Séminaire des doctorants : Polynôme d'Ehrhart

Antoine BOIVIN

25 Janvier 2023

Résumé

La formule de Pick (démontrée en 1899 par Georg Alexander Pick) relie l'aire d'un polygone à sommets entiers au nombre de points entiers contenu dans ce polygone et sur son bord. On ne peut pas trouver une formule pour des polytopes de dimension supérieure. Une généralisation de ce résultat pour ces dimensions a été introduite par Eugène Ehrhart dans les années 1960. Elle prend la forme d'un polynôme rationnel donné par les points entiers des dilations du polytope. Dans cet exposé, nous allons étudier les polynômes d'Ehrhart : sa construction, ses propriétés et comment il généralise la formule de Pick. Si le temps le permet, nous allons voir les utilisations de ces polynômes en géométrie torique.

1 Théorème de Pick

Théorème 1.1 (Pick,1899)**.** *Soit* P *un polygone à sommets entiers dans* $\mathbb{R}^2$*. Alors*

$$\mathrm{Vol}(P) = \sharp(\mathrm{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^2) + \frac{1}{2}\sharp(\partial P \cap \mathbb{Z}^2) - 1$$

Démonstration.

— Cas 1 : P est un triangle $\mathrm{Conv}(0, x_1, x_2)$ avec trois points entiers.
On considère le parallélogramme $\widetilde{P}$ construit par symétrie à partir de T. Ces seuls points entiers sont donc $0, x_1, x_2, x_1 + x_2$. Cela implique que (x_1, x_2) est une base de $\mathbb{Z}^2$. Par conséquent,

$$\mathrm{Vol}(P) = \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(\widetilde{P}) = \frac{1}{2}|\det(x_1, x_2)| = \frac{1}{2}$$

On en déduit alors la formule de Pick pour ce cas.

— Cas 2 : P est un triangle entier quelconque. On procède par récurrence forte sur le nombre de points entiers.
Soit x un point entier de P qui ne soit pas un sommet. Si x est dans l'intérieur du triangle, on va séparer le triangle P en trois triangles en

reliant x aux trois sommets de P. Si x est sur la frontière du triangle alors on sépare le triangle en reliant x à son sommet opposé s. Dans les deux cas, on obtient des triangles ayant moins de points et donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. On va détailler le cas où le point est sur la frontière (l'autre cas se faisant de la même façon) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(P) &= \mathrm{Vol}(T_1) + \mathrm{Vol}(T_2) \\
&= \sharp(\mathrm{Int}(T_1) \cap \mathbb{Z}^2) + \frac{1}{2}\sharp(\partial T_1 \cap \mathbb{Z}^2) - 1 + \sharp(\partial T_2 \cap \mathbb{Z}^2) + \frac{1}{2}\sharp(\mathrm{Int}(T_2) \cap \mathbb{Z}^2) - 1 \\
&= \sharp\mathrm{Int}(T) \cap \mathbb{Z}^2 - \sharp]s, x[\cap\mathbb{Z}^2 + \frac{1}{2}\left(\sharp\partial T \cap \mathbb{Z}^2 + 2\sharp]s, x[\cap\mathbb{Z}^2 + \sharp\{s, x\}\right) - 2 \\
&= \sharp\mathrm{Int}(T) \cap \mathbb{Z}^2 + \frac{1}{2}\left(\sharp\partial T \cap \mathbb{Z}^2\right) - 1
\end{aligned}$$

— Le cas général se fait en prenant une triangulation du polygone et en faisant des calculs similaires au cas 2.

□

Exemple 1.2. Soit P le carré $[0, n]^2$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(P) &= n^2 \\
\sharp(\mathrm{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^2) &= (n-1)^2 \\
\sharp(\partial P \cap \mathbb{Z}^2) &= 4n
\end{aligned}$$

Remarque 1.3. Ce théorème ne fonctionne qu'en dimension 2

Exemple 1.4 (Reeve tetrahedra)**.** Soit $r \in \mathbb{N}$. On va considérer le tétraèdre

$$\mathcal{T}_r \coloneqq \mathrm{Conv}(0, e_1, e_2, (1, 1, r))$$

Alors $\forall r \geq 1$,

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{T}_r) = \frac{r}{6}$$

et

$$\sharp(\mathcal{T}_r \cap \mathbb{Z}^2) = \sharp(\partial\mathcal{T}_r \cap \mathbb{Z}^2) = 4$$

2 Polynôme d'Ehrhart

Définition 2.1. Soit P un polytope entier (par rapport à un réseau M) de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$L(P, t) = \sharp(tP \cap M).$$

