Séminaire des doctorants : Problème de l'aiguille de Kakeya et ensembles de Besicovitch

Antoine BOIVIN

22 juin 2024

Résumé

Soichi Kakeya proposait, en 1917, le problème suivant : "Quelle est l'aire minimale nécessaire pour faire tourner une aiguille d'un tour complet ?". En parallèle, Abram Besicovitch étudiait le problème d'intégration suivant : "Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable telle que pour tout choix d'axes orthogonaux, la restriction de f sur ces axes ne soit pas Riemann-intégrable ?". Ces deux problèmes a priori éloignés se résolvent grâce à la construction d'ensembles (du plan ici) contenant un segment dans toutes les directions et qui soit de mesure nulle (appelés maintenant ensemble de Besicovitch/de Kakeya selon les auteurs). L'étude de ces ensembles n'est pas encore finie puisque le problème de la dimension de Hausdorff de tels ensembles est encore ouvert (mais est conjecturalement la dimension de l'espace ambiant).

Dans cet exposé, nous allons, dans un premier temps, voir la construction de ces ensembles et comment ils permettent de résoudre les problèmes originaux de Kakeya et de Besicovitch. Nous allons ensuite voir quelques éléments de réponse à la conjecture sur la dimension des ensembles de Besicovitch : une condition suffisante provenant de l'étude de fonctions maximales et une heuristique sur un analogue sur un corps fini.

Enfin, si le temps le permet, on verra les applications de ces ensembles en analyse harmonique.

1 Introduction

Question 1.1 (Kakeya). "Quelle est l'aire minimale nécessaire pour faire tourner un segment unité d'un tour complet ?" On cherche un domaine du plan D contenant un segment de longueur 1 et qui permet, par translations et rotations (telles que l'aire balayée soit dans D), au segment de faire un tour complet et revenir à sa position initiale.

Exemple 1.2. Le disque $\frac{1}{2}\mathbb{D}^1$ de rayon $1/2$ vérifie cette propriété ($\lambda(\frac{1}{2}\mathbb{D}^1) = \frac{\pi}{4}$)

Exemple 1.3. Le triangle équilatéral T de hauteur 1 ($\lambda(T) = \frac{1}{\sqrt{3}}$).

Théorème 1.4 (Pál,1921)**.** *Si on demande que le domaine soit convexe, ce triangle équilatéral est optimal.*

Exemple 1.5 (optimal conjectural (Kakeya))**.** Le deltoïde[1] ($\lambda(T) = \frac{\pi}{8}$).

Théorème 1.6. *L'aire peut être arbitrairement petite.*

Question 1.7 (Besicovitch). "Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable telle que pour tout choix d'axes orthogonaux, la restriction de f sur ces axes ne soit pas Riemann-intégrable ?"

Réponse 1.8 (commune). Il existe des ensembles (compacts) de mesure nulle et contenant un segment dans chaque direction.

2 Problème de base

Lemme 2.1. *Soient D_1 et D_2 deux droites du plan. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble F_ε de mesure $\leq \varepsilon$ tel que tout segment unité contenu dans D_1 peut être envoyé par une composition de translations et de rotations vers un segment unité de D_2 sans quitter F_ε.*

Démonstration. To Do □

Proposition 2.2. *L'aire de la figure ainsi construite vérifie*

$$\lambda(S) = \lambda(T)(\alpha^2 + 2(1-\alpha)^2)$$

Démonstration. Thalès □

Corollaire 2.3. *Pour tout k et tout α raisonnable*

$$\lambda(S_k(\alpha)) \leq \lambda(T)(\alpha^{2k} + 2(1-\alpha))$$

1. `https://mathcurve.com/courbes2d/deltoid/deltoid.shtml`

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et α suffisamment proche de 1. Alors, en itérant la formule précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda(S_k(\alpha)) &\leq \text{ aire du triangle central} + \sum \text{ aire des cornes successives} \\
&\leq \lambda(T)\alpha^{2k} + 2\sum_{i=0}^{k-1} \alpha^{2i}(1-\alpha)^2\lambda(T) \\
&\leq \lambda(T)\left(\alpha^{2k} + 2(1-\alpha)^2\left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}\right)\right) = \lambda(T)\left(\alpha^{2k} + 2(1-\alpha)\left(\frac{1-\alpha^{2k}}{1+\alpha}\right)\right) \\
&\leq \lambda(T)\left(\alpha^{2k} + 2(1-\alpha)\right)
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4. *Pour tout voisinage ouvert borné* U *de* T *et tout* $k \geq 2$*, il existe un* $\alpha \in]1/2, 1[$ *tel que* $S_k(\alpha) \subset U$*.*

