GdT Cohomologie confinée

Antoine BOIVIN

4 août 2021

Table des matières

1 Suites spectrales

Les suites spectrales sont utilisées pour faciliter les calculs de groupes d'homologie/de cohomologie. Le but de cette section est de donner comment en construire afin de les utiliser dans la section suivante pour la cohomologie de de Rham algébrique.
La bibliographie pour cette section est le livre de Weibel [Wei95] et le guide des suites spectrales [MBF+01].

1.1 Construction de suites spectrales

1.1.1 Premières définitions

Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne admettant des coproduits dénombrables exacts (e.g. $R-\mathbf{Mod}$ pour R un anneau ou $\mathscr{O}_X-\mathbf{Mod}$ avec $(X, \mathscr{O}_X)$ un espace annelé)

Définition 1.1.1.1. Un objet différentiel de $\mathscr{A}$ est une paire (A, d) où A est un objet de $\mathscr{A}$ et $d : A \to A$ un morphisme tel que $d^2 = 0$. Un morphisme d'objets différentiels $(A, d) \to (B, \delta)$ est un morphisme $f\colon A \to B$ tel que $\delta f = fd$

Les objets différentiels forment ainsi une catégorie $\mathbf{ObDiff}(\mathscr{A})$.

Lemme 1.1.1.2. *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. Alors $\mathbf{ObDiff}(\mathscr{A})$ est une catégorie abélienne.*

Définition 1.1.1.3. L'homologie d'un objet différentiel (A, d) est l'objet $H(A, d) \coloneqq \ker(d)/\operatorname{im}(d) \coloneqq \operatorname{coker}(d\colon A \to \ker(d))$ de $\mathscr{A}$.

Lemme 1.1.1.4. *L'homologie définit un foncteur $\mathbf{ObDiff}(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}$.*

Démonstration. Soit $f : (A, d) \to (B, \delta)$ un morphisme d'objets différentiels.
Alors, $f(\operatorname{im}(d)) \subset \operatorname{im}(\delta)$ et $f(\ker(d)) \subset \ker(\delta)$.
Ainsi, le morphisme f induit un morphisme $\bar{f} : H(A, d) = \ker(d)/\operatorname{im}(d) \to \ker(\delta)/\operatorname{im}(\delta) = H(B, \delta)$.

$\square$

Lemme 1.1.1.5. *Une suite exacte courte $0 \to (A, d) \to (B, d') \to (C, d'') \to 0$ induit une suite exacte en homologie*

$$\dots \longrightarrow H(A, d) \longrightarrow H(B, d') \longrightarrow H(C, d'') \longrightarrow H(A, d) \longrightarrow \dots$$

Démonstration. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "d"] & B \arrow[r] \arrow[d, "d'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "d"] & B \arrow[r] \arrow[d, "d'"] & C \arrow[r] \arrow[d, "d''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induit une suite exacte courte de complexes $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$. On peut lui associer une suite exacte longue en homologie qui est la suite exacte voulue. □

Définition 1.1.1.6. Une suite spectrale de $\mathscr{A}$ est une suite $(E_r, d_r)_{r \geq a}$ $(a \in \mathbb{Z})$ d'objets différentiels de $\mathscr{A}$ telle que $E_{r+1} = H(E_r, d)$ pour tout $r \geq a$.

À une suite spectrale (E_r, d_r), on peut associer deux suites $(B_r)_{r\geq a}$, $(Z_r)_{r\geq a}$ de sous-objets de E_a qui la déterminent entièrement :

— $B_a = 0, Z_a = E_a$;

— Pour tout $r \geq a$, B_{r+1} est l'unique sous-objet de E_a contenant B_r tel que $\mathrm{im}(d_r) = B_{r+1}/B_r$,

— Z_{r+1} est l'unique sous-objet de E_a contenant B_r tel que $\ker(d_r) = Z_{r+1}/B_r$.

Ainsi,

$$0 = B_a \subset B_{a+1} \subset \ldots B_r \subset \ldots \subset Z_r \subset Z_{a+1} \subset Z_a = E_a$$

et

$$E_r = Z_r/B_r$$

Définition 1.1.1.7. Soit (E_r, d_r) une suite spectrale de $\mathscr{A}$.

— Si les objets $Z_\infty := \bigcap_{r\geq a} Z_r$ et $B_\infty = \bigcup_{r\geq a} B_r$ existent alors on définit la limite de la suite spectrale comme l'objet $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$

— La suite spectrale dégénère en E_s si $d_s = d_{s+1} = \ldots = 0$

Lemme 1.1.1.8. *Soit (E_r, d_r) une suite spectrale de $\mathscr{A}$. Si cette suite spectrale dégénère en E_s alors elle admet une limite et*

$$E_\infty = E_s$$

Plus précisément, $E_s = E_{s+1} = \ldots = E_\infty$

Démonstration. Par récurrence : si $d_s = 0$ alors $E_{s+1} = \ker(d_s)/\mathrm{im}(d_s) = E_s$... □

1.1.2 Suites spectrales associées à un objet différentiel

Soit (A, d) un objet différentiel et $\alpha : (A, d) \to (A, d)$ un morphisme injectif. On va expliquer comment obtenir une suite spectrale de ces données.