Théorème 2.2 (Ehrhart, 1962)**.** *Soit* P *un polytope entier de* $\mathbb{R}^d$*. Alors* $L(P, t) \in \mathbb{Q}[t]$ *et* $\deg(L(P, t)) = d$

Démonstration. Comme pour la formule de Pick, il suffit de le faire pour le cas d'un simplexe $P = \mathrm{Conv}(0, s_1, \ldots, s_d)$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} m\Delta &= \left\{ \sum_{i=1}^{d} \lambda_i s_i \mid \lambda_i \geq 0, 0 \leq \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \leq m \right\} \\ &= \coprod_{j=0}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{d} \lambda_i s_i \mid \lambda_i \geq 0, 0 \leq \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \leq m, \sum_{i=1}^{d} \lfloor \lambda_i \rfloor = m - j \right\} \end{aligned}$$

On notera $\Delta_{m,j}$ les ensembles intervenant dans ce coproduit. L'ensemble des points entiers de ces ensembles peuvent s'écrire comme le produit suivant

$$\Delta_{m,j} = \left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{N}^d \mid \sum_{i=1}^{d} x_i = m - j \right\} \times \left\{ s = \mu_1 s_1 + \ldots + \mu_d s_d \mid s \in \mathbb{Z}^d, 0 \leq \mu_i \leq 1, \sum_{i=1}^{d} \mu_i \leq j \right\}$$

Le deuxième ensemble ne dépend pas de m. On va noter son cardinal α_j. De plus, on peut remarquer que $\forall j \geq d, \alpha_j = \alpha_d$. On en déduit [1 2] :

$$\begin{aligned} \sharp m\Delta \cap \mathbb{Z}^d &= \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \binom{m-j+d-1}{d-1} \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j \binom{m-j+d-1}{d-1} + \alpha_d \sum_{j=d}^{m} \binom{m-j+d-1}{d-1} \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} (\alpha_j - \alpha_d) \binom{m-j+d-1}{d-1} + \alpha_d \sum_{j=0}^{m} \binom{m-j+d-1}{d-1} \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} (\alpha_j - \alpha_d) \binom{m-j+d-1}{d-1} + \alpha_d \binom{m+d}{d} \end{aligned}$$

(On en déduit que cela définit bien un polynôme de degré d. □

Exemple 2.3. Considérons $P = [0,1]^d$ l'hypercube unité de $\mathbb{R}^d$.
Alors, pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$\sharp tP \cap \mathbb{Z}^d = \sharp([0,t] \cap \mathbb{Z})^d = (t+1)^d$$

On en déduit donc $L(P,t) = (t+1)^d$

1. les nombres de solutions entières de $\sum_{i=1}^{n} x_i = m$ est $\binom{m+n-1}{n-1}$. C'est le coefficient en x^m de la série

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)^n = \left(\frac{1}{1-x} \right)^n = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

2. avec la formule

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k+d}{d} = \binom{m+d+1}{d+1}$$

Exemple 2.4. Soit $r \in \mathbb{N}$. Considérons le polytope $P = \mathcal{T}_r$. Alors

$$L(P,t) = \frac{r}{6}t^3 + t^2 + \left(2 - \frac{r}{6}\right)t + 1$$

Deux remarques sur ce polynôme :
— il y a des termes constants en r (comme l'était le nombre de points entiers)
— si $r \geq 13$, le coefficient en t est négatif.

Théorème 2.5 (réciprocité d'Ehrart-MacDonald)**.** *Soit* P *un polytope convexe fermé de* $\mathbb{R}^d$*. Alors*

$$L(\mathrm{int}(P), t) = (-1)^d L(P, -t)$$

Exemple 2.6. Considérons $P = [0,1]^d$ l'hypercube unité de $\mathbb{R}^d$.
Alors, pour tout $t \in \mathbb{N}$,

$$L(\partial P, t) = \sharp t\partial P \cap \mathbb{Z}^d = \sharp(]0,t[\cap \mathbb{Z})^d = (t-1)^d = (-1)^d(-t+1)^d = (-1)^d L(P,-t)$$

Proposition 2.7. *Soit* P *un polytope entier de* $\mathbb{R}^d$ *et* $L(P,t) = \sum_{i=0}^d L_i(P)t^i$ *son polynôme d'Ehrhart. Alors*
— $L_d(P) = \frac{\mathrm{Vol}(P)}{\mathrm{covol}(M)}$;
— $L_{d-1}(P) = \sum_{F \prec P} \frac{\mathrm{Vol}_{\mathrm{Vect}(F)}(F)}{2\mathrm{covol}(M \cap \mathrm{Vect}(F))}$ *; où la somme est faite sur les hyperfaces de* P*.*
— $L_0(P) = \chi(P)$