Démonstration. Il suffit de prendre un $\alpha \in]\max(1/2, 1 - \frac{1}{2}d(T, \partial U)), 1[$. □

Corollaire 2.5. *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* k *et un* $\alpha \in]1/2, 1[$ *tel que* $S_k(\alpha) \subset U$ *et*

$$\lambda(S_k(\alpha)) \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Comme $-1 < \alpha < 1$ alors $\alpha^{2k} \to 0$ et comme on peut choisir α aussi proche que l'on veut de 1, on peut prendre un k suffisament grand et α suffisament proche de 1 afin d'obtenir l'égalité. □

Construction 2.6. *On va construire l'ensemble de Kakeya : Quitte à faire des rotations, on peut juste construire un ensemble où on peut faire une rotation d'angle* $\pi/3$*. Considérons le triangle équilatéral* S_1 *de côté 1 et un voisinage ouvert tel que*

$$\lambda(\overline{U_1}) \leq 2\lambda(S_1)$$

On appelle S_2 *un* $S_k(\alpha)$ *inclus dans* U_1 *tel que*

$$\lambda(S_2) = \lambda(S_k(\alpha)) \leq \frac{1}{2}\lambda(S_1)$$

et on prend U_2 *un voisinage ouvert de* S_2 *tel que*

$$\lambda(\overline{U_2}) \leq 2\lambda(S_2)$$

L'espace S_2 *est constitué de triangle d'hauteur 1. On peut donc itérer la construction pour créer un espace* S_3 *et un ouvert* U_3 *tels que*

$$\lambda(S_3) \leq \frac{1}{2}\lambda(S_2)$$

et

$$\lambda(\overline{U_3}) \leq 2\lambda(S_3)$$

On construit ainsi une famille (S_j) *d'espaces contenant des segments unités pour* $\theta \in [x, x + \pi/3]$ *(pour un certain* x*) en les faisant passer par « les cornes » et d'ouverts* (U_j) *qui les contiennent aussi tels que*

$$\lambda(\overline{U_j}) \leq 2\lambda(S_j) \leq 2 \times 2^{-j+1} \times \lambda(S_1).$$

Ainsi, par compacité, $F = \bigcap_j \overline{U_j}$ *contient aussi des segments unités pour* $\theta \in [x, x + \pi/3]$ *et est de mesure nulle.*

Théorème 2.7. *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un ensemble (compact) du plan* E_ε *avec* $\lambda(E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ *tel qu'un segment unité peut être envoyé (par une composition de transformations élémentaires du plan) vers sa position en échangeant les extrémités tout en restant dans* E_ε*.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par le théorème 2.5, on construit un ensemble $E = S_k(\alpha) = \bigcup_{j=1}^{2^k} T_j$ tel que

$$\lambda(E) \leq \frac{\varepsilon}{6}$$

On applique ensuite le lemme 2.1 pour construire des E_j qui permet de déplacer un segment unité d'un côté T_j vers T_{j+1} et tels que

$$\lambda(E_j) = \frac{\varepsilon}{6 \times 2^k}$$

L'ensemble $E_\varepsilon \coloneqq \bigcup_j E_j$ vérifie

$$\lambda(E_\varepsilon) \leq \lambda(E) + \sum_{j=1}^{2^k-1} \lambda(E_j) \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{(2^k - 1)\varepsilon}{6 \times 2^k} < \varepsilon$$

et permet de faire la rotation voulue. □

Théorème 2.8. *Soit* A *un sous-espace d'un espace topologique* X*. L'ensemble des points de discontinuité de* χ_A *est* ∂A*.*

Théorème 2.9. *Soit* $K \subset \mathbb{R}^n$ *un compact. Une fonction* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dont le support est inclus dans* K *est Riemann-intégrable si, et seulement si son lieu de discontinuité est négligeable.*

Théorème 2.10. *Il existe une fonction Riemann-intégrable* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telle que la restriction à n'importe quelle paire d'axes orthogonaux ne soit pas intégrable.*

