}(X)$ vers Z_∞ (car $|Z_\infty| \subset \bigcup U_j$). Comme le support des Z_i est inclus dans K alors la suite converge dans $\mathscr{C}_n(X)$ (par la remarque 1.27). $\square$

Remarque 2.2. — Le théorème fonctionne aussi pour des espaces analy-

1. Si on a un cycle $Z = \sum_i n_i Z_i$ et des revêtements ramifiés $Z_i \to \Delta^k$ à m_i feuilles, on peut voir Z comme un revêtement ramifié à $\sum n_i m_i$ feuilles
2. qui dit que l'application de restriction $\mathcal{H}(\overline{U}, \mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\overline{U'}, \mathbb{C})$ est compacte

tiques compacts généraux (pour la bonne notion de métrique dessus).

— Le théorème est valable aussi si on remplace $\mathscr{C}_n(X)$ par l'espace analytique "banachique" $\mathscr{C}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_n(X)$ car dans les deux sens de l'inclusion, S rencontre qu'un nombre fini de $\mathscr{C}_n(X)$ et donc on peut supposer qu'il n'en rencontre qu'un.

Corollaire 2.3. *Si (M, ω) est une variété compacte de Kähler alors les composantes connexes de $\mathscr{C}_n(M)$ sont compactes*

Démonstration. Par la proposition C.13, l'application $X \in \mathscr{C}_n(M) \mapsto \int_X \omega^n$ est localement constante. En particulier, elle est constante sur les composantes connexes (et donc bornée). Par compacité de M, les composantes connexes de $\mathscr{C}_n(M)$ sont donc relativement compactes et donc compactes (car elles sont fermées). □

Une première application du théorème du compacité est de donner une application méromorphe des fibres $Y \to \mathscr{C}_n(X)$ d'une application holomorphe.

Théorème 2.4. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe propre et surjective entre deux espaces complexes irréductibles. Soit $n := \dim(X) - \dim(Y)$. Alors il existe une unique application méromorphe, que l'on appelera l'application fibre de f, $\varphi : Y \dashrightarrow \mathscr{C}_n(X)$ qui sur un ouvert de Zariski dense de Y associe à y le n-cycle réduit $f^{-1}(y)$ de X.*

Démonstration. Soit Y'' l'ensemble des points $y \in Y$ normaux dont la fibre est de dimension maximale n. De la même façon que dans la preuve de 2.7, l'ensemble des points dont la fibre est de dimension maximale est un ouvert de Zariski car f est surjective et propre. De plus, par la proposition 0.23, l'ensemble $N(X)$ des points normaux est un ouvert de Zariski. Ainsi, Y'' est un ouvert de Zariski de Y. Alors, par le théorème 1.16 avec le graphe de Γ (ou du moins, sa décomposition en irréductibles), on obtient l'unique application holomorphe $\varphi'' : Y'' \to \mathscr{C}_n(X)$ telle que $(\varphi(y))_{y\in Y}$ est une famille analytique dont les cycles coïncident génériquement avec les fibres de f.

Soit $\widetilde{Y}$ l'adhérence du graphe de φ dans $Y \times \mathscr{C}_n(X)$. Pour obtenir une application méromorphe, il nous faut montrer que c'est un espace analytique
Soit $\Gamma := \{(y, Z) \mid |Z| \subset f^{-1}(y)\}$. C'est un espace analytique par 1.23. De plus, Γ contient $\widetilde{Y}$. Il existe une composante irréductible Γ_0 de Γ qui contient $\widetilde{Y}$ et ce dernier contient un ouvert non vide de Γ_0.
En effet, si on prend $(y_0, Z_0) \in \widetilde{Y}$ suffisamment proche et en considérant une famille finie (car $f^{-1}(y_0)$ est compact) d'écailles adaptée à $f^{-1}(y_0)$ dont les centres recouvrent $f^{-1}(y_0)$, on voit que tout (y, Z) "suffisamment proche" vérifie $X = f^{-1}(y)$ grâce à 1.26.
L'ensemble Y'' est Zariski-ouvert dans Y et donc l'image réciproque du complémentaire de Y'' (qui est donc de dimension inférieure à N) est analytique fermée mais différent de Γ_0 (pour des questions de dimension) et est donc d'intérieur vide dans Γ_0. Autrement dit, le graphe de φ'' est dense dans Γ_0 i.e. $\widetilde{Y} = \Gamma_0$. On en déduit que $\widetilde{Y}$ est analytique.
Pour finir de montrer que c'est bien une application méromorphe, il faut montrer que $\tau : \widetilde{Y} \to Y$ est une modification propre.
Par définition, τ induit un isomorphisme entre le graphe de φ'' et Y''. Il ne reste plus qu'à montrer que τ est propre.
Soit K un compact de Y et considérons l'ensemble $\pi_2(\tau^{-1}(K))$ où $\pi_2 : \widetilde{Y} \to \mathscr{C}_n(X)$
On remarque que tous les support des cycles de $\pi_2(\tau^{-1}(K))$ sont inclus dans le compact $f^{-1}(K)$ (car f est compact). L'application $s \in K \mapsto \frac{1}{k!}\int_{Z_s} \omega^k$ est une application continue (voir démonstration 2.1 pour les détails) et est bornée car K est compact. On en déduit par le théorème 2.1 que $\pi_2(\tau^{-1}(K))$ est relativement compact et donc $\tau^{-1}(K)$ est inclus dans le compact $K \times \pi_2(\tau^{-1}(K))$ et est donc compact. Cela montre que τ est une application propre et donc que l'on a bien défini une application méromorphe $Y \dashrightarrow \mathscr{C}_n(X)$

$\square$

On peut affiner ce résultat en considérant un espace non irréductible :

Corollaire 2.5. *Soient S un espace normal et Z un cycle de $S \times X$ tel que $\pi_1 : |Z| \to S$ soit propre et surjective.*
Soit $S_0 = \{s \in S \mid \dim \pi^{-1}(s) = \dim |Z| - \dim S\}$.
Il existe une unique application méromorphe $S \dashrightarrow \mathscr{C}(X)$ qui, sur S_0, associe à s le cycle réduit $\pi_1^{-1}(s)$

Démonstration. On décompose $|Z|$ en composantes irréductibles : $|Z| = \bigcup Z_i$. Les images réciproques sont elles-mêmes irréductibles. On a donc des applications

$$\pi_{1i} : \pi_1^{-1}(Z_i) \to Z_i$$

surjectives et propres. On obtient par le théorème 2.4 que pour tout i, il existe une application méromorphe $\varphi_i : f^{-1}(Z_i) \dashrightarrow \mathscr{C}_{n_i}(Z_i)$. L'application d'image directe induite par l'inclusion $Z_i \hookrightarrow X$ (par 1.1) permet de recoller toutes ces applications en une application méromorphe $S \dashrightarrow \mathscr{C}(X)$. □

Cette proposition s'utilise pour construire des espaces quotients méromorphes dans le sens suivant :

Corollaire 2.6. *Soit X un espace analytique compact normal.*
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X définissant un ensemble analytique R. Il existe un espace analytique Q et une application méromorphe dominante $\pi : X \dashrightarrow Q$ tel que, pour tout x dans un ouvert de Zariski, on ait :

$$\overline{\pi^{-1}(\pi(x))} = \{y \in X \mid y\mathcal{R}x\}$$

Démonstration. Comme l'ensemble analytique R peut être vu comme un cycle (grâce à sa décomposition en irréductibles)et que l'on a une projection $p : |R| = R \to X$ qui est surjective et propre. On obtient, grâce au corollaire 2.5, une application $X \dashrightarrow \mathscr{C}(X)$ qui sur un ouvert de Zariski de X envoie x sur $p^{-1}(x)$. On définit Q comme l'adhérence de Zariski de l'image de cette application. On en déduit ainsi le résultat voulu.

□

2.2 Applications aux automorphismes et la théorie de la déformation

Comme vu dans 1.6, on peut voir $Aut(X)$ comme un sous-ensemble de $\mathscr{C}_{\dim(X)}(X \times X)$ grâce au graphe. Mais, on peut dire beaucoup plus : dans les composantes irréductibles où il y a un automorphisme, $Aut(X)$ est un ouvert de Zariski de cette composante :

Théorème 2.7. *Soit X un espace analytique complexe compact et f un automorphisme de X. Soit $\mathscr{C}_\Gamma$ la composante irréductible de l'espace des cycles contenant le graphe de f. Alors, l'ensemble des points de $\mathscr{C}_\Gamma$ correspondant aux automorphismes de X est un ouvert de Zariski.*

Démonstration. On supposera X lisse et irréductible.
Soit $Z = \{(x, y, c) \in X \times X \times \mathscr{C}_\Gamma \mid (x, y) \in Z_c\}$ le cycle universel (où Z_c est le support de c [3]). La projection naturelle $\pi_3 : Z \to \mathscr{C}_\Gamma$ est propre (cf. 1.16). Quitte à remplacer $\mathscr{C}_\Gamma$ par un ouvert de Zariski, on peut supposer $\mathscr{C}_\Gamma$ lisse.
Par le théorème 0.15, il existe un ouvert de Zariski U tel que $\pi_{3|U}$ soit une submersion. Quitte à restreindre $\mathscr{C}_\Gamma$, on peut supposer que toutes les fibres de π sont lisses et de même dimension $\dim(Z) - \dim(\mathscr{C}_\Gamma)$ (on redéfinit $\mathscr{C}_\Gamma$ par $\pi_3(U)^c$ qui est un ouvert de Zariski car π est propre) et donc Z par $Z \cap X \times X \times \pi_3(U)^c)$.
De la même façon, pour les projections $\pi_i : Z \to X$, on obtient que, sur un ouvert de Zariski S_i de Z, ce sont des submersions. Elles induisent donc pour tout $c \in \mathscr{C}_\Gamma$, une submersion $\pi_{i,c} : U_c \subset Z_c \to X$ car pour tout $y \in X$, $\pi_i^{-1}(y)$ et Z_c s'intersectent transversalement dans Z (car pour tout $x \in \pi_i^{-1}(y)$, $T_x\pi^{-1}(y) \subset Kerd_x\pi_i$ et que $\dim(\pi_i^{-1}(y)) + \dim(Z_c) = \dim(Z)$) et donc $\pi_{i,c}^{-1}(y) = \pi^{-1}(y) \cap Z_c$ est une variété lisse (lorsqu'elle n'est pas vide) de codimension

$$codim(\pi_i^{-1}(y)) + codim(Z_c) = \dim(Z) - \dim(\mathscr{C}_\Gamma) + \dim(Z) - \dim(X) = \dim(Z)$$

3. On utilise cette notation pour insister sur le fait que ce sont des fibres (de π_3)

i.e de dimension nulle.
On en déduit, pour des questions de dimension, que $d\pi_{i,c}$ est un isomorphisme sur les points où la fibre n'est pas vide. L'application π_i est une surjection car si ce n'était pas le cas $\pi_{i,c}(U_c)$ serait un espace analytique de dimension strictement inférieur à n (car $\pi_{i,c}$ est propre). Or, cela voudrait que ses fibres serait de dimension supérieure ou égale à 1 . Or, ce n'est pas le cas car c'est un difféomorphisme local.
Pour finir, montrons que les points de $\mathscr{C}_\Gamma \setminus \pi_3(S_1^c \cup S_2^c)$ correspondent aux automorphismes de X.
Soit c un cycle de $\mathscr{C}_\Gamma$.
Les applications $\pi_i : Z_C \to X$ sont des revêtements propres (car toutes les points de X sont des valeurs régulières).
Comme $\mathscr{C}_\Gamma$ est connexe et localement connexe par arcs alors il est connexe par arcs. Il existe donc un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \mathscr{C}_\Gamma$ entre c et Γ.
Soit $x \in X$. Il existe un ouvert de X autour de x qui est biholomorphe à un polydisque ouvert relativement compact B (carte holomorphe). Ainsi, pour U un polydisque inclus dans $f(B)$, (B, U, π_i) définit une écaille adaptée au cycle Γ. Par continuité de la famille $(\gamma(t))_{t\in[0,1]})$ et la proposition 1.26, le degré du revêtement reste constant, ce qui permet de conclure que $\pi_{i,c}$ a le même nombre de feuilles que $\pi_{i,\Gamma}$ i.e. 1.
π_i est donc un homéomorphisme et donc par l'isomorphisme précédent et le théorème d'inversion locale, c'est un biholomorphisme.

□

Remarque 2.8. On peut remarquer que l'on peut remplacer l'automorphisme f par un isomorphisme $f : X \to Y$.

Le théorème suivant est la version relative du théorème 2.1 et du théorème précédent (mais n'est pas dans l'article de Liebermann).

Théorème 2.9. *Soit* $\pi_i : \mathscr{X}_i \to B_i$, $i = 0, 1$ *un morphisme lisse et propre d'espaces analytiques complexes dont toutes les fibres sont des variétés de*

Kähler. Soit E un sous-ensemble de $B_0 \times B_1$ inclus dans un compact K. Soit $Z = (Z_T)_{T \in E}$ une famille analytique de cycles de $\mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_1$ tel que, pour tout $(t, t') \in E$, $Z_{t,t'}$ soit le graphe d'un biholomorphisme de $(\mathscr{X}_0)_t$ dans $(\mathscr{X}_1)_{t'}$. Alors,

1. *Z rencontre un nombre fini de composante irréductible de $\mathscr{C}_n(\mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_1)$.*
2. *Soit $\mathscr{C}_0$ une composante irréductible des cycles $\pi_0 \times \pi_1$-relatifs rencontrant Z. Il existe un ouvert de Zariski de $\mathscr{C}_0$ tel que tout cycle de cet ouvert est le graphe d'un biholomorphisme entre une fibre de $\mathscr{X}_0$ et une fibre de $\mathscr{X}_1$.*

Démonstration. 1) Soit $(t_0, t'_1) \in E$. Posons $M := \pi_0^{-1}(t_0) \simeq \pi_1^{-1}(t'_1)$.
Alors par le théorème 4.5 de [Cat88], les fibres de π_0 (et de π_1) sont toutes difféomorphes (pas nécessairement biholomorphe) à M. On peut définir deux familles continues $(\omega_{0,t})$ et $(\omega_{1,t'})$ de formes de Kähler sur M obtenue par pullback et une famille de difféomorphismes f_t de M obtenue à partir des biholomorphismes $(\mathscr{X}_0)_t \to (\mathscr{X}_1)_{t'}$. Ainsi,

$$Vol(Z_{t,t'}) = \frac{1}{n!} \int_M \omega_{0t} + f_t^* \omega_{1,t'} = \frac{1}{n!} \int_M \omega_{0t} + \omega_{1,t'}$$

L'application $v : (t, t') \in E \mapsto Vol(Z_{t,t'})$ est donc continue. Comme E est inclus dans un compact alors v est bornée.
On peut maintenant utiliser le théorème 2.1 : le volume $Z_{t,t'}$ est uniformément borné et les supports des $Z_{t,t'}$ est inclus dans $(\pi_0 \times \pi_1)^{-1}(K)$ qui est compact. Z est donc relativement compact et donc rencontre un nombre fini de composantes irréductibles de $\mathscr{C}_n(\mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_1)$.
2) La démonstration de cette partie est l'analogue relatif du théorème 2.7.
Soit A le cycle universel de $\mathscr{X}_0 \times \mathscr{X}_1 \times \mathscr{C}_0$. La projection $p_3 : A \to \mathscr{C}_0$ est propre et est donc lisse sur un ouvert de Zariski de $\mathscr{C}_0$.
Soit $c \in \mathscr{C}$. Alors, il existe $(t, t') \in B_0 \times B_1$ tel que $c \in \mathscr{C}_n((\mathscr{X}_0)_t \times (\mathscr{X}_1)_{t'})$.
Soit $x \in (\mathscr{X}_0)_t$ (ou $(\mathscr{X}_1)_{t'}$).