Remarque 2.8. Le volume de $P \subset \mathbb{R}^d$ peut donc s'écrire comme la limite

$$\mathrm{Vol}(P) = \mathrm{covol}(M) \lim_{t \to \infty} \frac{L(P,t)}{t^d}$$

Exemple 2.9 (dimension 2)**.** Considérons un polytope entier de $\mathbb{R}^2$ et $M = \mathbb{Z}^2$.
Alors

$$L_1(P) = \frac{1}{2}\sum_{L \prec P} \frac{\mathrm{Vol}(L)}{\mathrm{covol}(\mathbb{Z}^2 \ \cap \mathrm{Vect}(L))} = \frac{1}{2}\sum_{L \prec P} \frac{\mathrm{Vol}(L)}{\mathrm{covol}(\mathbb{Z}^2 \ \cap \mathrm{Vect}(L))} = \frac{1}{2}\sum_{L \prec P} \sharp L \cap \mathbb{Z}^2 - 1 = \frac{1}{2}\sharp\partial P \cap \mathbb{Z}^2$$

On en déduit que

$$L(P,t) = \mathrm{Vol}(P)t^2 + \frac{1}{2}(\sharp\partial P \cap \mathbb{Z}^2)t + 1$$

En évaluant en -1, on obtient

$$L(\mathrm{Int}(P), 1) = L(P,-1) = \mathrm{Vol}(P) - \frac{1}{2}(\sharp\partial P \cap \mathbb{Z}^2) + 1$$

i.e.

$$\sharp\mathrm{Int}(P) \cap \mathbb{Z}^2 = \mathrm{Vol}(P) - \frac{1}{2}(\sharp\partial P \cap \mathbb{Z}^2) + 1$$

Autrement dit, la formule du théorème de Pick.

Théorème 2.10 (Betke-Kneser). *Soit* $Z : \{$*polytopes entiers de* $\mathbb{R}^d\} \to \mathbb{R}$ *une valuation sur les polytopes entiers de* $\mathbb{R}^d$. Z *est* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$*-invariant et invariant par translation si, et seulement si, il existe* $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$,

$$Z = \sum_k c_k L_k$$

3 Polynôme d'Ehrhart et variétés toriques

Proposition 3.1. *Soit* P *un polytope entier. Alors*

$$\dim H^0(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(D_P)) = \sharp P \cap M$$

Proposition 3.2 (annulation de Demazure). *Soit* X_Σ *une variété torique normale et* D *un* $\mathbb{Q}$*-diviseur de Cartier de* X_Σ. *Si* Σ *est convexe et* D *est nef*[3] *alors*

$$\forall p > 0, H^p(X_\Sigma, \mathcal{O}_{X_\Sigma}(D)) = 0$$

Pour $D = D_P$ qui est ample donc nef, on en déduit que

$$L(P,t) = H^0(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(tD_P)) = \chi(\mathcal{O}_{X_P}(tD_P))$$

Théorème 3.3. *Supposons que* P *est très ample alors le polynôme de Ehrhart coïncide avec le polynôme de Hilbert de la variété torique* X_P *par le plongement dans le projectif donné par le diviseur très ample* D_P.

Théorème 3.4 (Hirzebruch-Riemann-Roch). *Soit* X *une variété complexe compacte de dimension* n *et* $L \to X$ *un fibré en droites*[4]. *Alors*

$$\chi(X, L) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{ch}_{n-j}(L)\mathrm{td}_j(X)$$

où $\mathrm{ch} = \bigoplus \mathrm{ch}_j$ *est le caractère de Chern défini par*

$$\mathrm{ch}(E) = \exp(c_1(L)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_1(L))^n}{n!} \in H^*(X, \mathbb{Q})$$

et $\mathrm{td} = \bigoplus \mathrm{td}_j$ *est la classe de Todd défini par*

$$\mathrm{td}(X) = \prod_i \frac{\xi_i}{1 - e^{-\xi_i}} \in H^*(X, \mathbb{Q})$$

où $\xi_i \in H^2(X, \mathbb{Q})$ *vérifie*

$$c(TX) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \xi_i).$$

3. ou de façon équivalente dans le cas torique à support convexe, sans point-base

4. vrai aussi pour un fibré vectoriel quelconque mais il faut généraliser les définitions de classe de Chern et de Todd