Le morphisme α induit une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow (A, d) \xrightarrow{\alpha} (A, d) \longrightarrow (A/\alpha(A), d) \longrightarrow 0$$

qui induit une suite exacte en homologie

$$\begin{tikzcd}
H(A, d) \arrow[rr, "\overline{\alpha}"] & & H(A, d) \arrow[dl, "g"] \\
& H(A/\alpha(A), d) \arrow[ul, "f"] &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Lemme 1.1.2.1. *Le triplet* (α, f, g) *vérifient les propriétés suivantes*

1. $\mathrm{im}(\overline{\alpha}) = \ker(g)$; $\mathrm{im}(g) = \ker(f)$; $\mathrm{im}(f) = \ker(\overline{\alpha})$
   (On dit que $(H(A/\alpha(A), d), H(A, d), \overline{\alpha}, f, g)$ *est un couple exact) ;*
2. $D := g \circ f$ *est une différentielle de* $A/\alpha(A)$

Démonstration. $D^2 = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = 0$ car $\ker(f) = \mathrm{im}(g)$ □

Soit $E' := H(H(A/\alpha(A), d), D) = \ker(D)/\mathrm{im}(D)$ et $A' = \mathrm{im}(\overline{\alpha})$. On définit :

— $\alpha' = \overline{\alpha}_{|A'}$
— $f' \colon E' \to A$ induit par f ($\mathrm{im}(d) \subset \mathrm{im}(g) = \ker(f)$)
— $g' \colon A' \to E'$ par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{im}(\overline{\alpha}) \arrow[r, "g'"] & \ker(D)/\mathrm{im}(D) \\
A/\ker(\overline{\alpha}) \arrow[u, "\simeq"', "\overline{\alpha}"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

$\overline{\alpha}$ induit un isomorphisme $H(A, d)/\ker(\overline{\alpha}) \simeq \mathrm{im}(\overline{\alpha})$. Comme $D = g \circ f$ alors le morphisme $g \circ \widetilde{\alpha}^{-1}$ est bien défini.

Lemme 1.1.2.2. *Le triplet* (α', f', g') *vérifient les propriétés du lemme précédent :*

$$\mathrm{im}\left(\alpha'\right) = \ker\left(g'\right) ;\ \mathrm{im}\left(g'\right) = \ker\left(f'\right) ;\ \mathrm{im}\left(f'\right) = \ker\left(\alpha'\right)$$

On construit ainsi une suite d'objets différentiels (E_r, D_r) telle que $E_{r+1} = H(E_r, D_r)$ et $E_0 = E_0 = A/\alpha(A)$ i.e. une suite spectrale.

Proposition 1.1.2.3. *Les sous-objets de* $E_0 = A/\alpha(A)$ *associés à la suite spectrale ainsi obtenue sont :*

$$B_r = \pi((\alpha^{r-1})^{-1}(dA))$$

et

$$Z_r = \pi(d^{-1}(\alpha^r(A)))$$

où $\pi : A \to A/\alpha(A)$ *et* α^r *est le* r*ème morphisme* α *obtenu par la construction ci-dessus.*

1.1.3 Suites spectrales associées à un objet différentiel filtré

Définition 1.1.3.1. Une filtration F sur un objet A est une famille $(F^n A)_{n\in\mathbb{Z}}$ de sous-objets de A telle que

$$A \supset \ldots \supset F^n A \supset F^{n+1} A \supset \ldots \supset 0$$

Définition 1.1.3.2. Un objet filtré d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$ est une paire (A, F) où A est un objet de $\mathscr{A}$ et F est une filtration sur A

Définition 1.1.3.3. Un morphisme $(A, F) \to (B, F)$ d'objets filtrés est donné par un morphisme $\varphi \colon A \to B$ tel que, pour tout i,

$$\varphi(F^i A) \subset F^i B$$

Définition 1.1.3.4. L'objet gradué associé à un objet filtré (A, F) est

$$gr_F(A) = \bigoplus_p F^p A / F^{p+1} A$$

Définition 1.1.3.5. Un objet différentiel filtré est un couple (K, d) où K est un objet filtré de $\mathscr{A}$ et d une différentielle qui respecte la filtration.

Lemme 1.1.3.6. *Soit* $(K, F = (F^\bullet K))$ *un objet différentiel filtré.*

— $(F^n K, d^n := d_{|F^n K})$ *est un objet différentiel de* $\mathscr{A}$*.*

— $(A := \bigoplus F^n K, \bigoplus d^n)$ *est un objet différentiel de* $\mathscr{A}$*.*

Soit $\alpha : A \to A$ le morphisme induit par les morphismes d'inclusion $F^n K \hookrightarrow F^{n-1} K$. C'est un morphisme injectif. On obtient donc une suite spectrale grâce à la construction vue plus haut.

Détaillons cette suite spectrale :

Proposition 1.1.3.7. *Les objets* B_r*,* Z_r *et* E_r *sont gradués de façon compatible avec les différentielles. Plus précisément,*

$$B_r = \bigoplus_p \frac{F^p K \cap d(F^{p-r+1} K) + F^{p+1} K}{F^{p+1} K},$$

$$Z_r = \bigoplus_p \frac{F^pK \cap d^{-1}(F^{p+r}K) + F^{p+1}K}{F^{p+1}K}$$

et

$$E_r = \bigoplus_p Z_r^p / B_r^p$$

En particulier, $E_0 = gr_F K$

Démonstration du cas $r = 0$. $E_0 = A/\alpha(A) = \bigoplus F^nK/F^{n-1}K = \bigoplus gr_F^{n-1}K = gr_F K$ ☐

Proposition 1.1.3.8. *Les différentielles* D^r *décale le degré de la filtration de* r

Démonstration. 1. Par récurrence, cas $r = 1$:

$$\begin{tikzcd}
 & & & H(gr_FK, d)^{n-1} \arrow[d, hook] & \\
 & F^nK/\operatorname{im}(d^n) \arrow[r] \arrow[d, "d^n"] & F^{n-1}K/\operatorname{im}(d^n) \arrow[r] \arrow[d, "d^{n-1}"] & gr^{n-1}K/\operatorname{im}(\overline{d}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(d^n) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \ker(d^{n-1}) \arrow[r] & \ker(\overline{d}) & \\
 & H(A, d)^n & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H(A, d) \arrow[rr, "\overline{\alpha}^{(-1)}"] & & H(A, d) \arrow[dl, "g^{(0)}"] \\
 & H(A/\alpha A) \arrow[ul, "f^{(1)}"] &
\end{tikzcd}$$

Donc f' augmente le degré de 1, α' diminue le degré de 1 et $g' = g \circ \alpha^{-1}$ augmente le degré de 1.

