Séminaire des doctorants : Axiome du choix

Antoine BOIVIN

6 Décembre 2021

Résumé

L'axiome du choix est un axiome de la théorie des ensembles formulé par Ernst Zermelo en 1904 pour formaliser son théorème du bon ordre ("tout ensemble non-vide peut être bien ordonné"). Bien qu'indépendant des autres axiomes de la théorie de Zermelo-Fraenkel (Gödel, Cohen), certains mathématiciens préfèrent ne pas l'utiliser car il peut aboutir à des "paradoxes" (dont le plus connu est celui de Banach-Tarski) et n'est pas constructif.

Dans cette exposé, on commencera par énoncer différentes formes de l'axiome du choix (et notamment le théorème de bon d'ordre de Zermelo et le lemme de Zorn) puis quels énoncés on peut obtenir grâce à cet axiome. Ensuite, on verra que l'absence de l'axiome du choix (et même si l'on considère des formes affaiblies de celui-ci) entraîne aussi des résultats qui peuvent sembler "paradoxaux". Enfin, si le temps le permet, on abordera les résultats qui sont plus fort que le choix.

1 Introduction

Le cadre dans lequel on considère l'axiome du choix est la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel qui est une axiomatisation en logique du premier ordre de la théorie des ensembles qui a été développé par Georg Cantor à la fin du XIXème et axiomatisé par Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel (et Thoralf Skolem) début XXème.

Proposition 1.1. *Si* A *et* B *deux ensembles non vides alors on peut construire leur produit explicitement dans ZF*

$$A \times B := \{(a,b) := \{a,\{a,b\}\} \mid a \in A, b \in B\} = \{z \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) \mid \exists a \in A, \exists b \in B, z = (a,b)\}$$

et celui-ci est non vide.

Le corollaire immédiat est le produit **fini** d'ensembles non vides est non vide.

Axiome 1.2 (du choix)**.** *Soit* I *un ensemble et* $(A_i)_{i\in I}$ *une famille d'ensembles non-vide indexée par* I*. Alors le produit*

$$\prod_{i\in I} A_i := \{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i\}$$

est non-vide.

Cet axiome nous donne la possibilité de faire une infinité de choix de façon simultanée (i.e. la famille d'éléments $(f(i))_{i\in I}$)

Remarque 1.3. Si on fait plus d'hypothèse sur I (e.g. si c'est un ensemble totalement ordonné), on peut construire un tel élément (par récurrence transfinie [1]).

Théorème 1.4 (Gödel 1938, Cohen 1963)**.** *Si* ZF *est cohérent alors l'axiome du choix est indépendant de ZF i.e. ZF ne montre pas AC et ne le réfute pas.*

Même s'il est indépendant de ZF, l'axiome du choix fait un peu polémique car il entraine (notamment) le paradoxe de Banach-Tarski qui dit que l'on peut obtenir, à partir d'une boule, deux boules de même volume que la première par découpage-collage.

Dans cet exposé, je vais expliquer les conséquences que peuvent avoir l'acceptation ou pas de l'axiome du choix.

2 Reformulation autour de l'axiome du choix

Théorème 2.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

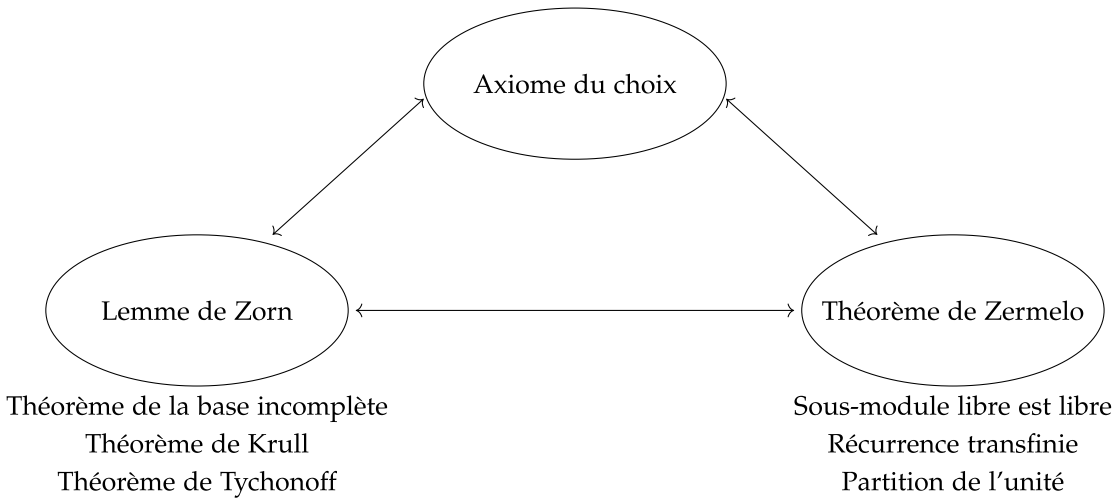
1. *l'axiome du choix ;*
2. *Pour tout ensemble* X *d'ensembles non vides, il existe une fonction* $\Phi\colon X \to \bigcup_{x\in X} x$ *tel que*
$$\forall x \in X \setminus \emptyset, \Phi(x) \in x$$
3. *Toute surjection admet une section.*
4. *Un ensemble infini* X *a le même cardinal que* $X \times X$*.*