Comme dans 2.7, on va étudier l'intersection $p_1^{-1}(x) \cap Z_c$:

$$p_1^{-1}(x) \cap Z_c = p_1^{-1}(x) \cap ((\mathscr{X}_0)_t \times (\mathscr{X}_1)_{t'} \times \mathscr{C}_n((\mathscr{X}_0)_t \times (\mathscr{X}_1)_{t'})) \cap Z_c$$

Grâce à cette égalité, on peut juste considérer la restriction de π_1 sur $Z \cap ((\mathscr{X}_0)_t \times (\mathscr{X}_1)_{t'} \times \mathscr{C}_n((\mathscr{X}_0)_t \times (\mathscr{X}_1)_{t'}))$ et on est ramené au cas non relatif de 2.7. Ainsi, $p_1 : Z_c \to (\mathscr{X}_0)_t$ est un biholomorphisme local surjectif (idem pour $p_2 : Z_c \to (\mathscr{X}_1)_{t'}$).

De même, comme tous les cycles de $\mathscr{C}_0$ sont dans un $\mathscr{C}_n((\mathscr{X}_0)_t, (\mathscr{X}_1)_{t'})$ et qu'il existe un biholomorphisme dans la composante $\mathscr{C}_0$ alors on peut utiliser l'argument final d'homotopie de 2.7, pour dire que que les projections $Z_c \to (\mathscr{X}_0)_t$ et $Z_c \to (\mathscr{X}_1)_{t'}$ sont des homéomorphismes. Comme, de plus, ce sont des difféomorphismes locaux alors ce sont des biholomorphismes.

□

Dans le cas où X est une variété de Kähler, les composantes irréductibles de $Aut(X)$ admettent une compactification qui est la composante irréductible associée de $\mathscr{C}_{\dim(X)}(X \times X)$ (qui est compact par 2.3).

Le contre-exemple qui suit nous montre le théorème n'est pas vrai si X n'est pas de Kähler.

Exemple 2.10. Soit E un tore complexe. Soit $T : E \times E \to E \times E$ l'application donnée par $(x, y) \mapsto (x + y, x + 2y)$. Soit $\tau \in \mathbb{C}$, $Im(\tau) > 0$.

On fait agir $\mathbb{Z}^2$ sur $E \times E \times \mathbb{C}$ par : $(n, m) \cdot (x, y, \lambda) := (T^m(x, y), \lambda + n + m\tau)$.

Cette action est sans point fixe car si $\lambda = \lambda + n + m\tau$ alors, comme $Im(\tau) > 0$, $m = 0$ et donc $n = 0$. Elle est aussi propre car un compact de $E \times E \times \mathbb{C}$ est inclus dans un $E \times E \times B(0, a)$ Soit X la variété quotient de $E \times E \times \mathbb{C}$ par l'action.

La variété X est un fibré au dessus de $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ par l'application $p : [(x, y, \lambda)] \in X \mapsto [\lambda] \in \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$.

Cette application est bien définie car pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$,

$$p((n,m)\cdot(x,y,\lambda)) = p(T^m(x,y), \lambda+n+\tau m) = [\lambda+n+\tau m] = [\lambda] = p(x,y,\lambda)$$

Les fibres de p sont toutes isomorphes à $E \times E$. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $q \in p^{-1}([\lambda])$, il existe un unique couple (x, y) tel que $q = [x, y, \lambda]$. En effet, soit $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{\lambda})$ un représentant de q. Alors, par définition, $\widetilde{\lambda} \in [\lambda]$ et donc il existe $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\widetilde{\lambda} = \lambda + n + \tau m$. Ainsi, on définit (x, y) tels que : $(x, y, \lambda) = (-m, -n) \cdot (\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{\lambda})$. L'unicité se montre par le fait que l'action n'est pas de point fixe.

Calcul de $Aut_0(X)$ Pour étudier $Aut_0(X)$, nous allons calculer son algèbre de Lie, l'espace des champs de vecteurs sur X :
On note par $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ la base des champs de vecteur sur, respectivement, le premier E, le deuxième et sur $\mathbb{C}$. On obtient ainsi une base des champs de vecteurs sur $E \times E \times \mathbb{C}$. Un champ de vecteur holomorphe sur X peut être relevé sur $E \times E \times \mathbb{C}$ où il doit avoir la forme

$$\psi = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + g \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

où f_1, f_2 et g sont des fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant les égalités, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
- $\forall m, n \in \mathbb{Z}, g(\lambda + n + m\tau) = g(\lambda)$
- $f_j(\lambda + 1) = f(\lambda)$, $j = 1, 2$
- $f_1(\lambda + 1) = 2f_1(\lambda) - f_2(\lambda)$
- $f_2(\lambda + \tau) = -f_1(\lambda) + f_2(\lambda)$

Pour montrer cela, on va commencer par considérer un champ de vecteurs holomorphe ψ sur X et une fonction holomorphe $f : X \to \mathbb{C}$ et leur relèvement sur $E \times E \times \mathbb{C}$ (que l'on notera de la même façon). Alors, on obtient, pour tout $Z = (x, y, \lambda) \in E \times E \times \mathbb{C}$ et pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\psi(f)(Z) = \psi(f)((n,m)\cdot Z) = \psi(f)((n,m)\cdot Z) = \psi(f)(T^m(x,y), \lambda+\tau m+n)$$

En écrivant ψ sous la forme $f_1\frac{\partial}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial}{\partial x_2}+g\frac{\partial}{\partial \lambda}$ et $T^p=(T_1^p,T_2^p)$ pour $p\in\mathbb{N}$, on obtient :

$$\psi(f)(Z)=f_1(\lambda+\tau m+n)\left[\frac{\partial T_1^m}{\partial x_1}(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1}(T(x_1,x_2)+\frac{\partial T_2^m}{\partial x_1}(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(T(x_1,x_2)\right]$$

$$+f_2(\lambda+\tau m+n)\left[\frac{\partial T_1^m}{\partial x_2}(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_1}(T(x_1,x_2)+\frac{\partial T_2^m}{\partial x_2}(x_1,x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(T(x_1,x_2)\right]+g(\lambda+\tau m+n)\frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

En identifiant les coefficients, on obtient immédiatement que, pour tout $m,n\in\mathbb{Z}$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$g(z+\tau m+n)=g(z)$$

Ensuite, pour $(m,n)=(0,1)$, $T^m=Id$ et $\frac{\partial T_i^m}{\partial x_j}=\delta_{ij}$ et donc $f_j(\lambda+1)=f_j(\lambda)$.
Pour $(m,n)=(0,1)$, on obtient

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda)\\ f_2(\lambda)\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} f_1(\lambda+\tau)\\ f_2(\lambda+\tau)\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Les autres cas se déduisent de ceux-là.
Comme g est une fonction holomorphe doublement périodique alors g est constante.
On écrit les f_j en une série de Fourier :

$$f_j(\lambda)=\sum_\alpha c_{j\alpha}e^{2i\pi\alpha\lambda}$$

On a donc $f_j(\lambda+\tau)=\sum_\alpha c_{j\alpha}e^{2i\pi\alpha(\lambda+\tau)}$.
Par l'équation (2.1), $f=0$ sauf si $e^{-2i\pi\alpha\tau}$ est une valeur propre de T.
Pour des valeurs génériques de τ, les champs de vecteurs sur X sont des multiples de $\frac{\partial}{\partial\lambda}$.
Ainsi, $Aut_0(X)$ est composé des applications $\varphi_a:[x,y,\lambda]\in X\mapsto[x,y,\lambda+a]\in X$ pour $a\in\mathbb{C}$.

Étudions maintenant l'action de $Aut_0(X)$ sur X :
Soit $p = [x, y, \lambda] \in X$. Quitte à translater, on peut supposer que $\lambda = 0$
Si $a \in [m, m+1[\oplus \mathbb{R}i$ alors $\varphi_a(p) = [T^{-m}(x, y), a - m]$. Pour des valeurs génériques de $(x, y) \in E \times E$, (x, y) n'est pas une valeur propre de T et par conséquence, l'orbite de p est Zariski-dense dans X.
Si $\mathscr{C}_\Delta(X \times X)$ est une compactification de $Aut_0(X) \simeq \mathbb{C}$ alors $\mathscr{C}_\Delta(X \times X) \simeq \mathbb{P}^1$ et l'action de $Aut_0(X)$ s'étend en une action méromorphe de $\mathbb{P}^1$ sur X et en projetant le graphe Γ (qui est compact car $\mathbb{P}^1$ l'est), on obtient un espace analytique fermé de X qui contient l'orbite (dense) de $Aut_0(X)$, ce qui aboutit à une contradiction dû au fait que $\mathbb{P}^1$ est de dimension 1 et X 3. □

On va maintenant donner des applications du théorème 2.7 :
Soit (X, ω) une variété compacte de Kähler de dimension n. On rappelle que $Aut_\omega(X)$ est le groupe des automorphismes de X préservant la classe de ω. On veut étudier le groupe quotient $Aut_\omega(X)/Aut_0(X)$ (où $Aut_0(X)$ est la composante de l'identité) . Pour cela, on va commencer par montrer qu'il est bien défini :

Lemme 2.11. *$Aut_0(X) \subset Aut_\omega(X)$*

Démonstration. Voir 0.47 et plus généralement le paragraphe 0.3 □

Lemme 2.12. *$Aut_0(X)$ est un sous-groupe distingué de $Aut(X)$*

Démonstration. $Aut_0(X)$ est un sous-groupe de $Aut(X)$ car on a $Id \in Aut_0(X)$ et si on note par μ l'application $(x, y) \in Aut_0(X) \times Aut_0(X) \mapsto xy^{-1} \in Aut(X)$, on obtient une application continue et comme $Aut_0(X) \times Aut_0(X)$ est connexe alors son image aussi et comme l'identité est dans cette image alors, pour tout $x, y \in Aut_0(X), xy^{-1} \in Aut_0(X)$.
On montre de la même façon que $Aut_0(X)$ est distingué en considérant,pour tout $x \in G$, l'application $h \in G_0 \mapsto xhx^{-1}$. □

En particulier, $Aut_0(X)$ est un sous-groupe distingué de $Aut_\omega(X)$.

Proposition 2.13. *Le quotient $Aut_\omega(X)/Aut_0(X)$ est un sous-groupe fini.*

Démonstration. Soit $f \in Aut_\omega(X)$ i.e. $[f^*\omega] = [\omega]$. Le volume de son graphe est donné, en utilisant C.8,

$$Vol(\Gamma_f) = \frac{1}{n!}\int_X (\omega + f^*\omega)^n = \frac{2^n}{n!}\int_X \omega = \frac{2^n}{n!}Vol(X)$$

Le volume de Γ_f est uniformément borné sur $Aut_\omega(X)$. Par conséquent, par 2.1 $Aut_\omega(X)$ rencontre un nombre fini de composantes irréductibles de $\mathscr{C}(X)$. Par le théorème 2.7, les composantes irréductibles de $Aut_\omega(X)$ sont en bijection avec ces composantes alors que $Aut_0(X)$ correspondant à la composante de $\mathscr{C}_\Delta(X)$, ce qui permet de conclure.

□

Avant de donner une autre application du théorème 2.7, on va redonner (voir aussi A.15) la définition d'espace constructible dans le cadre des espaces analytiques et montrer la stabilité par l'image par une application propre.

Définition 2.14. Soit X un espace analytique complexe. Un sous-espace U est dit constructible si c'est l'union finie d'ensembles localement Zariski-fermés.

Lemme 2.15. *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe propre avec X irréductible et réduit, Y réduit. L'image d'un ensemble constructible de X est constructible*

Démonstration. On va se contenter de l'image d'un ouvert de Zariski U. Comme vu dans le paragraphe 0.1.2, l'ensemble

$$V = \{y \in Y \mid \dim(U \cap f^{-1}(y)) = \dim(X) - \dim(Y)\}$$

est un ouvert de Zariski de Y. V est inclus dans $f(U)$ car si $x \in f^{-1}(y) \cap U$ alors $y = f(x)$ et $x \in U$ donc $y \in f(U)$. Maintenant que l'on a cela, montrons le théorème par récurrence sur la dimension de Y :

Le cas de la dimension nulle est immédiat.
Soit $d \in \mathbb{N}$ et supposons le théorème vrai pour Y de dimension $< d$.
Soit $W_1, \ldots, W_t$ les composantes irréductibles de $f(U) \backslash V$. Ce sont des fermés de Z de dimension strictement inférieur à celle de Y.
On décompose les $f^{-1}(W_k)$ en composantes irréductibles : $f^{-1}(W_k) = \bigcup_{i=1}^{s_k} Z_{ki}$.
On considère ensuite les restrictions $f_{ij} : Z_{ij} \to W_i$ de f.
Par l'hypothèse de récurrence, $f_{ij}(Z_{ij})$ est constructible dans W_i et donc dans Y. On en déduit donc que $f(U) = V \cup \bigcup f_{ij}(Z_{ij})$ est constructible.