Dans le cas général, f_r augmente le degré de 1, α_r diminue le degré de 1 et $g_r = g_{r-1} \circ \alpha^{-1}$ augmente le degré de r.

☐

De la même façon, α^r change le degré de la filtration de r.

1.1.4 Suites spectrales associées à un complexe filtré

Définition 1.1.4.1. Un complexe filtré est un complexe d'objets filtrés dont les différentielles respectent la filtration.

Soit $K^\bullet$ un complexe filtré. Alors, $(A := \bigoplus_n K^n, d = \bigoplus_n d_{K^n})$ est un objet différentiel filtré par

$$\mathscr{F}^p A = \bigoplus_n F^p K^n$$

et induit donc une suite spectrale (E_r, D_r). Nous allons voir que le fait que celle-ci vienne d'un complexe apporte de la structure supplémentaire :

Lemme 1.1.4.2.

$$E_0 = \bigoplus_p \mathrm{gr}^p K^\bullet$$

On en déduit que $E_0 = \bigoplus E_0^p$ est bigradué :

$$E_0 = \bigoplus_{p,q} E_0^{p,q}$$

où $E_0^{p,q} = \mathrm{gr}^p K^{p+q}$.

Sa différentielle se décompose de la façon suivante :

$$D_0 = \bigoplus_p D_0^p : \mathrm{gr}^p K^\bullet \to \mathrm{gr}^p K^\bullet$$

(car la différentielle préserve la filtration) puis les D_0^p se décomposent en

$$D_0^p = \bigoplus D_0^{p,q}$$

où $D_0^{p,q} : E_0^{p,q} = \mathrm{gr}^p K^{p+q} \to \mathrm{gr}^p K^{p+q+1} = E_0^{p,q+1}$ (la différentielle décale le degré du complexe).

Proposition 1.1.4.3. *Les objets B_r, Z_r et E_r sont bigradués de façon compatible avec les différentielles. Plus précisément,*

$$B_r = \bigoplus_{p,q} \frac{F^p K^{p+q} \cap d(F^{p-r+1} K^{p+q-1}) + F^{p+1} K^{p+q}}{F^{p+1} K^{p+q}},$$

$$Z_r = \bigoplus_{p,q} \frac{F^p K^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r} K^{p+q+1}) + F^{p+1} K^{p+q}}{F^{p+1} K^{p+q}}$$

et

$$E_r = \bigoplus_{p,q} Z_r^{p,q} / B_r^{p,q}$$

Lemme 1.1.4.4. *Les différentielles D^r sont de bidegré $(r, 1-r)$.*

Démonstration. Les différentielles augmente la filtration de r et celui du complexe de 1. Ainsi, $D_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ car $(p+r)+(q-r+1) = p+q+1$ $\square$

On retrouve ainsi la définition classique des suites spectrales :

Définition 1.1.4.5. Une suite spectrale dans $\mathscr{A}$ (commençant à la page $a \in \mathbb{Z}$) est la donnée :

- d'une famille $(E_r^{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z},r\geq a}$ d'objets de $\mathscr{A}$,
- de morphismes $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ pour $p,q \in \mathbb{Z}, r \geq a$ tels que $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$ (appelés différentielles)
- d'isomorphismes $\alpha_r^{p,q} : E_{r+1}^{p,q} \to H^{p,q}(E_r) := \frac{\ker(d_r^{p,q})}{\mathrm{im}(d_r^{p-r,q+r-1})}$

Définition 1.1.4.6. Soit $(K^\bullet, \mathscr{F})$ un complexe filtré. La graduation induite sur $H^n(K^\bullet)$ est définie par :

$$F^p H^n(K^\bullet) = \mathrm{im}(H^n(\mathscr{F}^p K^\bullet) \to H^n(K^\bullet))$$

Lemme 1.1.4.7. *Soit $K^\bullet$ un complexe filtré de $\mathscr{A}$. Si $Z_\infty^{p,q} = \bigcap_{r\geq a} Z_r^{p,q}$ et $B_\infty^{p,q} = \bigcup_{r\geq a} B_r^{p,q}$ existent alors,*

1. *la limite E_∞ existe et est bigraduée par*
$$E_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q} / B_\infty^{p,q}$$
2. *$\mathrm{gr}^p H^n(K^\bullet)$ est un quotient d'un sous-objet de $E_\infty^{p,n-p}$ et plus précisément,*
$$\mathrm{gr}^p H^n(K^\bullet) = \frac{\ker(d) \cap F^p K^n}{\mathrm{im}(d) \cap F^p K^n + \ker(d) \cap F^{p+1} K^n}$$

Définition 1.1.4.8. Soit $K^\bullet$ un complexe filtré de $\mathscr{A}$. On dit que la suite spectrale associé au complexe filtré $K^\bullet$ converge vers $H^\bullet(K^\bullet)$ si :

- $\mathrm{gr}^p H^n(K^\bullet) = E_\infty^{p,n-p}$ pour tout n, p
- $\bigcap_p F^p H^n(K^\bullet) = 0$ et $\bigcup_p F^p H^n(K^\bullet) = H^n(K^\bullet)$ pour tout n
- pour tout p, q, il existe r tel que $Z_r^{p,q} = Z_{r+1}^{p,q} = \dots$
- $H^n(K^\bullet) = \lim_p H^n(K^\bullet)/F^p H^n(K^\bullet)$ pour tout n