Remarque 2.2. L'assertion duale de (3) i.e. " toute injection admet une rétraction" [2] est toujours vraie.

Lemme 2.3 (Zorn)**.** *Tout ensemble ordonné inductif*[3] *admet au moins un élément maximal.*

Théorème 2.4 (Zermelo)**.** *Tout ensemble non-vide peut être muni d'un bon ordre.*

1. ok dans la théorie de Zermelo
2. Rapport avec Cantor-Bernstein ?
3. toute partie bien ordonné a un majorant



Slogan 2.5.

> "The Axiom of Choice is obviously true, the Well–ordering theorem is obviously false ; and who can tell about Zorn's Lemma ?"
>
> Jerry Bona

Axiome 2.6 (du choix dénombrable)**.** *Soit* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *une famille d'ensembles non-vides. Alors le produit* $\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i$ *est non-vide.*

Axiome 2.7 (du choix dépendant)**.** *Soient* E *un ensemble non-vide et* R *une relation sur* E *tel que pour tout* $x \in E$*, il existe* $y \in E$ *tel que* xRy *alors il existe une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* E *tel que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $x_n R x_{n+1}$.

3 Acceptation de l'axiome du choix

Théorème 3.1. *Dans la théorie ZF, les deux propositions suivantes sont équivalentes*

1. *L'axiome du choix ;*
2. *Tout ensemble non-vide admet une loi de composition interne qui en fait un groupe.*

Idées de preuve. $\mathbf{2} \Rightarrow \mathbf{1}$:
Soit X un ensemble. Notons $\aleph(X)$ le nombre d'Hartogs[4] de X. On munit $X \cup \aleph(X)$ d'une loi de groupe $\cdot$. Pour des raisons de taille, pour tout $x \in X$,

4. C'est le nombre de façon de bien ordonner un ensemble de cardinal au plus $\mathrm{Card}(X)$. Cet ensemble existe sans avoir à utiliser l'axiome du choix et il n'existe pas d'injection $\aleph(X) \to X$

il existe $\alpha \in \aleph(X)$ tel que $\alpha \cdot x \in \aleph(X)$. On peut donc définir une application $X \to \aleph(X) \times \aleph(X)$ qui associe à $x \in X$ le plus petit couple (pour l'ordre lexicographique) (α, β) tel que $\alpha \cdot x = \beta$. Cette application définit un ordre par

$$x < y \text{ si } j(x) < j(y)$$

C'est un bon ordre. On a montré que tout ensemble peut être bien ordonné i.e. l'axiome du choix est alors vrai.

1 $\Rightarrow$ **2** :

Soit X un ensemble. Si X est fini alors on peut transporter la loi de $\mathbb{Z}/|X|\mathbb{Z}$ sur X. Soit F l'ensemble des sous-ensembles finis de X. On peut le munir d'une loi de groupe grâce à la différence symétrique ($X\Delta Y \coloneqq (X \cup Y) \setminus X \cap Y)$). On va montrer que $|X| = |F|$.

On sait que $|X| \leq |F|$ car F contient tous les singletons donnés par un élément de X.