□

Proposition 2.16. *Soit $\pi : X \to T$ une application lisse propre d'espaces analytiques complexes. Supposons que les $X_t = \pi^{-1}(t)$ sont des variétés de Kähler avec une classe de Kähler ω_t dépendant continûment de t. Fixons une variété de Kähler (X_0, ω_0). L'ensemble $T_0 := \{t \in T \mid (X_0, \omega_0) \simeq (X_t, \omega_t)\}$ est constructible ($\varphi : (X_0, \omega_0) \to (X_t, \omega_t)$ est un isomorphisme de variétés de Kähler si $\varphi : X_0 \to X_t$ est un biholomorphisme et que $\varphi_* \omega_t = \omega_0$)*

Démonstration. Soit C l'union normalisée des composantes de l'espaces des cycles π-relatifs de $\mathscr{C}(X \times X_0)$ qui contiennent les graphes d'un isomorphisme $\varphi : (X_0, \omega_0) \to (X_t, \omega_t)$. Soit Z le cycle universel de $X \times X_0 \times C$. En utilisant le théorème 2.7 avec la remarque 2.8 associée, et le lemme 0.47, on obtient que le sous-ensemble de C corresponsant aux isomorphismes $(X_0, \omega) \simeq (X_t, \omega_t)$ est un ouvert de Zariski.
On a une application naturel holomorphe $\lambda : C \to T$ donnée par $c \mapsto \pi(\pi_1(Z_c))$: cette application est continue (comme composée d'application continue) et comme son graphe est l'image (modulo l'inversion des termes) de Z par l'application propre $(x, y, c) \in X \times X_0 \times C \mapsto (\pi(x), c) \in T \times C$, il est donc analytique. On en déduit, par normalité de C, que λ est holomorphe par 0.28.
Montrons maintenant que $\lambda : C \to T$ est propre.
Soit K un compact de T. Alors, pour tout $c \in \lambda^{-1}(K)$, le cycle Z_c est dans le compact $\pi^{-1}(K) \times X_0$. De plus, le volume de Z_c est constant : Pour tout

isomorphisme $f : (X_0, \omega_0) \to (X_t, \omega_t)$,

$$Vol(\Gamma_f) = \frac{1}{n!} \int_{X_0} (f^*\omega_t + \omega_0)^n = \frac{2^n}{n!} Vol(X_0)$$

Par continuité du volume, la constance est vrai pour tout Z_c. Par 2.1, $\lambda^{-1}(K)$ est compact. λ est donc propre.
On en déduit que $T_0 = \lambda(C_0)$ est constructible (car C_0 est un ouvert de Zariski) par 2.15

□

On voit mieux ce que ce théorème dit avec son corollaire suivant :

Corollaire 2.17. *Soit $(X_t)_{t \in T}$ une famille de variétés de Kähler tel que $(X_0, \omega_0) \simeq (X_t, \omega_t)$ sur un ensemble Zariski-dense de valeurs de t. Alors, cette famille est localement analytiquement triviale sur un ouvert de Zariski $U \subset T$*

Démonstration. Comme l'ensemble T_0 de 2.16 contient un ouvert de Zariski (cf. preuve de 2.15). On choisit une composante normalisé C de $\mathscr{C}(X \times X_0)$ contenant les isomorphismes $(X_0, \omega_0) \simeq (X_t, \omega_t)$ pour $t \in U$. On obtient ainsi le résultat (les fibres sont isomorphes à $Aut_{\omega_0}(X_0)$).

□

3

Actions compactifiables et théorème de Matsushima

Le but de cette partie est d'étudier les actions compactifiables en utilisant les résultats de la partie précédente.

3.1 Action compactifiable

3.1.1 Premières définitions et résultats

Commençons par définir ce qu'est une action compactifiable :

Définition 3.1. Soit X un espace analytique complexe compact. Soit H un groupe de Lie complexe connexe agissant sur X. On dit X agit de façon compactifiable s'il existe un espace analytique complexe compact Y, une application holomorphe injective $i : H \to Y$ telle que $i(H)$ est un ouvert de Zariski de Y et une application méromorphe $m : Y \times X \dashrightarrow X$ définit sur $i(H) \times X$ par :

$$m(i(h), x) = h \cdot x$$

Lorsque l'on a une action compactifible de H sur X, on peut munir H d'une topologie, dite de Zariski, définie par le fait que cses fermés sont de la forme

$i^{-1}(V)$ où V est un sous-espace analytique fermé de Y. On appelera $\mathscr{Z}$-ouverts (resp. $\mathscr{Z}$-fermés) les ouverts (resp. les fermés) de H pour cette topologie (que l'on appelera $\mathscr{Z}$-topologie sur H).

Cette topologie est, en général, plus grossière que la topologie de Zariski usuelle de H : Prenons $X = \mathbb{P}^n$ et $H = Aut_0(X) = PGL_{n+1}(\mathbb{C})$ (voir 0.39) que l'on peut compactifier avec $Y = \mathbb{P}^{(n+1)^2-1} = \mathbb{P}(\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}))$ et l'application méromorphe :

$$m : ([(c_{ij})], [(x_j)] \in Y \times \mathbb{P}^n \mapsto \left[\sum_j c_{ij}x_j\right] \in \mathbb{P}^n$$

Les sous-espaces analytiques de $\mathbb{P}^N$ sont des sous-ensembles algébriques, par le théorème de Chow [1]. On en déduit que les $\mathscr{Z}$-fermés de H sont les sous-ensembles algébriques de celui-ci.

Pour montrer que $\mathscr{Z}$-topologie de H est bien définie, il faut montrer que celle-ci ne dépend pas de la compactification choisie :

Proposition 3.2. *Soit H un groupe de Lie complexe connexe agissant effectivement sur un espace analytique complexe compact X. L'action est compactifiable si, et seulement si, le graphe des éléments de H forme un ouvert de Zariski d'un sous-espace analytique compact $\mathscr{C}(X \times X)$.*

Démonstration. $\Leftarrow$: On prend l'adhérence de H dans $\mathscr{C}(X \times X)$.

$\Rightarrow$: Supposons H compactifiable. Il existe donc un compact Y tel que H s'injecte dans Y et une application méromorphe $m : Y \times X \dashrightarrow X$. De ce fait, par définition, il existe $\Gamma \subset Y \times X \times X$ tel que la projection $\Gamma \to Y \times X$ soit une modification (propre) et $\Gamma \to X$ est holomorphe. Comme X est compact alors la projection $\Gamma \to Y$ est propre (et surjective). On peut donc appliquer la proposition 2.5 et obtenir une application méromorphe $Y \dashrightarrow \mathscr{C}(X \times X)$ qui étend l'application $H \to \mathscr{C}(X \times X)$ définie par $h \mapsto \Gamma \cap \{h\} \times X \times X$. Il existe donc un espace analytique complexe Y', une modification (propre)

1. Voir [Gun18] p 150

$\tau : Y' \to Y$ et une application holomorphe $f : Y' \to \mathscr{C}(X \times X)$. Comme τ est propre et que Y est compact alors $Y' = \tau^{-1}(Y)$ est compact et donc $f(Y')$ est le compact désiré.

□

Par cette proposition, la $\mathcal{Z}$-topologie de H est donnée par celle induite par $\mathscr{C}(X \times X)$ et ne dépend pas de la compactification Y.

Pour continuer l'étude des actions compactifiables, on va montrer un critère pratique permettant d'identifier les groupes agissant de façon compactifiable :

Proposition 3.3. *Soit H agissant de façon compactifiable sur X. Un sous-groupe $S \subset H$ agit de façon compactifiable sur X si, et seulement si, S est $\mathcal{Z}$-fermé.*

Démonstration. Notons Y la compactification de H.
$\Leftarrow$: Si S est $\mathcal{Z}$-fermé alors c'est l'intersection d'un fermé de $\mathscr{C}(X \times X)$ et de H. C'est donc un ouvert de Zariski de l'intersection d'un fermé de $\mathscr{C}(X \times X)$ et de Y qui est compact.
$\Rightarrow$: Soit Y' une compactification de S. Quitte à l'intersecter avec H, on peut supposer $Y' \subset H$. Comme les opérations de groupe de H sont holomorphes alors H muni de sa topologie de Zariski est un groupe topologique.
Par hypothèse, S est $\mathcal{Z}$-ouvert dans son $\mathcal{Z}$-adhérence alors S est localement fermé et donc, par la proposition A.19, est ($\mathcal{Z}$-)fermé dans H □

Maintenant que l'on a ce résultat, on peut donner facilement des exemples :

Exemple 3.4. Soit

$$H := \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} \right] \mid z \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$$

qui agit sur $\mathbb{P}^1$. H n'est pas $\mathcal{Z}$-fermé dans $PGL_2(\mathbb{C})$ car ce groupe n'est pas algébrique. H n'agit donc pas de façon compactifiable sur $\mathbb{P}^1$.

Cependant, $\mathbb{C}$ qui agit sur $\mathbb{P}^1$ par

$$z \cdot [x : y] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^z \end{pmatrix} [x : y] = [x, e^z y]$$

est compactifiable par $\mathbb{P}^1$ avec l'action méromorphe donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, [1 : 0] \cdot z = [0 : 1], [1 : 0] \cdot [1 : 0] = [1 : 0]$$

Un autre exemple simple est donnée par le groupes d'automorphisme d'une variété de Kähler grâce à la partie précédente.

Théorème 3.5. *Si X est une variété de Kähler compacte alors $Aut_0(X)$ agit de façon compactifiable sur X*

Démonstration. Par le théorème 2.7, $Aut_0(X)$ est un ouvert de Zariski de $\mathscr{C}_\Delta(X \times X)$ la composante irréductible du graphe de l'identité. Par le théorème 2.1, $\mathscr{C}_\Delta(X \times X)$ est compact, ce qui permet de conclure. □

3.1.2 Sous-groupes et compactifiabilité

Étudions maintenant la topologie de certains sous-groupes d'un groupe agit de façon compactifiable :

Définition 3.6. Soit H agissant sur X. On définit les deux ensembles :

$$H_{\{Z\}} := \{h \in H \mid h \cdot Z = Z\}$$

$$H_Z := \{h \in H \mid \forall z \in Z, h \cdot z = z\}$$

On peut remarquer que ce sont des sous-groupes de H.

Proposition 3.7. *Si H agit de façon compactifiable sur X alors H_Z est un sous-groupe $\mathcal{Z}$-fermé de H. Si Z est Zariski-fermé alors $H_{\{Z\}}$ est $\mathcal{Z}$-fermé.*

Démonstration. Soit Y la compactification de H.
On peut commencer par remarquer que :

$$H_{\{Z\}} = \bigcap_{z \in Z} \{h \in H \mid hz \in Z\}$$

Puis, en notant $\widetilde{m}$ l'application holomorphe du graphe de m, Γ dans X et τ la modification propre $\Gamma \to Y \times X$, on obtient que l'ensemble $\tau(\widetilde{m}(\cdot, z)^{-1}(Z))$ est un sous-espace analytique de Y (si Z en est un lui-même) et que

$$\{h \in H \mid hz \in Z\} = i^{-1}\left((\widetilde{m}(\cdot, z))^{-1}(Z)\right)$$

C'est donc un $\mathcal{Z}$-fermé de H. On en déduit que $H_{\{Z\}}$ est aussi un $\mathcal{Z}$-fermé de H.
La première partie se montre en remarquant que

$$H_Z = \bigcap_{z \in Z} H_{\{z\}}$$

Tous les ensembles de l'intersection sont $\mathcal{Z}$-fermés et donc H_Z l'est aussi. □

Proposition 3.8. *Soit H qui agit de façon compactifiable sur X. Soit M un sous-ensemble de H. Alors, le centralisateur de M, défini par :*

$$Z(M) := \{h \in H \mid \forall m \in M, hm = mh\}$$

est $\mathcal{Z}$-fermé.
Si M est un fermé de Zariski alors son normalisateur, défini par :

$$N(M) := \{h \in H \mid hMh^{-1} = M\}$$

est $\mathcal{Z}$-fermé.

Démonstration. Soit $Y \subset \mathscr{C}(X \times X)$ la compactification de H. L'action de H sur $X \times X$ définie par $h \cdot (a, b) = (h \cdot a, h \cdot b)$ induit une action de H sur

$\mathscr{C}(X \times X)$ qui induit la conjugaison $k \mapsto hkh^{-1}$ sur H (car l'identification de H avec un sous-ensemble de $\mathscr{C}(X \times H)$ se fait avec les graphes de l'action et donc si $k = \Gamma_f$ alors :

$$h \cdot k = \{(ha, hf(a)) \in X \times X \mid a \in X\} = \{(a, hf(h^{-1}a)) \in X \times X \mid a \in X\}$$

Et donc, $h \cdot k = \Gamma_{hfh^{-1}}$).
Par continuité, l'action de H préserve Y, son adhérence dans $\mathscr{C}(X \times X)$.
D'autre part, l'action de H sur X est compactifiable i.e. il existe une application méromorphe $m' : Y \times X \times X \dashrightarrow X \times X$ définie par $m'(y, a, b) := (m(y, a), m(y, b))$ qui prolonge l'action de H sur $X \times X$. Notons par $\tau : Y' \to Y \times X \times X$ la modification associée et $\widetilde{m'} : Y' \to X$ la fonction holomorphe prolongeant m'. On peut donc passer à l'image directe et obtenir des applications :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(Y \times X \times X) & & \mathscr{C}(X \times X) \\
& \mathscr{C}(Y') \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

On peut ensuite injecter $Y \times \mathscr{C}(X \times X)$ dans $\mathscr{C}(Y \times X \times X)$ grâce à l'application :

$$i : (y, \sum n_i Z_i) \in Y \times \mathscr{C}(X \times X) \mapsto \sum n_i \{y\} \times Z_i$$

L'application $\tau_*^{-1}(Im(i)) \subset \mathscr{C}(Y') \to Y \times \mathscr{C}(X \times X)$ est une modification propre (grâce au fait que τ l'est et Y' est compact). Ce qui montre que l'appplication obtenue $Y \times \mathscr{C}(X \times X) \to \mathscr{C}(X \times X)$ est méromorphe et donc que H agit de manière compactifiable sur $\mathscr{C}(X \times X)$. On conclut en remarquant que, en notant $h \cdot x = hxh^{-1}$ l'action de $h \in H$ sur $x \in H$,

$$Z(M) = \{h \in H \mid \forall m \in M, hm = mh\} = \{h \in H \mid \forall m \in M, h{\cdot}m = m\} = H_M$$

et

$$N(M) = \{h \in H \mid hMh^{-1} = M\} = \{h \in H \mid h \cdot M = M\} = H_{\{M\}}$$

et en utilisant la proposition 3.7. □

Lemme 3.9. *Soit S un sous-groupe abélien d'un groupe G. Alors, $Z(Z(S))$ est un sous-groupe abélien de G qui contient S.*

Démonstration. S est contenu dans $Z(Z(S))$ car, par définition de $Z(S)$, tous ces éléments commutent avec ceux de S.
Comme S est abélien alors $S \subset Z(S) = \{h \in H \mid \forall s \in S, hs = sh\}$. On peut ensuite remarquer le fait général que si $X \subset Y$ alors $Z(Y) \subset Z(X)$ (vu que l'on impose moins de conditions sur les éléments). Ainsi, $Z(Z(S)) \subset Z(S)$.
On en déduit que si $x, y \in Z(Z(S)) \subset Z(S)$ alors $xy = yx$ (les éléments de $Z(Z(S))$ commutent avec ceux de $Z(S)$) □