Démonstration. Soit (x, y) des coordonnées orthogonales de $\mathbb{R}^2$. Soit E un ensemble compact de Besicovitch. Par définition, il existe des segments unités $I_x \subset \{y = a\}$ et $I_y = \{x = b\}$ inclus dans E. Quitte à translater E, on peut supposer que $a, b \notin \mathbb{Q}$. On considère ensuite l'ensemble

$$E_0 \coloneqq \{(x, y) \in E \mid x \in \mathbb{Q} \text{ ou } y \in \mathbb{Q}\}$$

et la fonction $f = \chi_{E_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Comme $E \supset E_0$ est compact et que son lieu de discontinuité $\partial E_0 \subset E$ est de mesure nulle alors f est Riemann-intégrable. Cependant comme $E_0 \cap I_x$ et son complémentaire dans I_x (resp. $E_0 \cap I_y$ et son complémentaire dans I_y) sont denses dans I_x alors le lieu de discontinuité de $f_{|I_x}$ est

$$\mathrm{Disc}(f) = \partial(I_x \cap E_0) = I_x \cap \overline{I_x \cap E_0} = I_x \cap I_x = I_x$$

qui est de mesure 1 (pareil pour $f_{|I_y}$). On en déduit donc que $f_{|I_x}$ et $f_{|I_y}$ ne sont pas intégrables

$\square$

3 Hausdorff

Définition 3.1. Soit (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ et $s > 0$. On définit, pour tout $\delta > 0$

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_i \mathrm{diam}(F_i)^s, A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i, \mathrm{diam}(F_i) \leq \delta \right\}$$

La s-mesure de Hausdorff de A est donnée par

$$\mathscr{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathscr{H}^s_\delta(A).$$

Remarque 3.2. Si $X = \mathbb{R}^n$ alors se restreindre les F_i à être des boules change la mesure mais pas la dimension.

Proposition 3.3. — *La mesure $\mathscr{H}^s$ est une mesure de Borel régulière mais n'est pas une mesure de Radon pour $s \neq n$*

— *Si A est $\mathscr{H}^s$-mesurable et de mesure finie alors $\mathscr{H}^s_{|A}$ est une mesure de Radon.*

— *Si $X = \mathbb{R}^n$ et $s = n$ alors (par l'inégalité isodiamétrique)*

$$\lambda = \frac{\mathrm{Vol}(B(0,1))}{2^n} \mathscr{H}^n$$

Proposition 3.4. *Pour tout $0 \leq s < t < \infty$ et $A \subset X$ métrique alors*

— *Si $\mathscr{H}^s(A) < \infty$ alors $\mathscr{H}^t(A) = 0$.*

— *Si $\mathscr{H}^t(A) > 0$ alors $\mathscr{H}^s(A) = \infty$.*

Définition 3.5. Soit $A \subset X$ métrique. La dimension de Hausdorff de A, noté $\dim_H(A)$, est définie par

$$\begin{aligned} \dim_H(A) &= \sup\{t \mid \mathscr{H}^t(A) > 0\} \\ &= \sup\{s \mid \mathscr{H}^s(A) = \infty\} \\ &= \sup\{s \mid \mathscr{H}^s(A) < \infty\} \\ &= \inf\{t \mid \mathscr{H}^t(A) = 0\} \end{aligned}$$

Proposition 3.6. *Supposons* X *séparable. Alors,*

- $\dim_H(X) \leq \dim(X)$. *En particulier, si* $X \subset \mathbb{R}^n$ *alors* $\dim_H(X) \leq n$
- $\dim(X) = \inf_{Y \simeq_{\mathrm{Top}} X} \dim_H(Y)$
- *si* $f : X \to Y$ *est Lipschitz alors* $\dim_H f(X) \leq \dim_H Y$.

Exemple 3.7 (le segment)**.** Considérons le segment unité $A = [0, 1]$ et $s > 0$. Si $s \leq 1$ alors $|x + y|^s \leq |x|^s + |y|^s$ et donc ce qui va minimiser $\sum \mathrm{diam}(F_i)^s$ est les F_i de diamètre δ qui s'intersectent au pire en un point. On en déduit

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor} \delta^s = \delta^s \lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor$$

On en déduit donc que $\mathscr{H}^s_\delta(A)$ est ∞ si $s < 1$ et vaut 1 si $s = 1$ (on a donc $\dim_H(A) = 1$). Si $s > 1$ alors $|x + y|^s \geq |x|^s + |y|^s$ et donc ce qui va minimiser $\sum \mathrm{diam}(F_i)^s$ est les F_i de diamètre qui tend vers 0 :

$$\mathscr{H}^s(A) = \mathscr{H}^s_\delta(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \epsilon^s \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor = 0$$