Soit F_n l'ensemble des éléments de F de cardinal n. Cet ensemble a pour cardinal $|F_n| \leq |X|^n = |X|$ (par l'axiome du choix). Ainsi, toujours par l'axiome du choix,

$$|F| = \left| \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \right| \leq |\mathbb{N}| \sup_{n \in \mathbb{N}} |F_n| \leq |X|$$

□

Théorème 3.2 (Vitali)**.** *Il existe un ensemble non-mesurable dans* $\mathbb{R}$ *pour la mesure de Lebesgue.*

Démonstration. On considère le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Chaque élément de cet ensemble rencontre l'intervalle $[0, 1]$. Par l'axiome du choix, il existe un ensemble V de représentants de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ inclus dans $[0, 1]$. On va montrer que V n'est pas mesurable par l'absurde.

Soit A l'ensemble

$$A \coloneqq \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (V + r)$$

On peut remarquer que

- A est mesurable comme union dénombrable de mesurables ;
- $[0, 1] \subset A \subset [-1, 2]$;
- l'union est disjointe par hypothèse sur V.

On en déduit que

$$\lambda([0, 1]) \leq \lambda(A) \leq \lambda([-1, 2]) \tag{1}$$

$$1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(V) \leq 3 \tag{2}$$

D'où la contradiction.

□

Théorème 3.3 (Baire). *Dans la théorie ZF, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

— *L'axiome du choix dépendant*

— *L'union dénombrable d'ouverts dense d'un espace métrique complet est dense.*

Quelques idées de preuve. **2** $\Rightarrow$ **1** :
Soient X un espace métrique complet, $\{V_i\}$ une famille d'ouverts dense de X. Pour monter la densité de $\bigcap V_i$ dans X, il suffit de montrer que $\bigcap V_i$ rencontre tous les ouverts non-vide de X.
Soit W un ouvert non-vide de X. Comme V_1 est dense alors $W \cap V_1$ est un ouvert non vide, il existe donc un $x_1 \in X$ et $r_1 \in]0,1[$ tel que

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subset W \cap V_1$$

On peut construire de proche en proche (par l'axiome du choix dépendant) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\overline{B(x_n, r_n)} \subset V_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \text{ et } 0 < r_n < \frac{1}{n}$$

Pour tout $n > 1$ et tout $i, j > n$

$$d(x_i, x_j) < 2r_n < \frac{2}{n}$$

La suite (x_n) est donc de Cauchy et par conséquent converge dans X (vers x). Comme, pour tout n et tout $i > n$, $B(x_i \cap r_i) \subset \bigcup_{i>n} V_i \cap B(x_n, r_n) \subset \overline{B(x_n, r_n)}$ alors $x \in \overline{B(x_n, r_n)}$ pour tout n. Par conséquent, $x \in V_n$ pour tout n et dans W i.e. $x \in \bigcap V_n \cap W$. □

4 Déni de l'axiome du Choix

Proposition 4.1. *Sans l'axiome du choix dénombrable, il est consistant d'avoir un ensemble infini ne contenant pas une famille dénombrable d'éléments et que $\mathbb{R}$ soit une union dénombrable d'ensembles dénombrables.*

Théorème 4.2 (Solovay). *La théorie ZF+choix dépendant n'est pas suffisant pour montrer l'existence d'ensemble non-mesurable.*

Démonstration. Par forcing □

Proposition 4.3 (Sierpiński). *Supposons que tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ soit mesurables. Alors il existe une surjection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble "strictement plus grand" (dans le sens où il existe une injection mais pas de bijection ou encore qu'il n'y a pas d'injection dans l'autre sens).*

Preuve du "strictement". Cette surjection est la projection $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Supposons qu'il existe une inclusion $\iota : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ alors on peut la composer avec une bijection $\mathbb{R} \simeq [0, 1]$ et ce faisant on obtient un ensemble de représentant des éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ de $[0, 1]$. Cela permet de construire un ensemble non-mesurable, ce qui est contradictoire. $\square$

5 Lien avec d'autres énoncés

Proposition 5.1 (Sierpiński)**.** *L'hypothèse continue généralisée (pour tout cardinal infini λ, il n'existe pas de cardinal κ tel que $\kappa < \lambda < 2^{\kappa}$) implique l'axiome du choix.*

Proposition 5.2 (Diaconescu)**.** *L'axiome du choix implique le principe du tiers exclus (pour toute propriété P, $P \vee \neg P$ est vraie).*