Corollaire 3.10. *Soit H qui agit de façon compactifiable sur X et S un sous-groupe abélien de H. Alors, sa $\mathcal{Z}$-adhérence $\overline{S}$ est abélienne.*

Démonstration. Par la proposition 3.8 et le lemme 3.9, $Z(Z(S))$ est un sous-groupe $\mathcal{Z}$-fermé abélien contenant S. L'adhérence de S est donc contenue dedans et est donc abélienne. □

3.1.3 Orbites d'une action compactifiable

Le fait que l'action d'un groupe sur un espace analytique est compactifiable se voit aussi sur l'orbite des points de l'ensemble analytique par cette action :

Proposition 3.11. *Soit H qui agit de façon compactifiable sur X. Un sous-groupe S de H est $\mathcal{Z}$-fermé si, et seulement si, pour toute ensemble fini de points $x_1, \ldots, x_n$ de X , la S-orbite $(sx_1, \ldots, sx_n)$ est ouverte dans son adhérence de Zariski.*

Démonstration. $\Rightarrow$:Si S est $\mathcal{Z}$-fermé dans H alors S agit de façon compactifiable. Notons Y sa compactification et Γ le graphe de l'application méromorphe $m : Y \times X \dashrightarrow X$ et $\pi_3 : \Gamma \to X$ la projection canonique. Montrons l'implication pour $n = 1$. Cela suffit car on peut ensuite remarquer que l'action de S sur X^n est compactifiable avec l'application méromorphe :

$$m(y, x_1, \ldots, x_n) = (m(y, x_1), \ldots, m(y, x_n))$$

$\Gamma \cap S \times X \times X$ est un ouvert de Zariski de Γ car S est un ouvert de Zariski de Y. Ainsi, l'espace analytique $\pi_3(\pi_3^{-1}(x))$ contient un ouvert de Zariski U contenu dans $S \cdot x$. Donc $S \cdot x = \bigcup_{h \in H} h \cdot U$ est un ouvert de Zariski de son adhérence.
$\Leftarrow$: Soient $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que l'application $\lambda : H \to X^n$ définie par :

$$\lambda(h) := (h \cdot x_1, \ldots, h \cdot x_n)$$

soit injective (on peut toujours le faire car la suite d'intersection $(\bigcap_{i=1}^n Aut_{0x_i}(X))$ finira toujours par être réduit)à l'identité en un nombre fini d'étapes). Par hypothèse et la proposition A.19, $\lambda(S)$ est Zariski-fermé dans $\lambda(H)$ et donc S est $\mathcal{Z}$-fermé dans H (par continuité), S est donc compactifiable. $\square$

Le début de la preuve (i.e l'implication) s'adapte si on remplace les points $x_1, \ldots, x_n$ par un fermé de Zariski de X.

On ne peut pas étendre ce résultat au produit cartésien de deux espaces analytiques distincts, même pour des variétés de Kähler :

Exemple 3.12 (Serre)**.** On va construire Soit $S = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.
Une première compactification de S est $X_1 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Construisons-en une deuxième :
On commence par remarquer[2] que $S \simeq \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^2$. Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ l'appli-

2. vient de l'isomorphisme $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}^*$ obtenu par passage au quotient de $\exp(2i\pi \cdot)$

cation linéaire donnée par : $f((1,0)) = 1$ et $f((0,1)) = i$. De cette façon, $f(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$. Par construction, l'application $\pi \circ f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i) =: E$ passe au quotient et on obtient un morphisme de groupes holomorphe $S \to E$ de noyau $\{(x, ix) \mid x \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$. Toutes les autres fibres sont isomorphes à $\mathbb{C}$; peut donc les compactifier en $\mathbb{P}^1$. Le fibré X_2 à fibre $\mathbb{P}^1$ sur E ainsi obtenu est un compact contenant S.

S agit de façon compactifiable sur X_1 et X_2.

Soit $x_i \in X_i$, $i = 1, 2$ dont leur orbite par S est Zariski-dense dans X_i. Supposons que $S \cdot (x_1, x_2)$ est un ouvert de Zariski de son adhérence dans $X_1 \times X_2$.

On a alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, dashed] & & X_2 \\ & \overline{S \cdot (x_1, x_2)} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On obtient donc une application biméromorphe de X_1 et X_2, ce qui est absurde. Pour montrer cela, on peut regarder l'irrégularité de ces deux surfaces i.e. l'entier $q := h^{0,1}$ qui est un invariant par biméromorphismes (voir [BHPV04] Chapitre 3 corollaire 6.4 p 107).

Par la proposition 4.1 du chapitre 5 du même livre, X_2 est biméromorphe avec $\mathbb{P}^1 \times E$. Ensuite, par la décomposition de Hodge, $q(X_i) = b_1(X_i)/2$ (car $\mathbb{P}^1$ et E sont de Kähler, où b_i est le $i$ème nombre de Betti).

Par la formule de Künneth,

$$b_1(X_1) = b_0(\mathbb{P}^1)b_1(\mathbb{P}^1) + b_1(\mathbb{P}^1)b_0(\mathbb{P}^1) = 0$$

car $\mathbb{P}^1$ est connexe et simplement connexe.

Et,

$$b_1(X_2) = b_0(\mathbb{P}^1)b_1(C) + b_1(\mathbb{P}^1)b_0(C) = 2$$

car $b_1(C) = 2h^{1,0} = 2 \times g(C) = 2$.

On en déduit que $q(X_1) = 0 \neq 1 = q(X_2)$ et donc que X_1 et X_2 ne sont pas biméromorphes. $\square$

3.1.4 Équivariance et $\mathcal{Z}$-topologie

Soit $f : X \to Y$ une fonction holomorphe équivariante pour une action de H sur X et Y. Supposons que H agit de façon compactifiable sur X et que Y est de Kähler.
L'équivariance de f fait que l'automorphisme induit par $h \in H$ conserve $f(X)$ i.e. on a une morphisme de groupes holomorphe $H \to Aut_0(Y)_{\{f(X)\}}$ que l'on peut ensuite composer avec la projection canonique

$$Aut_0(Y)_{\{f(X)\}} \to Aut_0(Y)_{\{f(X)\}}/Aut_0(Y)_{f(X)} =: G$$

pour obtenir un morphisme $\lambda : H \to G$.

Proposition 3.13. *Le noyau de λ est $\mathcal{Z}$-fermé et l'image de λ est un fermé de G pour la ($\mathcal{Z}$-)topologie quotient.*

Démonstration. Montrons que $\mathrm{Ker}(\lambda)$ est $\mathcal{Z}$-fermé : Pour cela, il suffit de montrer l'égalité :

$$\mathrm{Ker}(\lambda) = \bigcap_{y \in f(X)} H_{\{f^{-1}(y)\}}$$

et d'utiliser la proposition 3.7.
On a, par définition,

$$\mathrm{Ker}(\lambda) = \{h \in H \mid \forall y \in f(X), h \cdot y = y\}$$

Soit $h \in \mathrm{Ker}(\lambda)$. Soient $y \in f(X)$ et $x \in f^{-1}(y)$. Alors,

$$f(h \cdot x) = h \cdot f(x) = h \cdot y = y$$

i.e $h \cdot x \in f^{-1}(y)$.
Le même raisonnement pour h^{-1} nous montre que $h \in H_{\{f^{-1}(y)\}}$.

Cette égalité étant vraie pour tout $y \in Y$, on obtient l'inclusion :

$$\mathrm{Ker}(\lambda) \subset \bigcap_{y \in f(X)} H_{\{f^{-1}(y)\}}.$$

Réciproquement, si $h \in \bigcap_{y \in f(X)} H_{\{f^{-1}(y)\}}$, alors pour tout $y \in f(X)$ et $x \in X$ tel que $y = f(x)$,

$$h \cdot y = h \cdot f(x) = f(h \cdot x) = y$$

car $x \in f^{-1}(y)$. Cela montre que $h \in Ker(\lambda)$, ce qui montre l'égalité voulue.
Montrons maintenant que $Im(\lambda)$ est un fermé de Zariski.
On peut commencer par remarquer que G agit de façon compactifiable sur $f(X)$. En effet, par 3.5, $Aut_0(Y)$ agit de façon compactifiable sur Y. Comme $Aut_0(Y)_{\{f(X)\}}$ est un $\mathcal{Z}$-fermé (par 3.7 et le fait que $f(X)$ est un fermé de Zariski car f est propre) alors $Aut_0(Y)_{\{f(X)\}}$ agit de façon compactifiable sur Y et en particulier sur $f(X)$. Comme G est le quotient de $Aut_0(Y)_{\{f(X)\}}$ par le sous-groupe d'ineffectivité, l'action passe au quotient et on obtient une action de G sur $f(X)$ compactifiable.
D'après 3.11, on peut choisir $y_1, \ldots, y_n \in f(X)$ de tel sorte que l'application $\varphi : G \to Y^n$ définie , pour tout $h \in H$, par :

$$\varphi(g) = (g \cdot y_1, \ldots, g \cdot y_n)$$

permette d'identifier G avec un ouvert de Zariski de $\overline{\varphi(G)}$.
Soit x_i tel que $y_i = f(x_i)$. Par la même proposition, on obtient une application

$$\psi : h \in H \mapsto (h \cdot x_1, \ldots, h \cdot x_n) \in X^n$$

qui identifie H avec un ouvert de Zariski de $\overline{\psi(H)}$.
Comme f est propre alors $f \times \ldots \times f(\overline{\psi(H)})$ est un fermé de Zariski et par 2.15, $f \times \ldots \times f(\psi(H))$ est un ensemble constructible de $f \times \ldots \times f(\overline{\psi(H)})$.

On peut ensuite remarquer que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda"'] & X^n \arrow[d, "f\times\cdots\times f"] \\ G \arrow[r, "\psi"] & Y^n \end{tikzcd}$$

est commutatif. En effet, pour tout $h \in H$,

$$(f\times\cdots\times f)\circ\psi(h) = (f\times\cdot\times f)(h\cdot x_1, \dots, h\cdot x_n) = (f(h\cdot x_1), \cdots, f(h\cdot x_n)) = (h\cdot y_1, \dots, h\cdot y_n)$$

et

$$\varphi(\lambda(h)) = \varphi(h : x \mapsto h \cdot x) = (h \cdot y_1, \dots, h \cdot y_n)$$

Par conséquent, $f \times \ldots \times f(\psi(H))$ est inclus dans $\varphi(G)$. Ce qui veut dire que $f \times \ldots \times f(\psi(H))$ est une partie constructible de $\varphi(G)$. L'identification donnée par φ munit $\varphi(G)$ d'une structure de groupe topologique pour laquelle $f \times \ldots \times f(\psi(H))$ est un sous-groupe. Par 2.15, $f \times \ldots \times f(\psi(H))$ est un sous-groupe fermé (pour la topologie de Zariski) et comme $\lambda(H) = \varphi^{-1}(f \times \ldots \times f(\psi(H))$ alors $\lambda(H)$ est un fermé de Zariski.

$\square$

Exemple 3.14. Soient f, X et Y comme dans 3.13, H un sous-groupe Zariski-fermé de $Aut_0(X)$ et soit $\lambda : H \to Aut_0(Y)$ définie par $h \mapsto (y \mapsto g(y))$. Alors $\lambda(H)$ n'est pas nécessairement $\mathcal{Z}$-fermé dans $Aut_0(Y)$:
Soient $X = \mathbb{P}^1$, $Y = X \times \mathbb{P}^1$ et $H = \mathbb{C}$. H agit sur X par :

$$t \cdot [x : y] = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [x : y] = [x + ty : y]$$

et sur la deuxième composante de Y par :

$$t \cdot [x : y] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} [x : y] = [x : e^t y]$$

On peut commencer par remarquer que H agit de façon compactifiable sur X avec l'injection $\mathbb{C} \to \mathbb{P}^1$ et l'action méromorphe donnée pour $x \in \mathbb{P}^1$ par :

$$[1:0] \cdot x = [1:0]$$

car, si $x_2 \neq 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} x_1 + tx_2 = \infty$ et si $x_2 = 0$ alors pour tout $t \in \mathbb{C}$, $t \cdot [x_1, 0] = [1:0]$. On peut aussi remarquer que Y est de Kähler comme produit de variétés de Kähler et que $Aut_0(Y) = Aut_0(\mathbb{P}^1) \times Aut_0(\mathbb{P}^1) = PGL_2(\mathbb{C})^2$ (voir 0.39 et 0.43).
On obtient donc que :

$$\lambda(H) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \right) \mid t \in \mathbb{C} \right\}$$

qui n'est pas $\mathcal{Z}$-fermé car la $\mathcal{Z}$-topologie sur $PGL_n(\mathbb{C})$ est la topologie de Zariski algébrique (voir le début de la section) et la présence de l'exponentielle empêche que cela soit algébrique.