Notation 1.1.4.9. Dans ce cas, on note $E_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}(K^\bullet)$

Lemme 1.1.4.10. *Soit $K^\bullet$ un complexe filtré. Supposons que la filtration de chaque K^n soit finie (i.e. il existe p, q tels que $F^p K^n = K^n$ et $F^q K^n = 0$). Alors, la suite spectrale associée à $K^\bullet$ converge vers $H^\bullet(K^\bullet)$.*

1.1.5 Complexe double

Définition 1.1.5.1. Un complexe double dans $\mathscr{A}$ est une famille $(K^{p,q}, d_1^{p,q}, d_2^{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ où $K^{p,q}$ est un objet de $\mathscr{A}$, $d_1^{p,q} : K^{p,q} \to A^{p+1,q}$ et $d_1^{p,q} : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$ sont des morphismes de $\mathscr{A}$ tels que, pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$,

1. $d_1^{p+1,q} \circ d_1^{p,q} = 0$
2. $d_2^{p,q+1} \circ d_2^{p,q} = 0$

3. $d_1^{p,q+1} \circ d_2^{p,q} = d_2^{p+1,q} \circ d_1^{p,q}$

$$\begin{tikzcd}
& \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & K^{p,q+1} \arrow[u] \arrow[r, "d_1^{p,q+1}"] & K^{p+1,q+1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & K^{p,q} \arrow[u, "d_2^{p,q}"] \arrow[r, "d_1^{p,q}"] & K^{p+1,q} \arrow[u, "d_2^{p+1,q}"'] \arrow[r] & \cdots \\
& \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

On peut trouver dans la littérature la troisième condition remplacée par une condition d'anti-commutativité

Exemple 1.1.5.2. Le complexe de Dolbeault $(\mathscr{A}^{p,q}, \partial, \overline{\partial})$

Définition 1.1.5.3. Soit $K^{\bullet,\bullet}$ un complexe double. Alors le complexe total associé $\mathrm{Tot}(K^{\bullet,\bullet})$ est défini par :

$$\mathrm{Tot}(K^{\bullet,\bullet})^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$$

et

$$d^n_{\mathrm{Tot}(K^{\bullet,\bullet})} = \sum_{p+q=n} d_1^{p,q} + (-1)^p d_2^{p,q}$$

Il existe deux filtrations naturelles sur $\mathrm{Tot}(K^{\bullet,\bullet})$:

$$\mathscr{F}_I^p(\mathrm{Tot}(K^{\bullet,\bullet})) = \bigoplus_{i+j=n, i\geq p} A^{i,j}$$

et

$$\mathscr{F}_{II}^p(\mathrm{Tot}(K^{\bullet,\bullet})) = \bigoplus_{i+j=n, j\geq p} A^{i,j}$$

Il existe donc deux suites spectrales ${}'E_r^{p,q}$, ${}''E_r^{p,q}$ associées au complexe double $K^{\bullet,\bullet}$. De plus, on peut montrer les égalités suivantes :

$${}'E_1^{p,q} = H^q(K^{p,\bullet});\ {}''E_1^{p,q} = H^q(K^{\bullet,p})$$

1.2 Exemples de calcul

1.2.1 Effrondrement

Définition 1.2.1.1. On dit qu'une suite spectrale $(E_r^{p,q})$ s'effronde en $E_r, r \geq 1$, s'il y a exactement une colonne ou une ligne non nulle dans le réseau $(E_r^{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$.

Lemme 1.2.1.2. *Soit* $(E_r^{p,q})$ *une suite spectrale qui s'effronde en* E_r*,* $r \geq 1$ *et qui converge vers* $H^\bullet$*. Alors,*

— *Si* $r \geq 2$ *alors* H^n *est l'unique objet* $E_r^{p,q}$ *de la colonne (ou ligne) tel que* $p + q = n$*.*
— *Si* $r = 1$ *et les objets* $(E_r^{p,q})$ *sont nuls en dehors d'une colonne alors* H^n *est l'unique objet* $E_r^{p,q}$ *de la colonne (ou ligne) tel que* $p + q = n$*.*
— *Si* $r = 1$ *et les objets* $(E_r^{p,q})$ *sont nuls en dehors d'une ligne (indexée par* q*) alors*

$$H^n = H^{n-q}(E_1^{\bullet,q})$$

Démonstration. — Cas $r \geq 2$:

$$\begin{tikzcd}
2 & E_2^{0,2} \arrow[drr] & 0 & 0 \\
1 & E_2^{0,1} \arrow[drr] & 0 & 0 \\
0 & E_2^{0,0} & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 & 0 \arrow[drr] & 0 & 0 \\
0 & E_2^{0,0} \arrow[drr] & E_2^{1,0} & E_2^{2,0} \\
-1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 1 & 2
\end{tikzcd}$$

— Cas $r = 1$ colonne

$$\begin{tikzcd}
2 & E_1^{0,2} \arrow[r] & 0 \\
1 & E_1^{0,1} \arrow[r] & 0 \\
0 & E_1^{0,0} \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 1
\end{tikzcd}$$

— Cas $r = 1$ ligne

$$
\begin{tikzcd}
1 & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 & E_1^{0,0} \arrow[r] & E_1^{1,0} \arrow[r] & E_1^{2,0} \\
 & 0 & 1 & 2
\end{tikzcd}
$$

□

1.2.2 Deux colonnes

Définition 1.2.2.1. Soit $H^\bullet$ un objet gradué de $\mathscr{A}$. On dit que la suite spectrale $E_r^{p,q}$ converge vers $H^\bullet$ si :