Exemple 3.8. Considérer l'ensemble de Cantor $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ où

$$C_n = \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\left[\frac{3k}{3^n}, \frac{3k+1}{3^n} \right] \cup \left[\frac{3k+2}{3^n}, \frac{3k+3}{3^n} \right] \right).$$

Si $s \leq 1$ alors, grâce à l'exemple précédent

$$\mathscr{H}^s_{1/3^n}(C) = \sum_{\text{segments de } C_n} \left(\frac{1}{3^n} \right)^s = \frac{2^n}{3^{ns}}$$

On en déduit que si $s < \log(2)/\log(3)$ alors $\mathscr{H}^s(C) = +\infty$, si $s = \log(2)/\log(3)$ alors $\mathscr{H}^s(C) = 1$ et si $s < \log(2)/\log(3)$ alors $\mathscr{H}^s(C) = 0$

4 Conjecture de Kakeya

4.1 Énoncé

Définition 4.1. Soit $k < n$ deux entiers. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble de Besicovitch (resp. de Kakeya) s'il contient un segment dans toutes les directions (resp. et est de mesure nulle).

Conjecture 4.2. *Tout ensemble de Kakeya de* $\mathbb{R}^n$ *est de dimension de Hausdorff* n*.*

Théorème 4.3 (Davies)**.** *Vrai en dimension 2*

4.2 Lien avec les fonctions maximales

Soit τ une famille d'ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$. On définit une fonction maximale associée, pour toute fonction « raisonnable »

$$M_\tau f : x \mapsto \sup_{T\in\tau, T\ni x} \int_T |f(y)| d\mu_T(y)$$

Exemple 4.4. Considérons la famille τ des boules $B(x,r)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ munie de la mesure $\mu_{B(x,r)} = \frac{\lambda}{\lambda(B(x,r))}$. Alors, pour toute fonction $f \in L^1_{loc}$,

$$M_\tau f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| d\lambda$$

Théorème 4.5. *Il existe des constantes* C_1 *et* C_p *(*$1 < p < \infty$*) tels que :*

$$\forall f \in L^1, \forall t > 0, \lambda(\{M_\tau f > t\}) \leq \frac{C_1}{t} \|f\|_1$$

et

$$\forall f \in L^p, \|M_\tau f\| \leq C_p \|f\|_p$$

Remarque 4.6. L'opérateur M_τ n'est pas borné sur L^1 ($C_p = O_1\left(\frac{1}{p-1}\right)$).

Exemple 4.7. Considérons la famille τ des boules $T_\nu^\delta(a)$ avec $a \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$ et $\delta > 0$ munie de la mesure $\mu_{T_\nu^\delta(a)} = \frac{\lambda}{\lambda(T_\nu^\delta(a))}$. Alors, pour toute fonction $f \in L^1_{loc}$,

$$f_\delta^* : \nu \in \mathbb{S}^{n-1} \mapsto \sup_{r>0} \frac{1}{T_\nu^\delta(a))} \int_{T_\nu^\delta(a)} |f| d\lambda$$

Question 4.8. Pour quels $p \geq 1$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \|f_\delta^*\|_{L^p(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_{L^p} \tag{1}$$

Ok pour $p = \infty$ et n'arrive jamais pour $p < n$ (avec $f = \chi_{B(0,\delta)}$)

Conjecture 4.9. *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $C_\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\|f_\delta^*\|_{L^n(\mathbb{S}^{n-1})} \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_{L^n}$$

Théorème 4.10. *Si* (1) *est vrai pour* $p < \infty$ *alors les ensembles de Besicovitch de* $\mathbb{R}^n$ *sont de dimension* n.

Théorème 4.11. *Il existe* $C > 0$ *tel que pour toute fonction* $f \in L^1_{loc}$,

$$\|f_\delta^*\|_{L^2(\mathbb{S}^1)} \leq C \log(1/\delta)^{1/2} \|f\|_{L^2}$$

5 Ensembles de Besicovitch dans un corps fini

Soit k un corps fini de cardinal q et $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Définition 5.1. Un sous-ensemble E de k^n est un ensemble de Besicovitch s'il contient une droite dans toutes les directions i.e. pour tout $v \in k^n \setminus \{0\}$, il existe $a \in k^n$ tel que pour tout $t \in k$, $a + tv \in E$.