Lemme 3.15. *Soit X un sous-espace analytique de $\mathbb{P}^n$. Alors $Aut(\mathbb{P}^n)_{\{X\}}$ est le (projectivisé du) noyau d'une application linéaire.*

Démonstration. Comme X est un sous-espace analytique de $\mathbb{P}^n$ alors, par le théorème de Chow, X est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}^n$.
Soit $I(X)$ l'idéal homogène de $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ définissant X. On décompose I en composantes homogènes :

$$I(X) = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} I_d(X)$$

où $I_d(X) = I(X) \cap \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]_d$ et $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]_d$ est l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d.
$Aut(\mathbb{P}^n)$ agit algébriquement sur la Grassmannienne $G_k(\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]_d)$ par $g \cdot P := P(g \cdot X)$ où $g \in Aut(\mathbb{P}^n)$ et $P \in Aut(\mathbb{P}^n)$
Soient $k_d := \dim I_d(X)$ et si $k_d > 0$, o_d le point de $G_{k_d}(\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n])$ cor-

respondant à $I_d(X)$. Alors,

$$Aut(P_n)_{\{X\}} = \bigcap_{k_d>0} Aut(\mathbb{P}^n)_{o_d}$$

ce qui nous permet de montrer le lemme.
En effet, si $g \in Aut(\mathbb{P}^n)_{\{X\}}$ alors, pour tout d tel que $k_d > 0$, on a, par définition de l'action $Aut(\mathbb{P}^n)$ sur la Grassmannienne :

$$g \cdot I(X) = I(g \cdot X) = I(X)$$

Pour montrer la réciproque, il suffit de montrer que, pour $g \in \bigcap_{k_d>0} Aut(\mathbb{P}^n)_{o_d}$, $g \cdot X \subset X$ car $\bigcap_{k_d>0} Aut(\mathbb{P}^n)_{o_d}$ est un groupe.
Comme I est homogène, on peut trouver des générateurs de I qui soit homogène. Notons-les $f_1, \ldots, f_n$ et leur degré n_i
Alors, par défintion de g, $g \cdot f_i \in I_{n_i}$ et donc pour tout $x \in X$,

$$0 = g \cdot f(x) = f(g \cdot x)$$

Autrement dit, $g \cdot x \in I_{n_i}$.
En le faisant pour tous les générateurs, on montre que $g \cdot x \in X$. □

Théorème 3.16. *Soit $f : X \to \mathbb{P}^n$ un plongement tel que $f(X)$ ne soit contenu dans aucun hyperplan. Soit $H \subset Aut(X)$ un sous-groupe Zariski-fermé et supposons f équivariant par rapport à une représentation $\rho : H \to Aut(\mathbb{P}^n)$ alors $\rho(H)$ est $\mathcal{Z}$-fermé.*

Démonstration. On peut commencer par remarquer que :

$$Aut(\mathbb{P}^n)_{f(X)} = \bigcap_{x\in X} Aut(\mathbb{P}^n)_{\{f(x)\}} = \{id\}$$

car si $\varphi \in Aut(\mathbb{P}^n)_{f(X)} \setminus id$ alors X est inclus dans l'orthogonal de la droite projective donné par un point s où $\varphi - id$ ne s'annule pas i.e le projectivisé

du plan engendré par ce point et l'image de e_i où e_i est le $i$ème vecteur de la base canonique et $s \in U_i$.
Ainsi, $\rho = \lambda$ (défini juste avant 3.13) et donc $\rho(H)$ est $\mathcal{Z}$-fermé (par 3.13) $\square$

3.2 Théorème de Matsushima

Dans cette section, nous allons généraliser un théorème de Matsushima (le théorème 3 de [Mat69]) qui était sur le variété de Hodge (i.e. des variétés algébriques projectives) au cas Kähler :

Soit $\lambda : Aut(X) \to Aut(Alb(X))$ l'application définie de la façon suivante : Soit $\varphi \in Aut(X)$. En appliquant la propriété universelle de $Alb(X)$ à l'application $alb_X \circ \varphi : X \to Alb(X)$, on obtient l'unique application $\lambda(\varphi)$ qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "alb_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & Alb(X) \arrow[d, "\lambda(\varphi)"] \\ X \arrow[r, "alb_X"] & Alb(X) \end{tikzcd}$$

Comme φ est un isomorphisme alors $\lambda(\varphi)$ l'est aussi.
En restreignant λ à $Aut_0(X)$, on obtient une application $Aut_0(X) \to Aut_0(Alb(X)) = Alb(X)$ (voir 0.53).

Théorème 3.17. *Soit X une variété compacte de Kähler, H un sous-groupe de $Aut_0(X)$ qui agit de façon compactifiable sur X. Alors,*

1. *H/H_0 est fini.*
2. *L'application $\lambda : H_0 \to Alb(X)$ a un sous-tore complexe comme image*

Démonstration. 1) Comme H est un sous-groupe qui agit de façon compactifiable sur X d'un groupe qui le fait aussi alors H est $\mathcal{Z}$-fermé dans $Aut_0(X)$. Ainsi, H est l'intersection d'un fermé de $\mathscr{C}_\Delta(X \times X)$ (qui est compact) et

$Aut_0(X)$. On en déduit que H est un compact de $Aut_0(X)$ et donc a un nombre fini de composantes connexes i.e. $Card(H/H_0) < \infty$.
2) Par la discussion précédente, π est équivariante par rapport à la représentation $\lambda : H_0 \to Aut_0(Alb(X))$. On obtient donc une application $H_0 \to Alb(X)_{\{\pi(X)\}}/Alb(X)_{\pi(X)}$. Comme $Alb(X)$ agit sur lui-même par translation alors $Alb(X)_{\pi(X)} = \{0\}$ et comme g stabilise $alb_X(X)$ si, et seulement si, g stablise $\langle alb_X \rangle = Alb(X)$ alors $Alb(X)_{\{\pi(X)\}} = Alb(X)$.
Ainsi, par 3.13, $\lambda(H)$ est $\mathcal{Z}$-fermé dans $Alb(X)$ et est donc compact. Comme, de plus, c'est un groupe connexe (car H_0 l'est) dont la loi respecte la structure d'espace analytique de $\lambda(H)$ (c'est donc un groupe de Lie complexe, car lisse partout par translation). Par B.21, $\lambda(H)$ est un tore complexe.

□

La différentielle de λ en l'identité est l'application $\Gamma(X, TX) \to H^0(X, \Omega^1_X)^*$ (voir 0.40) donnée par $V \mapsto (i(V) : \omega \mapsto \omega(V))$. On peut voir cela en remarquant que, pour $p \in alb_X^{-1}(0)$, $\lambda = alb_X \circ ev_p$ (car pour $\varphi \in H_0$, $\lambda(\varphi)$ est identifié avec $\lambda(\varphi)(0) = alb_X(\varphi(p))$) et en différenciant.
Lichnerowicz a montré (dans [Lic67] corollaire 3) que, dans le cas où X est compacte, de Kähler et de première classe de Chern nulle (pour une introduction aux classes de Chern voir B.3), $d\lambda$ est un isomorphisme et donc $Aut_0(X) \to Alb(X)$ est une application surjective de noyau fini (car, par compacité, λ est alors de fibres finies). On en déduit donc que $Aut_0(X)$ est compact et est donc un tore.

Théorème 3.18. *Si X est une variété de Kähler compacte connexe avec $c_1(X) = 0$ alors il existe un tore complexe T et une variété de Kähler compacte connexe telle que :*

1. $c_1(M) = \dim H^0(M, \Omega_M)(= \frac{1}{2}b_1(M)) = 0$
2. *$T \times M$ est un revêtement fini de X avec un groupe de transformations résoluble.*

Pour montrer ce théorème, on va construire une suite (X_k) de variétés de Kähler compactes connexes de première classe de Chern nulle dont le premier nombre de Betti diminue à chaque étape. À un moment, ce nombre de Betti s'annulera et on aura la variété M voulu. Le tore sera le produit $\prod Aut_0(X_k)$. Le processus de construction se fera en prenant la fibré en 0 de l'application d'Albanese de la variété précédente, dans ce cas, pour tout k,

$$\dim(X_{k+1}) = \dim(X_k) - \frac{1}{2}b_1(X_k) < \dim(X_k) \text{ et } \dim(X_k) \geq \dim H^0(X_k, \Omega_{X_k})$$

Commençons par montrons que, dans notre cas, l'application d'Albanese est un fibré dont toutes les fibres sont des variétés de Kähler compactes connexes : Les fibres sont des variétés compactes car l'application alb_X est propre et que, génériquement, les fibres sont lisses et comme la variété d'Albanese est un groupe connexe, cela s'étend à tous les points. Les fibres sont de Kähler car ce sont des sous-variétés d'une variété de Kähler. Montrons maintenant que les fibres sont connexes :

Proposition 3.19 (Factorisation de Stein)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe propre entre deux espaces analytiques. Alors, il existe un unique, à isomorphisme près, un espace analytique Y' et des applications holomorphes $g : X \to Y'$, $h : Y' \to Y$ tel que $f = h \circ g$ où l'application g a des fibres connexes et h est à fibres finies.*

Esquisse de preuve. Voir [GPR13] p 124 □

En appliquant la factorisation de Stein à $alb_X : X \to Alb(X)$, on obtient un revêtement Y de $Alb(X)$ puis, par pullback, une injection $H^0(Y, \Omega_Y) \to H^0(Alb(X), \Omega_{Alb(X)})$ dont l'image dans $H^0(Alb(X), \Omega_{Alb(X)})$ est d'indice le degré d du revêtement. On au aussi une injection $H_0(X, \Omega_X) \to H^0(Y, \Omega^1_Y)$. Ainsi, si $d > 1$, $H_0(X, \Omega_X)$ est un sous-groupe propre de $H^0(Alb(X), \Omega_{Alb(X)})$, ce qui est absurde car $H^0(Alb(X), \Omega_{Alb(X)}) = H_0(X, \Omega_X)$ (voir la preuve de 0.50). Donc g est injective et comme f est à fibres connexes alors alb_X aussi.

Montrons maintenant que $alb_X : X \to Alb(X)$ est un fibré :

Construction 3.20. Soient G un groupe de Lie complexe, $\pi : P \to X$ un fibré tel que G agit (à droite) librement sur P de tel sorte que, pour tout $x \in X$ et $g \in G$ tel que $\pi^{-1}(x) \cdot g \in \pi^{-1}(x)$ et que pour tout $x \in X$ et tout $y \in \pi^{-1}(x)$, $g \in G \mapsto yg \in \pi^{-1}(x)$ est un homéomorphisme.
Soit $\rho : G \to Aut(F)$ une action (à gauche) effective de G sur F.
On fait maintenant agir (à droite) G sur $P \times F$ par :

$$(p, f) \cdot g = (p \cdot g, \rho(g^{-1})(f))$$

et on définit la variété $E := (P \times F)/G$ que l'on note aussu $P \times_\rho F$.
L'application $\pi_\rho : [p, f] \in E \mapsto \pi(p) \in X$ est un fibré (dont les applications de transitions sont données par $\rho(t_{ij})$ où les t_{ij} sont celle du fibré π. Vérifions tout de même que cette application est bien définie :
Soient $p \in P$, $f \in F$ et $g \in G$.

$$\pi_\rho([p \cdot g, \rho(g^{-1})(f)]) = \pi(p \cdot g) = \pi(p) = \pi_\rho(p, f)$$

Refaisons la construction 3.20 :
L'application $\lambda : Aut_0(X) \to Alb(X)$ est un fibré de fibre $I := \mathrm{Ker}(\lambda)$ qui agit donc sur $Aut_0(X)$. Soit $X_1 := alb_X^{-1}(0)$ la fibre en 0 de alb_X.

Soit $x \in X_1$ et $f \in I$. Alors,

$$alb_X(f(x)) = \lambda(f)(alb_X(x)) = \lambda(f)(0) = 0$$

Ainsi, on définit une application $\rho : I \to Aut(X_1)$ définie par $f \mapsto f_{|X_1}$.
On définit une action à droite de F sur $Aut_0(X) \times X_1$ par :

$$(\varphi, x) \cdot f = (\varphi \circ f, f^{-1}(x))$$

On obtient donc un fibré $E = Aut_0X \times_\rho X_1 \to Alb(X)$ avec pour fibre X_1.

Soit $\beta : Aut_0(X) \times X_1 \to X$ définie par $\beta(\varphi, x) = \varphi(x)$. Cette application est équivariante par l'action de F ; β induit donc une application $\widetilde{\beta} : E \to X$. Cette application fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\widetilde{\beta}"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & X \arrow[dl, "alb_X"] \\ & Alb(X) & \end{tikzcd}$$

De plus, on peut construire une bijection réciproque à $\widetilde{\beta}$ de la façon suivante :
Soit $x \in X$. Par surjectivité de λ, il existe $\varphi \in Aut_0(X)$ tel que $\lambda(\varphi) = alb_X(x)$. On peut donc définir $\widetilde{\beta}^{-1}(x) = [\varphi, \varphi^{-1}(x)]$. Cette application est bien définie car le choix de φ se fait modulo F.
Ainsi, on déduit que $X \to Alb(X)$ est un fibré holomorphe avec pour fibre X_1 et que le groupe de transformation du fibré $Aut_0X \times X_1 \to X$ est F (voir [Hat02] 1.40).

Montrons maintenant que la première classe de Chern de X_1 est nulle.

Lemme 3.21. *Soit $p : E \to B$ un fibré différentiel. Alors,*

$$TE = p^*TB \oplus T^pE$$

où $T^pE := \{(x, v) \in TE \mid x \in E; v \in T_xp^{-1}(p(x))\}$

Démonstration. On a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow T^pE \hookrightarrow TE \xrightarrow{\pi} p^*TB \longrightarrow 0$$

où $\pi : (x, v) \mapsto (x, \pi(x), d_xp(v))$.
L'a surjectivité de π vient du fait que p est une submersion. L'exactitude du milieu vient du fait que $v \in T_xp^{-1}(p(x))$ si, et seulement si, $d_xp(v) = 0$.

En munissant TE d'une métrique riemannienne, on peut trouver un supplémentaire à $T_\pi E$ et donc une section de l'injection, ce qui permet d'obtenir la somme directe voulue. □

Utilisons ce lemme avec le fibré $X \to Alb(X)$ afin de calculer la première classe de Chern de X_1 :

$$c(TX) = c(alb_X^* TAlb(X) \oplus T_{alb_X} X) = c(alb_X^* TAlb(X))c(T_{alb_X} X) = c(T_{alb_X} X)$$

car $TAlb(X)$ est trivialisable (voir B.18) et donc sa classe de Chern est 1 (voir B.14).
Ainsi,

$$0 = c_1(TX) = c_1(T_{alb_X} X)$$

et en prenant le pullback de l'inclusion $X_1 \hookrightarrow X$, on obtient :

$$0 = i^* c_1(T_{alb_X} X) = c_1(i^* T_{alb_X} X) = c_1(TX_1)$$

On a fini la construction de X_1 et la démonstration de ces propriétés.
Pour finir la preuve de 3.18, il suffit de voir comment se comporte le groupe de transformation lorsqu'on itère la construction : On veut définir une action de groupe naturelle d'un groupe G sur $Aut_0(X) \times Aut_0(X_1) \times X_2$ à partir de celles de F_i sur $Aut_0(X_i) \times X_{i+1}$ de telle façon que :

$$X \simeq \frac{Aut_0(X) \times \frac{Aut_0(X_1) \times X_2}{F_1}}{F} \simeq \frac{Aut_0(X) \times Aut_0(X_1) \times X_2}{G}$$

Soit $\Psi : Aut_0(X) \times Aut_0(X_1) \times X_2 \to X$ l'application (surjective) définie par :

$$\Psi(\varphi, \psi, x) = \varphi(\psi(x))$$

Étudions les fibres de cette application : Soient $y \in X$ et $(\varphi, \psi, x) \in Aut_0(X) \times Aut_0(X_1) \times X_2$ tels que $y = \Psi(\varphi, \psi, x)$.
Soit $(\varphi', \psi', x') \in Aut_0(X) \times Aut_0(X_1) \times X_2$.