- $\mathrm{gr}^p H^n = E_\infty^{p,n-p}$ pour tout n, p
- $\bigcap_p F^p H^n = 0$ et $\bigcup_p F^p H^n = H^n$ pour tout n
- pour tout p, q, il existe r tel que $Z_r^{p,q} = Z_{r+1}^{p,q} = \dots$
- $H^n = \lim_p H^n / F^p H^n$ pour tout n

Notation 1.2.2.2. Dans ce cas, on note $E_r^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}$

Lemme 1.2.2.3. *Soit* $(E_r^{p,q})$ *une suite spectrale qui converge vers* $H^\bullet$ *et dont tous les objets* $(E_2^{p,q})$ *sont nuls sauf sur les colonnes 0 et 1. Alors on a les suites exactes suivantes :*

$$0 \longrightarrow E_2^{1,n-1} \longrightarrow H^n \longrightarrow E_2^{0,n} \longrightarrow 0$$

pour tout n

Démonstration.

$$
\begin{tikzcd}
2 & E_2^{0,2} \arrow[rrd] & E_2^{1,2} & 0 \\
1 & E_2^{0,1} \arrow[rrd] & E_2^{1,1} & 0 \\
0 & E_2^{0,0} & E_2^{1,0} & 0 \\
 & 0 & 1 & 2
\end{tikzcd}
$$

La suite spectrale dégénère $E_r^{p,q}$ et donc

$$E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$$

Ainsi, pour tout $p \neq 0, 1$,

$$F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q} = E_\infty^{p,q} = 0$$

On en déduit que

$$F^pH^n = F^{p+1}H^n$$

pour tout $p \neq 0, 1$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, on a les égalités suivantes :

$$H^n = \bigcup F^pH^n = F^0H^n$$

$$0 = \bigcap F^pH^n = F^2H^n$$

$$E_2^{1,n-1} = E_\infty^{1,n-1} = F^1H^n/F^2H^n = F^1H^n$$

$$E_2^{0,n} = E_\infty^{0,n} = F^0H^n/F^1H^n = H^n/F^1H^n$$

□

1.2.3 Termes en bas degré

Théorème 1.2.3.1 (five-term exact sequence). *Soit* $(E_r^{p,q})$ *une suite spectrale (concentrée sur les coefficients positifs) qui converge vers* $H^\bullet$ *muni de la filtration* $0 = F^{n+1}H^n \subset F^nH^n \subset \ldots F^0H^n = H^n$. *Alors on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow H^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d^{0,1}} E_2^{2,0} \longrightarrow H^2$$

Démonstration. Comme les différentielles $d_3^{\bullet,\bullet}$ sont de bidegré $(3, -2)$, les différentielles $d_3^{\bullet,0}, d_3^{\bullet,1}$ sont nulles. Ainsi,

$$E_\infty^{2,0} = E_3^{2,0} = \frac{\ker(d_2^{2,0})}{\mathrm{im}(d_2^{0,1})} = E^{2,0}/\,\mathrm{im}(d_2^{0,1})$$

(car $d^{2,0} : E_2^{2,0} \to E_2^{0,-1} = 0$ est l'application nulle) et

$$E_\infty^{0,1} = E_3^{0,1} = \frac{\ker(d_2^{0,1})}{\mathrm{im}(d_2^{-2,2})} = \ker(d_2^{0,1})$$

Ainsi, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_\infty^{0,1} \longrightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \longrightarrow E_\infty^{2,0} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Comme la suite spectrale $(E_r^{p,q})$ converge vers $H^\bullet$ alors

$$E_\infty^{0,1} = F^0H^1/F^1H = H^1/F^1H^1;\ E_\infty^{1,0} = F^1H^1/F^2H^1 = F^1H^1$$

De plus, la différentielle $d_2^{1,0}$ est nulle et donc $E_2^{1,0} = E_\infty^{1,0}$. On obtient ainsi une suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow H^1 \longrightarrow E_\infty^{0,1} \longrightarrow 0 \tag{4}$$

Ensuite, comme $E_\infty^{2,0} = F^2H^2/F^3H^2 = F^2H^2 \subset H^2$ alors, en combinant les suites exactes (3) et (4), on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_2^{1,0} \longrightarrow H^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d^{0,1}} E_2^{2,0} \longrightarrow H^2$$

1.3 Exemples de suites spectrales

1.3.1 Foncteurs hyperdérivés

Remarque 1.3.1.1. Tous les complexes de cochaines seront bornés à gauche. On supposera que leurs objets sont nuls en indice strictement négatif.

Définition 1.3.1.2. Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne et $(C^\bullet, d_C^\bullet)$ un complexe concentré en degré positif. Une résolution de Cartan-Eilenberg de $C^\bullet$ est donné par un complexe double $(I^{\bullet,\bullet}, d_1^{p,q}, d_2^{p,q})$ et un morphisme de complexes $\varepsilon \colon C^\bullet \to I^{\bullet,0}$ tel que :
— Si $p < 0$ ou $q < 0$ alors $I^{p,q} = 0$
— $I^{p,\bullet}$ est une résolution injective de C^p
— $\ker(d_1^{p,\bullet})$ est une résolution injective de $\ker(d_C^p)$
— $\mathrm{im}(d_1^{p,\bullet})$ est une résolution injective de $\mathrm{im}(d_C^p)$
— $H^p(I^{\bullet,q}, d_1^{p,q})$ est une résolution injective de $H^p(C^\bullet)$

Proposition 1.3.1.3 ([Sta18] Tag 015I)**.** *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne ayant suffisamment d'injectifs. Alors tout complexe admet une résolution de Cartan-Eilenberg.*