Théorème 5.2. *Soit E un espace de Besicovitch de k^n. Alors il existe c (qui ne dépend que de n) tel que*

$$\mathrm{Card}(E) \geq c\,\mathrm{Card}(k)^n$$

Proposition 5.3. *Soit E un espace de Besicovitch de k^n. Alors il existe C (qui ne dépend que de n) tel que*

$$\mathrm{Card}(E) \geq C\,\mathrm{Card}(k)^{(n+2)/2}$$

Démonstration. Supposons $n = 2$. Supposons que E contient au moins $q/2$ points sur m droites D_j dont toutes les directions sont différentes (en particulier $m \leq \mathrm{Card}(\mathbb{P}^1(k)) = q+1$). On va montrer qu'alors $\mathrm{Card}(E) \geq Cmq$.

On a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Card}(E \cap D_j)\right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{x \in \mathbb{F}_p^n} \chi_{E \cap D_j}(x)\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{x \in E} \chi_{D_j}(x)\right)^2 = \left(\sum_{x \in E} \sum_{j=1}^{m} \chi_{D_j}(x)\right)^2 \\ &\leq \left(\sum_{x \in E} 1\right) \sum_{x \in E} \left(\sum_{j=1}^{m} \chi_{D_j}(x)\right)^2 = \mathrm{Card}(E) \sum_{x \in E} \left(\sum_{j=1}^{m} \chi_{D_j}(x)\right)^2\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\sum_{x \in E} \left(\sum_{j=1}^{m} \chi_{D_j}(x)\right)^2 &= \sum_{x \in E} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \chi_{D_i}(x) \chi_{D_j}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{x \in E} \chi_{D_i \cap D_j}(x) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Card}(D_i \cap D_j)\end{aligned}$$

Calculons maintenant cette dernière valeur :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Card}(D_i \cap D_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \neq j} \mathrm{Card}(D_i \cap D_j) + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Card}(D_j) = m(m-1) + mq \leq 2mq$$

On en déduit donc que

$$\frac{1}{2}qm \leq \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Card}(E \cap D_j) \leq \sqrt{2mq\,\mathrm{Card}(E)}$$

Autrement dit,

$$\mathrm{Card}(E) \geq \frac{1}{8}qm$$

On conclut en prenant $m = q + 1$.
TO DO : Cas en dimension supérieure □

Remarque 5.4 (TO DO)*.* Retour au cas euclidien.

Lemme 5.5. *Soit* $d \in \mathbb{N}$*. Soit* $E \subset k^n$ *un ensemble de cardinal strictement inférieur à* $\binom{n+d}{n}$*. Alors il existe un polynôme non nul* $P \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *de degré inférieur à* d *qui s'annule sur* E*.*

Démonstration. Considérons l'application linéaire $k[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d} \to k^E$ définie par $P \mapsto (P(x))_{x \in E}$. Comme $\mathrm{Card}(E) < \binom{n+d}{n} = \dim(k[x_1, \ldots, x_n]_{\leq d})$ alors cette application n'est pas injective.

□

Proposition 5.6. *Soit* $P \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *un polynôme de degré au plus de* $q - 1$ *qui s'annule sur un ensemble de Besicovitch. Alors* P *est le polynôme nul.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que P n'est pas nul. Il s'écrit alors $P = \sum_{i=1}^{d} P_i$ avec $0 < d \leq q - 1$ (P ne peut pas être constant car s'annule sur E), P_i homogène de degré i et $P_d \neq 0$.
Soit $v \in k^n \setminus \{0\}$. Alors, comme E est un ensemble de Besicovitch, il existe $a \in k^n$ tel que $a + kv \subset E$. Considérons donc le polynôme

$$P(a + tv) = P_d(v)t^d + \ldots \in k[t]_{\leq q-1}$$

Il s'annule q fois ; il est donc nul. On obtient ainsi une contradiction car $P_d = 0$ puisque il s'annule en chaque point de k^n et est de degré $d < \mathrm{Card}(k)$. □

Grâce aux deux résultats précédents, on obtient :

Corollaire 5.7. *Tout ensemble de Besicovitch de* k^n *est de cardinal supérieur à*

$$\binom{\mathrm{Card}(k) + n - 1}{n}$$

Ce dernier nombre est lui-même supérieur à $\frac{1}{n!}\,\mathrm{Card}(k)^n$

6 Lien avec l'analyse harmonique

Soit m une fonction $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Elle définit un opérateur $T_m : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ par l'intermédiaire de la transformée de Fourier :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \widehat{T_m f} = m\widehat{f}$$

Lemme 6.1. *Pour tout* $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, T_m *est borné pour la norme* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *et de norme* $\|m\|_\infty$.