Si $y = \Psi(\varphi', \psi', x')$ alors $\varphi(\psi(x)) = \varphi'(\psi'(x'))$, autrement dit, par injectivité de $\widetilde{\beta}$, il existe un $f \in F$ tel que :

$$(\varphi \circ f, \rho(f^{-1})(\psi(x))) = (\varphi, \psi(x)) \cdot f = (\varphi', \psi'(x))$$

i.e. $\varphi \circ f = \varphi'$ et $\rho(f^{-1})(\psi(x)) = \psi'(x')$.
Posons $\theta_f = \rho(f^{-1}) \in Aut_0(X_1)$.
De la même façon, il existe $f_1 \in F_1$ tel que :

$$(\theta_f \circ \psi \circ f_1, \rho_1(f_1^{-1})(x)) = (\theta_f \circ \psi, x) \cdot f_1 = (\psi', x')$$

où $\theta_{f_1} = \rho(f_1^{-1}) \in Aut_0(X_2)$ Réciproquement, si $\alpha_{f,f_1} = (\varphi \circ f, \theta_f \circ \psi \circ f_1, \theta_{f_1}(x))$, $\Psi(\alpha_{f,f_1}) = y$. On peut donc faire agir (à droite) $F \times F_1$ sur $Aut_0(X) \times Aut_0(X_1) \times X_2$ par :

$$(\varphi, \psi, x) \cdot (f, f_1) = \varphi \circ f, \theta_f \circ \psi \circ f_1, \theta_{f_1}(x))$$

et ainsi obtenir l'isomorphisme voulu.

A
Topologie générale et algébrique

Le but de cette annexe est de redonner quelques notions de topologie (générale et algébrique) utilisés dans le corps du texte.

A.1 Paracompacité

Tout d'abord, on redonne les définitions de dénombrable à l'infini et de paracompacité (qui apparaissent, de manière interchangeable dans la littérature) dans la définition d'espace analytique (et de variété différentielle) et on montre pourquoi elles sont équivalentes dans notre cas.

Définition A.1. Un espace topologique est paracompact s'il est séparé et si, pour tout recouvrement ouvert de X, il existe un recouvrement ouvert plus fin de X qui est localement fini.

Définition A.2. Soit X un espace localement compact. X est dit dénombrable à l'infini si le point à l'infini de sa compactification d'Alexandrov admet une base dénombrable de voisinage.

Proposition A.3. *Soit X un espace localement compact. X est dénombrable à l'infini si, et seulement, X est l'union dénombrable de compacts.*

Démonstration. $\Rightarrow$: Soit $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la base de voisinage du point à l'infini ∞. Montrons que

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_i^c$$

Soit $x \in X$. Comme $X \cup \{\infty\}$ est séparé, il existe des voisinages V de x et W de ∞ qui ne rencontrent pas. Ainsi, $x \in W^c$ et par définition de bases de voisinages, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $V_i \subset W$ et donc $W^c \subset V_i^c$, ce qui montre que $X \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_i^c$. L'autre inclusion vient du fait que $\infty \in V_i$ pour i.
$\Leftarrow$: Soit (K_n) une suite de compacts de X tel que :

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \tag{A.1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera par B_n un voisinage compact de K_n et $C_n = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$.
La suite (C_n) est une suite croissante pour l'inclusion et

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Int(C_n)$$

Soit V un voisinage quelconque de ∞ dans $X \cup \infty$. Il existe donc un voisinage U de ∞ tel que $U \subset V$. Par définition de la topologie du compactifié, il existe un compact K tel que $U = K^c$.
Par l'égalité A.1 et le fait que la suite (C_n) est croissante, il existe un N tel que $K \subset Int(C_n)$. On en déduit que :

$$Int(C_n)^c \subset K^c = U \subset V$$

$\square$

Lemme A.4. *Soit X un espace localement connexe. X est dénombrable à l'infini si, et seulement si, X est paracompact.*

Démonstration. Cela découle de [Bou07] p 71 et [Bou07] p 85. $\square$

Pour introduire la prochaine section, on va montrer que les espaces analytiques sont métrisables :

Théorème A.5 (Smirnov)**.** *Un espace est métrisable si, et seulement si, il est paracompact et localement métrisable*

Comme les espaces analytiques modèles sont métrisables en restreignant une distance sur $\mathbb{C}^n$ alors,

Corollaire A.6. *Un espace analytique est métrisable.*

A.2 Distance de Hausdorff

Pour montrer le théorème 2.1, on utilise le théorème de Bishop qui nous donne des conditions pour qu'une suite de espaces analytiques compactes pour une certaine topologie (dite de Hausdorff). On va donner les outils pour comprendre ce théorème et le théorème lui-même.

Soit (M, d) un espace métrique, $K(M)$ l'ensemble des compacts non vide de M.
On appelle distance de Hausdorff de cet espace métrique l'application $d_H : K(M) \times K(M) \to \mathbb{R}_+$ donnée par :

$$d_H(A, B) = \frac{1}{2}\left[\max_{b \in B} d(A, b) + \max_{a \in A} d(a, B)\right]$$

Proposition A.7. *Soit M un espace topologique métrisable. Pour toute distance sur M définissant la topologie de M, la distance de Hausdorff associée définit la même topologie sur $K(M)$.*

Démonstration. Voir [BM14] p 419 □

On appelera cette topologie la topologie de Hausdorff sur $K(M)$

Proposition A.8. *Soit M un espace topologique métrisable compact. Alors $K(M)$ est un espace topologique compact.*

Démonstration. Voir [BM14] p 420 □

Théorème A.9 (Bishop)**.** *Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles analytiques (fermés) de dimension n d'un ouvert W de $\mathbb{C}^{n+p}$, convergeant au sens de Hausdorff de W pour la métrique standard de $\mathbb{C}^{n+p}$ vers un ensemble fermé A de W. Si le volume des A_m est fini et uniformément majoré, A est un sous-ensemble analytique de W de dimension n.*

Démonstration. Voir [Bis64]

□

A.3 Groupes topologiques

Les groupes topologiques arrivent naturellement dans l'étude des automorphismes car $Aut(X)$ en est un. On va étudier quelques propriétés qui nous seront utiles pour le corps du texte (et notamment dans la la partie 3)

Définition A.10. Un groupe topologique est un groupe $(G, *)$ dont l'ensemble sous-jacent est muni d'une topologie compatible avec la loi du groupe i.e. les applications $(x, y) \in G \times G \mapsto x * y \in G$ et $x \in G \mapsto x^{-1} \in G$ sont continues. Autrement dit, un groupe topologique est un groupe dans la catégorie des espaces topologiques.

On dira qu'un groupe topologique est connexe, séparé, compact,... si son espace topologique sous-jacent l'est.

Proposition A.11. *La composante connexe du neutre G_0 est un sous-groupe fermé distingué de G*

Démonstration. Le sous-ensemble G_0 est un sous-groupe de G. Par définition, le neutre est dans G_0, il nous suffit de montrer que :

$$\forall x, y \in G_0, xy^{-1} \in G_0$$

Pour cela, on considère l'application $\mu : (x, y) \in G_0 \times G_0 \mapsto xy^{-1} \in G$ qui est continue et comme $G_0 \times G_0$ est connexe alors son image aussi. Comme, de plus, le neutre est dans cette image alors, μ est à valeurs dans G_0, ce qui montre le résultat
On montre de la même façon que G_0 est distingué en considérant,pour tout $x \in G$, l'application $h \in G_0 \mapsto xhx^{-1}$.
Montrons maintenant que G_0 est fermé :
L'adhérence $\overline{G_0}$ de G_0 est connexe (car G_0 l'est). Par conséquent, $\overline{G_0} \subset G_0$ et donc $\overline{G_0} = G_0$

□

G_0 n'est pas nécessairement ouvert : si $G = (\mathbb{Q}, +)$ est le groupe des rationnels alors G_0 est un singleton et n'est donc pas ouvert.

Proposition A.12. *Soit G un groupe topologique connexe et V un voisinage ouvert de l'identité. Alors V engendre G.*

Démonstration. Soit H le sous-groupe engendré par V. Montrons que $G = H$
Comme $H = \bigcup_{h \in H} hV$ et que les hV sont ouverts, car homéomorphes à V, alors H est ouvert.
Le groupe G est la réunion disjointe de classes d'équivalences $g_i H$, toutes homéomorphes à H. De ce fait, H est le complémentaire de l'union des autres classes d'équivalence et est donc fermé.
Comme G est connexe alors $G = H$.

□

Lemme A.13. *Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Alors $\overline{H}$ est un sous-groupe de G.*

Démonstration. Pour montrer que $\overline{H}$ est un sous-groupe de G, il suffit de montrer que $\overline{H}$ est stable pour la loi de groupe et par passage à l'inverse.
Soit $a \in \overline{H}$. Soit U un voisinage ouvert de a^{-1} dans G.
Comme le passage à l'inverse est un homéomorphisme (et est donc ouvert) alors $V = \{v \in G | v^{-1} \in U\}$ est un voisinage de a dans G.
Comme $a \in \overline{H}$ alors $V \cap H \neq \emptyset$ et comme H est stable par passage à l'inverse alors $U \cap H \neq \emptyset$. On en déduit que $a^{-1} \in \overline{H}$.
Soit $a, b \in \overline{H}$. Soit W un voisinage ouvert de ab.
Alors, $m^{-1}(ab)$ est un voisinage ouvert de (a, b) dans $G \times G$ ($m : G \times G$ est la loi du groupe). Il existe donc des ouverts U et V de G tels que $U \times V \subset m^{-1}(ab)$.
Comme $a, b \in \overline{H}$ alors $H \cap U \neq \emptyset$ et $H \cap V \neq \emptyset$. Ainsi, $m(U \times V) \cap H \neq \emptyset$ et donc $W \cap H \neq \emptyset$. On en déduit que $ab \in \overline{H}$. □

Définition A.14. Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble de X est dit localement fermé s'il est ouvert dans son adhérence ou encore que c'est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de X.

Définition A.15. Soit X un espace topologique[1]. Un sous-ensemble de X est dit constructible si c'est l'union finie de sous-espaces localement fermés.

Lemme A.16. *Une partie constructible Y d'un espace topologique contient un ouvert dense dans $\overline{Y}$.*

Démonstration. On va traiter le cas où $\overline{Y}$ est irréductible (le cas général se fait par la décomposition en irréductible[2].
Comme Y est constructible, on a une décomposition $Y = \bigcup L_i$ où L_i est une partie localement fermé de X. On a, alors, $\overline{Y} = \bigcup \overline{L_i}$. Par irréductibilité de $\overline{Y}$, il existe un i tel que $\overline{Y} = \overline{L_i}$. L_i est ouvert dans son adhérence car il est localement fermé et est donc un ouvert dense dans $\overline{Y}$. □

Lemme A.17. *Soit G un groupe topologique. Soit U un ouvert dense de G et V un ouvert non vide. Alors $UV = G$.*

Démonstration. Soit $g \in G$. Comme l'inversion $x \mapsto x^{-1}$ et les translations sont des homéomorphismes alors gV^{-1} est un ouvert non vide de G. Comme U est dense dans G alors $U \cap gV^{-1} \neq \emptyset$. Ainsi, il existe $u \in U$ et $v \in V$ tel que $u = gv^{-1}$ i.e. $g = uv$.

□

Proposition A.18. *Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Si H est une partie constructible de G alors H est fermée.*

Démonstration. Soit U un ouvert dense de $\overline{H}$ contenu dans H. Alors, par le lemme A.17, $UU = \overline{H}$ mais comme $U \subset H$ alors $UU \subset HH = H$. Par conséquent, $H = \overline{H}$.

□

1. On doit imposer que cela soit un espace noethérien mais dans notre cadre, cela n'est pas restrictif. On supposera dans la suite que nos espaces topologiques sont noethériens
2. La noethérianité est importante, ici

Corollaire A.19. *Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe localement fermé de G. Alors H est fermé dans G*

A.4 Théorème des coefficients universels

Théorème A.20 (Théorème des coefficients universels)**.** *Soient* $C = (C_\bullet, \partial)$ *un complexe de chaines de* $\mathbb{Z}$*-modules libres,* G *un groupe abélien. Alors, les groupes d'homologies* $H_i(C, G)$ *du complexe de chaines* $C \otimes G = (C_\bullet \otimes G, \partial \otimes id)$ *sont déterminés par les groupes d'homologie* $H_i(C_\bullet)$ *via la suite exacte courte :*

$$0 \longrightarrow H_i(C, G) \longrightarrow H_i(C \otimes G) \longrightarrow Tor(H_{i-1}(C), G) \longrightarrow 0$$

où Tor *est le foncteur dérivé du produit tensoriel.*

Démonstration. [Bre93] □

Si k est un corps de caractéristique 0, $(k, +)$ est sans torsion et donc

$$\forall i \in \mathbb{N}, Tor(H_{i-1}(C), k) = 0$$

Ainsi,

$$H_i(C) \otimes k = H_i(C \otimes k)$$

Dans le cas de l'homologie singulière pour X un espace topologique,

$$H_i(C, \mathbb{Z}) \otimes k = H_i(X, k)$$

On en déduit une inclusion de $H_i(C, \mathbb{Z})$ modulo la torsion (que l'on notera $H_i(C, \mathbb{Z})^{libre}$) dans $H_i(X, \mathbb{R})$. On en déduit que $H_i(C, \mathbb{Z})^{libre}$ forme un réseau de $H_i(C, \mathbb{R})$

$\mathcal{B}$

Variétés complexes et de Kähler, et classes de Chern

Dans cette annexe, nous allons donner des résultats de géométrie différentielle complexe. Dans un premier temps, on redonnera les définitions des analogues complexes d'objets classiques en réelle. Puis on donnera la définition de variété de Kähler et un des résultats importants de la théorie des variétés de Kähler, la décomposition de Hodge. On continuera en parlant des classes de Chern, qui sont des invariants topologiques pour les fibrés. Et enfin, on finira cette annexe en donnant quelques résultats autour des groupes de Lie.

B.1 Premiers énoncés

Définition B.1. Soit X une variété différentielle de dimension $2n$. Une structure complexe sur X est la donnée d'un atlas $(U_i, \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n)_{i\in I}$ dont les changements de cartes dont holomorphes. Une variété différentielle munie d'une structure complexe est appelé variété complexe. Sa dimension complexe est n.

Définition B.2. Soient M, N deux variétés complexes. Une application continue $M \to N$ est dite holomorphe autour de x s'il existe une carte $\varphi : U_i \to \mathbb{C}^m$

de M autour de x et une carte $\psi : V_j \to \mathbb{C}^n$ autour de $f(x)$ telles que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U_i) \subset \mathbb{C}^m \to \varphi(V_j) \subset \mathbb{C}^n$$

est holomorphe. Elle est holomorphe si elle l'est en tout point de M.