Lemme 1.3.1.4 ([Sta18] Tag 0133)**.** *Supposons que $\mathscr{A}$ ait suffisamment d'injectifs. Soit $C^\bullet$ un complexe de $\mathscr{A}$. Soit $I^{\bullet,\bullet}$ une résolution de Cartan-Eilenberg de $C^\bullet$. Alors le morphisme ε induit un isomorphisme, pour tout k,*

$$H^k(C^\bullet) = H^k(\mathrm{Tot}(I^{\bullet,\bullet}))$$

Définition-Proposition 1.3.1.5 (Prop 8.6 [Voi02])**.** *Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux catégories abéliennes. Supposons que $\mathscr{A}$ ait suffisamment d'injectifs. Soient $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un foncteur exact à gauche et $C^\bullet$ un complexe. Soit $C^\bullet \to I^{\bullet,\bullet}$ une résolution de Cartan-Eilenberg de C^*. Le $i$ème foncteur hyperdérivé de F est donné par :*

$$\mathbb{R}^iF(C^\bullet) = H^i(\mathrm{Tot}(F(I^{\bullet,\bullet})))$$

L'objet $\mathbb{R}^iF(C^\bullet)$ est bien défini et si $\varphi^\bullet : C^\bullet \to D^\bullet$ est un morphisme de complexes alors il existe un morphisme canonique $\mathbb{R}^iF(\varphi^\bullet) \colon \mathbb{R}^iF(C^\bullet) \to \mathbb{R}^iF(D^\bullet)$

Lemme 1.3.1.6 (Prop 8.9 [Voi02]). *Si* $C^\bullet$ *est quasi-isomorphe à* $D^\bullet$ *alors, pour tout* i,

$$\mathbb{R}^i F(C^\bullet) = \mathbb{R}^i F(D^\bullet)$$

Exemple 1.3.1.7. Soit C un objet de $\mathscr{A}$ et $C^\bullet$ le complexe de chaine donné par C en degré p et 0 sinon.
Soit I^* une résolution injective de C et $I^{\bullet,\bullet}$ le complexe double défini par

$$I^{r,s} = \begin{cases} I^s \text{ si } r = p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le complexe double $I^{\bullet,\bullet}$ est une résolution de Cartan-Eilenberg de $C^\bullet$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^i F(C^\bullet) &= H^i(\mathrm{Tot}(F(I^{\bullet,\bullet}))) = H^i(F(I^{p,\bullet-p})) = H^i(F(I^{\bullet-p})) \\ &= H^{i-p}(F(I^\bullet)) = R^{i-p}F(C)\end{aligned}$$

Théorème 1.3.1.8 ([Sta18] 015J). *Soient* $\mathscr{A}$ *et* $\mathscr{B}$ *deux catégories abéliennes. Supposons que* $\mathscr{A}$ *ait suffisamment d'injectifs. Soient* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *un foncteur exact à gauche et* $C^\bullet$ *un complexe. Soit* $C^\bullet \to I^{\bullet,\bullet}$ *une résolution de Cartan-Eilenberg de* C^**. Les deux suites spectrales* $('E_r, 'd_r)$ *et* $(''E_r, ''d_r)$ *au double complexe* $F(I^{\bullet,\bullet})$ *vérifient :*

$$'E_1^{p,q} = R^q F(C^p), 'E_2^{p,q} = H^p(R^q F(C^\bullet)) \textit{ et } ''E_2^{p,q} = R^p F(H^q(C^\bullet))$$

De plus, ces suites spectrales convergent vers $\mathbb{R}^{p+q}F(C^\bullet)$.

1.3.2 Suite spectrale de Grothendieck

Théorème 1.3.2.1. *Soient* $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ *et* $\mathscr{C}$ *trois catégories abéliennes. Soient* $F : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ *et* $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *deux foncteurs exacts à gauche. Supposons que* $\mathscr{A}$ *ait suffisamment d'injectifs et* G *envoie les injectifs de* $\mathscr{A}$ *sur les objets* F*-acycliques. Alors, pour tout objet* X*, il existe une suite spectrale*

$$R^p G \circ R^q F(X) \Rightarrow R^{p+q}(F \circ G)(X)$$

Démonstration. Soit X un objet de $\mathscr{A}$. Soit $I^\bullet$ une résolution injective de X dans $\mathscr{A}$.
Pour toute complexe (concentré en degré positif) $C^\bullet$, on a deux suites spectrales $('E_r^{p,q}(C^\bullet))$ et $(''E_r^{p,q}(C^\bullet))$ telles que

$$'E_2^{p,q}(C^\bullet) = H^p R^q F(C^\bullet) \text{ et } ''E_2^{p,q}(C^\bullet) = R^p F(H^q(C^\bullet))$$

qui convergent vers $\mathbb{R}^{p+q}F(C^\bullet)$.
Comme les objets $G(I^k)$ sont F-acycliques alors

$$'E_2^{p,q}(G(I^\bullet)) = H^p(R^q F(G(I^\bullet))) = \begin{cases} H^p(F(G(I^\bullet))) \text{ si } q = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On en déduit que la suite spectrale dégénère et comme $I^\bullet$ est une résolution injective de X, on obtient

$$\mathbb{R}^p F(G(I^\bullet)) = H^p(F(G(I^\bullet))) = H^p(F \circ G(I^\bullet)) = R^p(F \circ G)(X)$$

Finalement,

$$''E_2^{p,q}(G(I^\bullet)) = R^p F(H^q(G(I^\bullet))) = R^p F(R^q G(X)))$$

□

1.3.3 Hypercohomologie

On va regarder le cas où $\mathscr{A}$ est la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X et F est le foncteur des sections globales $\Gamma \colon \mathscr{F} \in \mathscr{A} \mapsto \mathscr{F}(X) \in \mathbf{Ab}$ (si on prend des $\mathscr{O}_S$-modules, on peut changer la catégorie but en celles des $H^0(S, \mathscr{O}_S)$-modules).