On va considérer la famille d'opérateurs $S_R \coloneqq T_{\chi_{B(0,R)}}$ pour $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et de sa convergence vers f en $+\infty$.

Théorème 6.2. *Pour tout* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $S_R f \to f$ *en norme* L^2.

Démonstration. Pour tout $f \in L^2$, on a :

$$\|S_R f - f\|^2 = \|\widehat{S_R f - f}\|_2 = \|(\chi_{B(0,R)} - 1)\widehat{f}\|_2 = \|\chi_{B(0,R)^c}\widehat{f}\|_2$$

Comme $|\chi_{B(0,R)^c}\widehat{f}|$ converge simplement vers 0 et est dominée par $|\widehat{f}|^2$ qui est intégrable alors, par convergence dominée, on en déduit que $\|S_R f - f\|_2 \to 0$. □

Théorème 6.3. *Pour tout* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $S_R f \to f$ *en norme* L^p, $1 \leq p \leq \infty$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (et donc $\widehat{f} \in \mathcal{S}$), $p \in [1, \infty]$ et $R \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned}\|S_R f - f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{B(0,R)^c} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi \right|^p dx \\ &= \int_{B(0,1)} \left| \int_{B(0,R)^c} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi \right|^p dx + \int_{B(0,1)^c} \left| \int_{B(0,R)^c} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi \right|^p dx\end{aligned}$$

Le premier terme est inférieur à, par inégalité triangulaire,

$$\int_{B(0,1)} \int_{B(0,1)^c} |\widehat{f}|^p = \|\widehat{f}\chi_{B(0,1)^c}\|_{L^p}^p \mathrm{Vol}(B(0,1)) \to 0$$

Pour le deuxième, on peut écrire pour N suffisament grand

$$\int_{B(0,1)^c} \left| \int_{B(0,R)^c} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi \right|^p dx = \int_{B(0,1)^c} \left| \int_{B(0,R)^c} x^N \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi \right|^p \frac{dx}{x^N}$$

Par intégration par parties successives et grâce au fait que $\widehat{f}$ et toutes ses dérivées successives sont Schwartz, on montre que

$$\int_{B(0,R)^c} x^N \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi = \int_{B(0,R)^c} \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi + (\text{autres termes convergeant vers } 0)$$

où $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Par convergeance dominée cela converge aussi vers 0. On en déduit donc que pour R suffisamment grand,

$$\int_{B(0,1)^c} \left| \int_{B(0,R)^c} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\langle x,\xi\rangle} d\xi \right|^p dx \leq \int_{B(0,1)^c} \varepsilon^p \frac{dx}{x^N} = \text{Constante } \varepsilon^p$$

$\square$

Théorème 6.4. *Soit* $f \in L^p$. *Les conditions suivantes sont équivalentes*

1. $S_R f \to f$ *dans* L^p.
2. $(S_R)_R$ *est uniformément bornée*
3. S_1 *est bornée*

Démonstration. L'équivalence entre 2 et 3 se fait par changement de variables. L'implication de 1 vers 2 est évidente. Il nous reste sa réciproque.
Soit $f \in L^p$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ alors il existe $g \in \mathcal{S}$ tel que $\|f-g\|_2 < \varepsilon/2$ (que l'on fixe). Ainsi, $S_R g \to g$ et

$$\begin{aligned}\limsup \|S_R f - f\|_p &\leq \limsup(\|S_R f - S_R g\|_p + \|S_R g - g\|_p + \|g - f\|_p) \\ &\leq \limsup \|S_R(f-g)\|_p + \varepsilon/2 \leq \limsup \|S_R\| \|f-g\|_p + \varepsilon/2 \\ &\leq \varepsilon/2(\sup \|S_R\| + 1).\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 6.5. S_1 *est borné en norme* L^p *pour* $1 \leq p \leq \infty$. *Autrement dit, pour tout* $f \in L^p$, $S_R f \to f$ *en norme* L^p.

Démonstration. To Do (lien avec la transformation de Hilbert) $\square$

Théorème 6.6 (Fefferman)**.** *On a la convergence* $S_R f \to f$ *dans* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *si, et seulement si,* $p = 2$ *ou* $n = 1$.

Idées de preuve.

1. ok en dimension d implique ok en dimension $d-1$
2. par dualité $p > 2$
3. Construction d'un contre-exemple avec une construction d'ensemble de Besicovitch.

$\square$