Le fait d'être holomorphe ne dépend pas des cartes choisies car les changements de cartes sont holomorphes.
On peut continuer à définir les objets associés à des variétés complexes en remplaçant différentielle par holomorphe : le fibré tangent holomorphe, fibrés vectoriels holomorphes,...
On notera $T_{\mathbb{R}}X$ le fibré tangent réel et TX le fibré tangent holomorphe. Étudions maintenant comment les relier :
Soit X une variété complexe et $\varphi_k : U_k \to \mathbb{C}^n$ les cartes holomorphes de X. Grâce à la différentielle de φ_k, on peut identifier $T_{\mathbb{R}}U_k$ avec $U_k \times \mathbb{C}^n$. On peut ainsi définir une application $I_k : T_{\mathbb{R}}U_k \to T_{\mathbb{R}}U_k$ qui ramener sur $U_k \times \mathbb{C}^n$ est $i \times id$ (où $i^2 = -1$). Comme les changements de cartes sont holomorphes alors leur différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire, ce qui permet de recoller les I_k en une application $I : T_{\mathbb{R}}X \to T_{\mathbb{R}}X$.
Cette application vérifie l'identité $I^2 = -id$ et donc induit une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel sur les espaces tangents (réels) de X et donc une structure de fibré vectoriel complexe sur $T_{\mathbb{R}}X$.
On peut ensuite remarquer que le fibré tangent holomorphe est inclus dans le complexifié du fibré tangent réel (car localement engendré par les $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$) et plus particulièrement,

Théorème B.3. *TX est isomorphe au fibré $T^{1,0}X$ des vecteurs propres de $I \otimes id$ associé à la valeur propre i comme fibré vectoriel complexe.*

Démonstration. [Voi02] □

La conjugaison complexe agit sur le complexifié $T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}$ par $\overline{v \otimes x} = v \otimes \overline{x}$.

De ce fait, le fibré $T^{0,1}X$ des vecteurs propres de $I \otimes id$ associé à la valeur propre i est le conjugué de $T^{1,0}X$. De plus, on a la décomposition :

$$T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C} = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$$

En composant par $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{R})$ [1] et en regardant les sections, on obtient une décomposition duale :

$$\Omega_{\mathbb{C}}X = \Omega^{1,0}X \oplus \Omega^{0,1}X$$

où $\Omega^{1,0}X$ est l'ensemble des formes différentielles $\mathbb{C}$-linéaires et donc engendré par les dz_i et $\Omega^{0,1}X$ est l'ensemble des formes différentielles $\mathbb{C}$-antilinéaires et donc engendré par les $d\overline{z_i}$.
En prenant la puissance extérieure de cette décomposition, on obtient une décomposition [2] des k-formes complexes :

$$\Omega^k_{\mathbb{C}}X = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}X \tag{B.1}$$

où

$$\Omega^{p,q}X = \bigwedge^p \Omega^{1,0}X \otimes \bigwedge^q \Omega^{0,1}X$$

est appelé ensemble des formes de degré (p,q) ou (p,q)-formes.
$\Omega^{p,q}X$ est localement engendré par les

$$dz_{i_1} \wedge \dots dz_{i_p} \wedge d\overline{z_{j_1}} \wedge d\overline{z_{j_q}}$$

où $i_1 < \dots < i_p$ et $j_1 < \dots < j_q$. On notera, pour $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots dz_{i_p}$ et $J = \{j_1, \dots, j_q\}$, $d\overline{z_J} = d\overline{z_{j_1}} \wedge \dots d\overline{z_{j_q}}$. Ainsi, un élément α

1. $\mathrm{Hom}(T_{\mathbb{R}}X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(T_{\mathbb{R}}X, \mathbb{C})$
2. découle de l'isomorphisme naturel, pour E et F des faisceaux en $\mathbb{C}$-algèbres :

$$\bigwedge^n \mathcal{E} \oplus \mathcal{F} \simeq \bigoplus_{p+q=n} \bigwedge^p \mathcal{E} \otimes \bigwedge^q F$$

de $\Omega^{p,q}X$ s'écrit localement sous la forme :

$$\alpha = \sum_{|I|=p,|J|=q} \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z_J}$$

où α_{IJ} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
La différentielle d'une telle forme s'écrit

$$d\alpha = \sum_{|I|=p,|J|=q} d\alpha_{I,J} \wedge dz_I \wedge d\overline{z_J}$$

Elle s'écrit donc comme la somme d'une forme de degré $(p+1,q)$ et d'une forme de degré $(p,q+1)$. La première sera noté $\partial\alpha$ et la seconde $\overline{\partial}\alpha$.

Lemme B.4 (Propriétés de ∂ et $\overline{\partial}$)**.** *Les applications ∂ et $\overline{\partial}$ sont linéaires et vérifient les égalités suivantes :*

— *Pour tout $\alpha \in \Omega^p X$ et pour tout $\beta \in \Omega^q X$,*

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \partial\beta$$

$$\overline{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \overline{\partial}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \overline{\partial}\beta$$

— $\partial^2 = 0,\ \overline{\partial}\partial + \partial\overline{\partial} = 0;\ \overline{\partial}^2 = 0$

Démonstration. Les deux énoncés s'obtiennent grâce à la décomposition (B.1) et des égalités analogues pour la différentielle extérieure d. □

On obtient ainsi des complexes :

$\ldots \longrightarrow \Omega^{p,q-1}X \longrightarrow \Omega^{p,q}X \longrightarrow \Omega^{p,q+1}X \longrightarrow \ldots$

que l'on appelera complexes de Dolbeault.
On peut ainsi définir les groupes de cohomologies associés $H^{p,q}(X)$, appelé (p,q)-groupes de Dolbeault.
On peut continuer l'analogie avec la différentielle d avec une variante du lemme de Poincaré :

Proposition B.5. *Soit α une forme de type (p,q) avec $q>0$. Si $\overline{\partial}\alpha=0$, il existe localement sur X une forme β de type $(p,q-1)$ telle que $\alpha=\overline{\partial}\beta$*

On a un énoncé similaire pour ∂.

B.2 Variétés de Kähler

Définition B.6. Soit X une variété complexe. Une métrique hermitienne sur X est une section h de $\mathrm{Hom}(T^{1,0} \otimes T^{0,1}, \mathbb{C})$ telle que, pour tout $x \in X$, h_x est un forme hermitienne sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel T_xX.

Définition B.7. Une métrique hermitienne h est dite kählérienne si la (1,1)-forme $\omega = -Im(h)$ est fermée. Une variété munie d'une telle forme[3] est appelé variété de Kähler.

Exemple B.8.
- $\mathbb{C}^n$ muni de la métrique constante valant la forme hermitienne standard est une variété de Kähler
- On appelle métrique de Fubini-Study la métrique associée à la (1,1)-forme ω définie, localement sur $\mathbb{P}^n$, par :

$$\omega_i = \frac{-1}{2i\pi}\partial\overline{\partial}\ln(1 + \sum_{j\neq i} z_i^2)$$

  (dans la carte $U_i = \{z_i \neq 0\}$)
  $\mathbb{P}^n$ muni de la métrique de Fubini-Study est une variété de Kähler.
- Si (M, ω) est une variété de Kähler alors toute sous-variété N munie de la restriction de ω sur N est une variété de Kähler.

Un des principaux résultats sur les variétés de Kähler (compacte) est dû à Hodge et permet de relier la structure topologique de la variété complexe à sa structure complexe, grâce à ces groupes de cohomologies :

Théorème B.9 (Décomposition de Hodge)**.** *Soit X une variété de Kähler compacte. Alors, pour tout $n \geq 0$,*

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(X)$$

3. on retrouve la métrique grâce aux relations de symétrie

De plus, pour tout $p, q \geq 0$,

$$H^{p,q}(X) = \overline{H^{q,p}(X)}$$

B.3 Classes de Chern

Les classes de Chern sont des invariants topologiques, calculables dans la pratique, associés aux fibrés vectoriels sur une variété.
Soit X une variété topologique et $E \to X$ un fibré complexe de rang r sur X.
Si $r = 1$, on définit la première classe de Chern de la façon suivante :
La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induit une suite exacte courte de groupes :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2i\pi} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \longrightarrow 0$$

qui, elle-même, induit une suite exacte de faisceaux de groupes,

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}_X \xrightarrow{2i\pi} \mathcal{C}^0_X \xrightarrow{\exp} (\mathcal{C}^0_X)^* \longrightarrow 0$$

où $\underline{\mathbb{Z}}_X$ est le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs entières sur X, $\mathcal{C}^0_X$ est le faisceau des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$ et $(\mathcal{C}^0_X)^*$ est le faisceau des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$ qui ne s'annulent jamais. On obtient une suite longue en cohomologie :

$$\cdots \longrightarrow H^1(X, \mathcal{C}^0_X) \longrightarrow H^1(X, (\mathcal{C}^0_X)^*) \longrightarrow H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}_X) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{C}^0_X) \longrightarrow \cdots$$

Comme il existe des partitions de l'unité continue alors les groupes de cohomologies $H^1(X, \mathcal{C}^0_X)$ et $H^1(X, \mathcal{C}^0_X)$ sont nuls alors on a un isomorphisme $c_1 : H^1(X, (\mathcal{C}^0_X)^*) \simeq H^2(X, \underline{\mathbb{Z}}_X) = H^2(X, \mathbb{Z})$. De plus, on a le résultat suivant :

Proposition B.10. *Le groupe $H^1(X, (\mathcal{C}^0_X)^*)$ est isomorphes aux classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels complexes continus de rang 1 muni du produit tensoriel*

Démonstration. On peut trouver la démonstation de la bijection dans [Voi02] et pour obtenir l'isomorphisme, on pourra regarder les exercices 4.4 et 4.5 du chapitre 3 dans [Har77] grâce à l'identification entre (classes isomorphismes de) fibrés vectoriels et faiseaux localement libres (voir [Har77] exercice 5.18) □

Définition B.11. On appele première classe de Chern de E l'élément $c_1(E)$ de $H^2(X, \mathbb{Z})$.

Maintenant que l'on a définit la première classe de Chern d'un fibré en droites, on peut définir les classes de Chern d'un fibré vectoriel quelconque :

Théorème B.12. *On peut associer à tout fibré vectoriel $E \to X$, un unique polynôme $c(E) = \sum_{i=0}^{rk(E)} c_i t^i \in H^*(X, \mathbb{Z})[t]$ où $c_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ de telle sorte que :*

— *Si $rk(E) = 1$, $c(E) = 1 + tc_1(E)$*
— *Si $\varphi : X \to Y$ est une application continue alors $c(\varphi^* E) = \varphi^* c(E)$*
— *Si F et G sont des fibrés vectoriels sur X alors*[4] *$c(F \oplus G) = c(F)c(G)$*

Définition B.13. Le polynôme $c(E)$ est la classe de Chern de E.

De cette caractérisation, on obtient les résultats immédiats suivant :

Proposition B.14.
1. *Si E est un fibré trivial alors $c_1(E) = 1$*
2. *Si E est un fibré en droites et E' son dual alors $c_1(E') = -c_1(E)$.*
3. *Si X est une sous-variété de Y et $E \to Y$ un fibré de Y alors la classe de la Chern de la restriction de E est le pullback de $c(E)$ par l'inclusion $i : X \to Y$*

Démonstration. 1) Soit $X \times \mathbb{C}^n \to X$ le fibré trivial de rang n. Si $n = 1$, on sait que $c_1(X \times \mathbb{C}) = 0$ car $X \times \mathbb{C}$ est le neutre pour le produit tensoriel dans

4. la structure d'algèbre sur $H^*(X, \mathbb{Z})$ est définie de la façon suivante :
Soient $\omega_1 \in H^i(X, \mathbb{Z}), \omega_2 \in H^j(X, \mathbb{Z})$. La formule de Künneth nous donne une application $H^i(X, \mathbb{Z}) \oplus H^j(X, \mathbb{Z}) \to H^{i+j}(X \times X, \mathbb{Z})$ puis l'application diagonale $X \to X \times X$ nous donne une application $H^{i+j}(X \times X, \mathbb{Z}) \to H^{i+j}(X, \mathbb{Z})$. Le produit de ω_1 et ω_2, noté $\omega_1 \smile \omega_2$ et appelé cup-produit de ω_1 et ω_2, est la composée des deux applications précédentes appliqué en ω_1 et ω_2

$H^1(X, (\mathcal{C}^0)^*)$. Ainsi, par le point 1 et 3 de B.12,

$$c(X \times \mathbb{C}^n) = c\left(\bigoplus_{i=1}^{n} X \times \mathbb{C}\right) = c(X \times \mathbb{C})^n = (1 + tc_1(X \times \mathbb{C}))^n = 1$$

2) Comme c_1 est un morphisme de groupes et que $E \times E' \to X \times \mathbb{C}$ est non-dégénérée (et donc, est un isomorphisme) alors

$$0 = c_1(X \times \mathbb{C}) = c_1(E \times E^*) = c_1(E) + c_1(E')$$

3) On applique le point 2 de B.12 pour l'inclusion $i : X \to Y$

$\square$

B.4 Groupes de Lie

Définition B.15. Un groupe de Lie réel (resp. complexe) est un groupe $(G, *)$ dont l'ensemble sous-jacent est muni d'une structure de variété lisse (resp. complexe) compatible avec les lois de groupes i.e. les applications $(x, y) \in G \times G \mapsto x * y \in G$ et $x \in G \mapsto x^{-1} \in G$ sont lisses (resp. holomorphes). Autrement dit, un groupe de Lie réel (resp. complexe) est un groupe dans la catégorie des variétés différentielles (resp. variétés complexes).

Définition B.16. Soit G un groupe de Lie (réel ou complexe). L'algèbre de Lie, notée $\mathfrak{g}$, associée à G est l'espace vectoriel (réel ou complexe) des champs de vecteurs sur G invariants à gauche i.e. les champs de vecteurs X tels que, pour tout $g \in G$, $(L_g)_* X = X$.

L'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'espace tangent de G au neutre de la façon suivante :
A tout $x \in T_e G$, on associe le champ de vecteur $X : g \in G \mapsto d_e L_g(x)$ qui est invariant à gauche.

Définition B.17. Une variété (lisse ou complexe) est dite parallélisable si son fibré tangent est trivial.