Définition 1.3.3.1. Soit $\mathscr{F}^\bullet$ un complexe de faisceaux de groupes abéliens. Le ième groupe d'hypercohomologie du complexe $\mathscr{F}^\bullet$ est donné par le ième foncteur hyperdérivé de Γ appliqué à $\mathscr{F}^\bullet$:

$$\mathbb{H}^i(X, \mathscr{F}^\bullet) := \mathbb{R}^i\Gamma(\mathscr{F}^\bullet)$$

Proposition 1.3.3.2. *Soit $\mathscr{F}^\bullet$ un complexe de faisceaux.*
Il existe une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \mathscr{F}^p) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathscr{F}^\bullet)$$

Démonstration. Utiliser le théorème 1.3.1.8 dans notre cas. □

Lemme 1.3.3.3 ([Voi02] lemme 8.13)**.** *La suite exacte $\Omega_X^\bullet$ est une résolution du faisceau $\underline{\mathbb{C}}_X$*

Proposition 1.3.3.4. *Soit X une variété complexe. Alors, on a :*

$$H^\bullet(X, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{H}^\bullet(X, \Omega_X^\bullet)$$

Démonstration. Les complexes $\underline{\mathbb{C}}_X[0]$ et $\Omega_X^\bullet$ sont quasi-isomorphes alors $\mathbb{R}^\bullet\Gamma(\underline{\mathbb{C}}_X[0])$ et $\mathbb{R}^\bullet\Gamma(\Omega_X^\bullet)$ sont isomorphes et donc

$$\mathbb{H}^\bullet(X, \Omega_X^\bullet) = \mathbb{R}^\bullet\Gamma(\Omega_X^\bullet) \simeq \mathbb{R}^\bullet\Gamma(\underline{\mathbb{C}}_X[0]) = H^\bullet(X, \underline{\mathbb{C}}_X) = H^\bullet(X, \mathbb{C})$$

□

Définition 1.3.3.5. Une variété de Kähler est une variété complexe X munie d'un métrique hermitienne h telle que la 2-forme $\omega = -\mathrm{Im}(h)$ soit fermée.

Théorème 1.3.3.6 (décomposition de Hodge,[Voi02] 6.11-6.12)**.** *Soit* X *une variété complexe compacte kählérienne. Alors, on a l'égalité, pour tout* n*,*

$$H^n(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^q(X,\Omega_X^p)$$

et pour tout p,q*,*

$$H^q(X,\Omega_X^p) = \overline{H^p(X,\Omega_X^q)}$$

Corollaire 1.3.3.7. *Si* X *est une variété complexe compacte kählérienne alors la suite spectrale (dite de Frölicher) liée aux groupes d'hypercohomologie dégénère en* E_1*, ce qui revient à l'égalité*

$$b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$$

où b_k *est le* k*ème nombre de Betti de* X *et* $h^{p,q}$ *est la dimension de* $H^{p,q}(X,\mathbb{C})$*.*

La dégénérescence de la suite spectrale de Frölicher n'implique pas la symétrie (à conjugaison près) des groupes de cohomologie $H^q(X,\Omega_X^p)$ ni même des nombres de Hodge ($h^{p,q} = \dim(H^q(X,\Omega_X^p))$) (par exemple, la suite spectrale de Fröhlicher d'une surface complexe compacte dégénère en E_1 (c.f. [BHPvdV03] IV 2.8) mais la surface peut être non Kähler (ex : les surfaces de Hopf).

Théorème 1.3.3.8 ([BR08])**.** *Pour tout* $n \geq 2$*, il existe une variété complexe compacte de dimension (complexe)* $4n-2$ *telle que la suite spectrale de Fröhlicher ne dégénère pas en* E_n*.*

2 Cohomologie de de Rham algébrique

2.1 Différentielles

2.1.1 Modules de Kähler

Définition 2.1.1.1. Soient A un anneau, B une A-algèbre et M un B-module. Une A-dérivation de B dans M est un application A-linéaire $B \to M$ telle que :

1. Pour tout b et b',
$$d(bb') = bdb' + b'db$$
2. Pour tout $a \in A$, $da = 0$

On notera $\mathrm{Der}_A(B,M)$ l'ensemble des A-dérivations de B dans M.

Remarque 2.1.1.2.
— Il n'est pas nécessaire de demander la A-linéarité : on peut juste demander l'additivité et les conditions 1 et 2 nous donne l'homogénéité.
— Si B est engendré (comme A-algèbre) par la famille $(x_i, i \in I)$ alors une dérivation est entièrement déterminée par ses valeurs en x_i, $i \in I$

Exemple 2.1.1.3. Prenons $B = M = A[x_1, \dots, x_n]$. Les applications A-linéaires $\partial_i : x_j \mapsto \delta_{i,j}$ sont des dérivations.