Théorème B.18. *Un groupe de Lie (réel ou complexe) est parallélisable.*

Démonstration. Soit G un groupe de Lie (réel ou complexe).
On considère les applications

$$\begin{array}{rcl} TG & \to & G \times \mathfrak{g} \\ (g, v) & \mapsto & (g, d_g L_{g^{-1}}(v)) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} G \times \mathfrak{g} & \to & TG \\ (x, v) & \mapsto & (x, d_e L_g(v)) \end{array}$$

Elles sont lisses (resp. holomorphes) et inverses l'une de l'autre. Ce sont donc des isomorphismes. □

De façon analogue au cas réel, on définit les sous-groupes à un paramètre comme les morphismes de groupes $\mathbb{C} \to G$. On a une bijection entre les sous-groupes à un paramètre et les éléments de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$:

A tout sous-groupe à un paramètre $\varphi : \mathbb{C} \to G$, on associe l'élément $d_0\varphi\left(\frac{d}{dz}\right) \in \mathfrak{g}$ et un élément $g \in \mathfrak{g}$, on associe l'unique morphisme $\varphi_g : \mathbb{C} \to G$ tel que $d_0\varphi\left(\frac{d}{dz}\right) = g$ que l'on définit par $t \in \mathbb{C} \mapsto \exp_{G_\mathbb{R}}(tg)$ où $\exp_{G_\mathbb{R}}$ est l'exponentielle entre les espaces réels sous-jacents (l'unicité découle de celle du cas réel). On définit l'exponentielle d'un élément $g \in \mathfrak{g}$ par :

$$\exp(g) = \varphi_g(1)$$

Théorème B.19. *Soit G un groupe de Lie complexe et $\mathfrak{g}$ la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie associée. L'exponentielle réelle* $\exp_\mathbb{R} : \mathfrak{g}_\mathbb{R} \to G_\mathbb{R}$ *entre les structures réelles des deux espaces induit une application holomorphe* $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

Démonstration. Voir [Lee01] Théorème 1.15

□

Proposition B.20. *Un groupe de Lie complexe connexe compact est commutatif.*

Démonstration. Soit G un groupe de Lie complexe connexe compact.
Soit $x \in X$. La conjugaison par x dans G, $\sigma_x : y \in G \mapsto xyx^{-1}$ est un automorphisme de G. Sa différentielle est donc un isomorphisme.
Soit $\varphi : x \in G \mapsto d_e\sigma_x$. Cette application est holomorphe (car σ_x (et donc ses dérivées partielles) le sont. Comme X est compact alors φ est localement constante et comme de plus, X est connexe alors φ est constante.
On en déduit :

$$d_e\sigma_x = d_e\sigma_e = id_\mathfrak{g}$$

On en déduit que, pour tout $u \in G$,

$$\sigma_x(\exp(u)) = \exp(d_e\sigma_x(u)) = \exp(u)$$

Ainsi,

$$\exp(\mathfrak{g}) \subset Z(G)$$

De plus, par A.12,

$$G = \langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle \subset Z(G) \subset G$$

On en déduit que $Z(G) = G$ et donc que G est commutatif. □

Théorème B.21. *Soit G un groupe de Lie complexe connexe compact. Alors l'application $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un morphisme surjectif de groupes dont le noyau est un réseau de $\mathfrak{g}$. On obtient un isomorphisme :*

$$\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}(\exp) \simeq G$$

Démonstration. Soient $u, v \in \mathfrak{g}$ et $\psi : \mathbb{C} \to G$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{C}, \psi(t) = (\exp(tu)\exp(tv)) = \varphi_u(t)\varphi_v(t)$$

ψ est une fonction holomorphe. Par la commutativité de G donnée par B.20, ψ est un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \forall t, t' \in \mathbb{C}, \psi(t+t') &= \varphi_u(t+t')\varphi_v(t+t') = \varphi_u(t)\varphi_u(t')\varphi_v(t)\varphi_v(t') \\ &= \varphi_u(t)\varphi_v(t)\varphi_u(t')\varphi_v(t') = \psi(t)\psi(t') \end{aligned}$$

La différentielle de ψ en 0 est donnée par :

$$d_0\psi = (u+v)dt$$

Ainsi, par la correspondance précédant le théorème B.19, on en déduit que

$$\psi = \varphi_{u+v}$$

En évaluant en 1, on en déduit que :

$$\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$$

i.e. exp est un morphisme de groupes.
On en déduit que $\exp(\mathfrak{g})$ est un groupe et par A.12 et le fait que exp est un difféomorphisme local en 0 et que G est connexe,

$$\exp(\mathfrak{g}) = \langle \exp(\mathfrak{g}) \rangle = G$$

Pour montrer que Ker(exp) est discret, il suffit de le montrer au voisinage de 0 : Soit U un voisinage ouvert de 0 tel que $\exp_{|U}$ est injective (donnée par le théorème d'inversion locale). Alors, $U \cap \mathrm{Ker}(\exp) = \{0\}$.
Soit $\widetilde{\exp} : \mathfrak{g}/\mathrm{Ker}(\exp) \to G$ l'application obtenue par passage au quotient. C'est un isomorphisme de groupes qui est un biholomorphisme local en 0 et donc en tout point par translation. $\square$

C
Volumes

Cette annexe a pour but de donner tous les résultats nécessaires sur les volumes et l'intégration de formes différentielles sur des espaces analytiques complexes.

C.1 Formes volume

M désignera une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dimension (réelle) n.

Définition C.1. Une forme volume sur M est une section de $\bigwedge^n T^*M$ qui ne s'annule jamais.

Proposition C.2. *M admet une forme volume si, et seulement si, M est orientable*

Démonstration. Voir [Laf12] Section 6.A théorème 5 p 200

□

Proposition C.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne orientable. M admet une forme volume naturelle : en coordonnées locales, elle est donnée par :*

$$Vol_g = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

où $g_{ij} : x \mapsto g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})(x)$.
Cette forme volume vérifie la propriété suivante :
Pour toute point x *de* M *et toute base orthonormée* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de* T_xM*, on a l'égalité :*

$$Vol_g(x)(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = 1$$

Proposition C.4. *Soit* (M, ω) *une variété symplectique (*n *est donc pair). Alors* $\omega^{n/2}$ *est une forme volume sur* M *(*M *est donc orientée).*

Démonstration. ω^n ne s'annule jamais car ω est non-dégénérée (par définition de forme symplectique). $\square$

Théorème C.5. *Soit* (M, h) *une variété (presque-)complexe muni d'une métrique hermitienne. La forme* $g = Re(h)$ *est une métrique riemannienne. De plus, en notant* $\omega = -Im(h)$*, on obtient l'égalité :*

$$Vol_g = \frac{\omega^n}{n!}$$

Démonstration. cf [Voi02] $\square$

Proposition C.6. *Soit* (X, ω) *une variété de Kähler. Alors, pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$*,* ω^k *est fermé mais pas exacte.*

Démonstration. Cela se montre par récurrence (la démonstration du premier fait n'utilise pas celle du deuxième) :
Pour $k = 1$, ω est fermée (par définition) mais n'est pas exacte car :
Si $f : M \to \mathbb{C}$ est une fonction telle que $\omega = df$ alors $\omega^n = d(f\omega^{n-1})$ est exacte donc $Vol(M) = 0$, ce qui est absurde.
Supposons la propriété vraie pour $k \in \{1, \ldots, d-1\}$ alors :
$d\omega^{k+1} = d\omega \wedge \omega^k \pm \omega \wedge d\omega^k = 0$ (par l'hypothèse de récurrence : ω^k est fermée).
Si on suppose $\omega^{k+1} = d\gamma$ alors $d(\gamma \wedge \omega^{n-k-1}) = \omega^n \pm \gamma d\omega^{n-k-1} = \omega^n$, ce qui est absurde. $\square$

Théorème C.7 (Wirtinger)**.** *Soit* (M, h) *variété hermitienne avec* $\omega = -Im(h)$ *la forme associée. Soit* S *une sous-variété de* M *de dimension* k*. Alors,*

$$Vol(S) = \frac{1}{k!} \int_S \omega^k$$

Démonstration. cf [GH11] p31 □

On peut étendre ce résultat aux sous-espaces analytiques en définissant l'intégrale sur un sous-espace analytique comme étant l'intégrale sur son ouvert lisse.

C.2 Volume d'un graphe

Soient (X, ω_1) et (Y, ω_2) deux variétés de Kähler. Alors en posant pour tout $(x, y) \in X \times Y$, $\omega_{(x,y)} = \omega_{1,x} + \omega_{2,y}$, on obtient que $(X \times Y, \omega)$ est une variété de Kähler.

Lemme C.8. *Soit $f : X \to Y$ une fonction holomorphe. Alors,*

$$Vol(\Gamma_f) = \frac{1}{n!} \int_X (\omega_1 + f^* \omega_2)$$

Démonstration. Par la formule de Wirtinger, en posant $n := \dim(X)$,

$$Vol(\Gamma_f) = \frac{1}{n!} \int_{\Gamma_f} \omega^n$$

La projection π de Γ_f sur X est un difféomorphisme de réciproque $x \mapsto (x, f(x))$. On en déduit que :

$$Vol(\Gamma_f) = \frac{1}{n!} \int_X \pi^* \omega^n$$

Pour tout $x \in X$, $v, w \in T_x X$,

$$\pi^* \omega_x(v, w) = \omega_{(x, f(x))}((v, d_x f(v)), (w, d_x f(w))) = \omega_{1,x}(v, w) + \omega_{2, f(x)}(d_x f(v), d_x f(w))$$

Ainsi, $\pi^* \omega = \omega_1 + f^* \omega_2$. Ce qui permet de conclure. $\square$

C.3 Intégrations et classes de cohomologie

Théorème C.9 (Lemme de Poincaré)**.** *Soit M une variété différentielle orientée et soit k un entier, alors on a un isomorphisme*

$$H^k_{dR}(M) \simeq H^{n-k}_{dR}(M)^*$$

donné par $[\varphi] \mapsto ([\psi] \mapsto \int_M \varphi \wedge \psi)$.

Démonstration. [GH11] □

Soit M une variété complexe compacte, $V \subset M$ un sous-ensemble analytique de dimension k. On peut définir une application linéaire :

$$H^{2k}_{dR}(M) \to \mathbb{R}, [\varphi] \mapsto \int_V \varphi$$

Cette application est bien définie car les formes exactes sont envoyées sur 0 par le théorème de Stokes :

Théorème C.10 (Stokes pour les espaces analytiques)**.** *Soit M une variété complexe, V un sous-ensemble analytique de dimension k, et φ une forme différentielle de degré $2k-1$ à support compact de M,*

$$\int_V d\varphi = 0$$

Démonstration. cf [GH11] p33 □

Par le lemme de Poincaré C.9, cette application détermine un élément de $H^{2n-2k}_{dR}(M)$ que l'on appelera classe (fondamentale) de V et que l'on notera $[V]$. On définit la classe $[Z]$ d'un cycle analytique $Z = \sum_i n_i Z_i$ d'une variété M comme étant $\sum n_i[Z_i]$
Dans le cas où (M, ω) est une variété de Kähler, on peut définir le volume d'une classe de cohomologie qui généralise celui des sous-espaces analytiques :

Définition C.11. Soit $\alpha \in H^{2k}_{dR}(M)$. On appelle volume de α le réel $Vol(\alpha) = \frac{1}{(n)!}\int_M \alpha \wedge \omega^{n-k}$.

Si V est un sous-espace analytique de M alors par définition de la classe de V,

$$Vol([V]) = \frac{1}{n!}\int_V \omega^k = Vol(V)$$

De plus, si $Z = \sum_i n_i Z_i$ est un cycle de M,

$$Vol([Z]) = \sum n_i Vol([Z_i]) = \sum n_i Vol(Z_i)$$

est appelé volume du cycle Z.
On va donner deux résultats sur l'intégration sur les cycles que nous utilisons dans le corps du texte :

Proposition C.12. *Soit (M,h) une variété hermitienne et $\omega = -Im(h)$ la (1,1)-forme associée. Alors, la fonction $X \in \mathscr{C}_n(M) \mapsto \int_X \omega^n$ est continue.*

Démonstration. cf [BM14] p 389 □

Dans le cas Kähler, on peut même être un peu plus précis :

Théorème C.13. *Soient (M,ω) une variété de Kähler. Alors, la fonction $X \in \mathscr{C}_n(M) \mapsto \int_X \omega^n$ est localement constante.*

Démonstration. cf [BM14] p 409 □

Bibliographie

[Akh12] Dimitrij Akhiezer. *Lie Group Actions in Complex Analysis*. Springer Science & Business Media, December 2012.

[Bar75] Daniel Barlet. *Espace analytique reduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finie*. Université de Nancy, 1975.

[BHPV04] W. Barth, K. Hulek, Chris Peters, and A. van de Ven. *Compact Complex Surfaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2 edition, 2004.

[Bis64] Errett Bishop. Conditions for the analyticity of certian sets. *The Michigan Mathematical Journal*, 11(4) :289–304, December 1964.

[BM47] Salomon Bochner and Deane Montgomery. Groups On Analytic Manifolds. *Annals of Mathematics*, 48(3) :659–669, 1947.

[BM14] Daniel Barlet and Jon I. Magnusson. *Cycles analytiques complexes I : théorèmes de préparation des cycles*, volume 22 of *Cours Spécialisés*. SMF, November 2014.

[Bou07] N. Bourbaki. *Topologie générale : Chapitres 1 à 4*. Éléments de Mathématique. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry.* Springer Science & Business Media, June 1993.

[Cat88] F. Catanese. Moduli of algebraic surfaces. In Edoardo Sernesi, editor, *Theory of Moduli*, Lecture Notes in Mathematics, pages 1–83. Springer Berlin Heidelberg, 1988.

[Die06] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis.* Read Books, May 2006.

[GH11] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley, August 2011.

[GPR13] H. Grauert, Thomas Peternell, and R. Remmert. *Several Complex Variables VII : Sheaf-Theoretical Methods in Complex Analysis.* Springer Science & Business Media, March 2013.

[GR84] H. Grauert and R. Remmert. *Coherent Analytic Sheaves.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.

[Gun90] Robert Clifford Gunning. *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables : Homological theory.* Wadsworth & Brooks/Cole, September 1990.

[Gun18] R. C. Gunning. *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables : Local theory.* Routledge, May 2018.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1977.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.

[Laf12] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.* EDP Sciences, December 2012.

[Lee01] Dong Hoon Lee. *The Structure of Complex Lie Groups.* CRC Press, August 2001.

[Lic67] André Lichnerowicz. Variétés kähleriennes et première classe de chern. *J. Differential Geom.*, 1(3-4) :195–223, 1967.

[Lie78] David I. Lieberman. *Compactness of the Chow scheme : Applications to automorphisms and deformations of Kahler manifolds.* Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1978.

[LS18] Bernard Le Stum. Géométrie Algébrique (Schémas/Espaces adiques). 2018.

[Mat69] Yozô Matsushima. Holomorphic vector fields and the first Chern class of a Hodge manifold. *Journal of Differential Geometry*, 3(3-4) :477–480, 1969.

[Voi02] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* Société Mathématique de France, 2002.