Lemme 2.1.1.4. *En reprenant les notations de 2.1.1.1, on a :*

1. $\mathrm{Der}_A(B, M)$ *est un* A*-module pour l'addition et la multiplication terme à terme.*
2. *Soient* $d : B \to M$ *une* A*-dérivation et* $f : M \to N$ *une application* B*-linéaire. Alors,* $f \circ d$ *est une* A*-dérivation*

On a ainsi un foncteur $\mathrm{Der}_A(B, -) : B - \mathbf{Mod} \to A - \mathbf{Mod}$

Théorème 2.1.1.5 ([Mat80] 26.C)**.** $\mathrm{Der}_A(B, -)$ *est un foncteur représentable.*

On note $\Omega_{B/A}$ son représentant i.e. on a un isomorphisme naturel en M

$$\mathrm{Der}_A(B, M) \simeq \mathrm{Hom}_{B-\mathbf{Mod}}(\Omega_{B/A}, M)$$

et $d : B \to \Omega_{B/A}$ la "dérivation universelle" (obtenue avec Yoneda)

Démonstration. Le B-module $\Omega_{B/A}$ est le quotient du B-module libre engendré par l'ensemble B par les relations suivantes :
— $\forall a \in A, [a] = 0$
— $\forall b, b' \in B, [bb'] = b[b'] + b'[b]$
— $\forall b, b' \in B, [b + b'] = [b] + [b']$
où $[b]$ représente le générateur du module libre représenté par b.
La dérivation d est le morphisme associant à b sa classe d'équivalence . ☐

Exemple 2.1.1.6. — Si $B = A[x_1, \dots, x_n]$ alors

$$\Omega_{B/A} = \bigoplus_{i=1}^{n} B dx_i$$

— Si $B = A[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_p)$ alors

$$\Omega_{B/A} = \mathrm{coker}(\mathrm{Jac}(f_1, \dots, f_m) : B^m \to B^n)$$

— Si S une partie multiplicative de A alors

$$\Omega_{S^{-1}A/A} = 0$$

— Si le morphisme structural $A \to B$ est surjectif alors

$$\Omega_{B/A} = 0$$

— Si K/k est une extension de corps finie alors

$$\Omega_{K/k} = 0$$

si, et seulement si, l'extension K/k est séparable

Soit $\mu : B \otimes_A B \to B$ le produit d'algèbre de B et I son noyau. Le morphisme $b \in B \mapsto b \otimes 1 \in B \otimes_A B$ munit $B \otimes_A B$ d'une structure de B-algèbre (et en particulier de B-module). Ainsi, I et I^2 sont des B-modules et on a le résultat suivant :

Proposition 2.1.1.7 ([Mat80] theorem 58)**.** *On a un isomorphisme*

$$\Omega_{B/A} \simeq I/I^2$$

et la différentielle induite par celui-ci est $d : b \in B \mapsto b \otimes 1 - 1 \otimes b$

Lemme 2.1.1.8. *Soit A' une A-algèbre et $B' = B \otimes_A A'$. Alors, on a un isomorphisme naturel :*

$$\Omega_{B'/A'} = \Omega_{B/A} \otimes_A A'$$

Autrement dit, le passage aux différentielles commute aux changements de bases.

Lemme 2.1.1.9. *Soit S une partie multiplicative de B. Alors,*

$$S^{-1}\Omega_{B/A} = \Omega_{S^{-1}B/A}$$

2.1.2 Interlude : Faisceaux quasi-cohérents

Définition 2.1.2.1. Soient A un anneau et M un A-module. On peut associer à M un faisceau $\widetilde{M}$ sur $\mathrm{Spec}(A)$ définit sur la base de voisinage $\{D(f)\}_{f \in A}$ par :

$$\widetilde{M}(D(f)) = M_f$$

pour $f \in A$, et dont les applications de restrictions $M_g \to M_f$ sont données par l'application naturelle induite par l'inclusion $D(f) \subset D(g)$

Proposition 2.1.2.2 ([Har13] II Prop 5.1)**.** *Soient A un anneau et M un A-module.*
- *$\widetilde{M}$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-module*
- *Pour tout $x = [\mathfrak{p}] \in \mathrm{Spec}(A)$, $\widetilde{M}_x = M_{\mathfrak{p}}$*
- *Un morphisme de A-modules $u : M \to N$ définit un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-modules $\tilde{u} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$*

Théorème 2.1.2.3 ([Har13] II Proposition 5.2)**.** *Le foncteur $\widetilde{\ }: M \mapsto \widetilde{M}$ est un foncteur exact pleinement fidèle de la catégorie des A-modules vers la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-modules. En particulier, ils conservent les noyaux, conoyaux et images de morphismes. Il conserve, de plus, la somme directe (quelconque) et le produit tensoriel (fini).*

Définition 2.1.2.4. Soit X un espace annelé. On dit qu'un $\mathcal{O}_X$-module est quasi-cohérent si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U sur lequel il existe une suite exacte $\mathcal{O}_U^{(J)} \longrightarrow \mathcal{O}_U^{(I)} \longrightarrow \mathcal{F}_{|U} \to 0$ ·
On note $\mathrm{QCoh}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents.

Théorème 2.1.2.5 ([Har13] II Proposition 5.4). *Soient* $(X, \mathcal{O}_X)$ *un schéma et* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-module. les conditions suivantes sont équivalentes :*

— *Le* $\mathcal{O}_X$*-module* $\mathcal{F}$ *est quasi-cohérent*

— *Il existe un recouvrement ouvert affine* $\{U_i = \mathrm{Spec}(A_i)\}$ *et des* A_i*-modules* M_i *tels que* $\mathcal{F}_{|U_i} = \widetilde{M_i}$

Corollaire 2.1.2.6. *Soit* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *un schéma affine. Le foncteur* $\tilde{}$ *est une équivalence de catégorie (exacte) entre la catégorie des* A*-modules et celles des faisceaux quasi-cohérents sur* X *de quasi-inverse le foncteur* Γ *des sections globales.*

2.1.3 Globalisation

Soient S un schéma, $f : X \to S$ un S-schéma et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module.

Définition 2.1.3.1. Une S-dérivation de $\mathcal{F}$ est un morphisme $D : \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ additif, nul sur l'image $f^{-1}\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_X$ qui vérifie, pour toute section locale a et b de $\mathcal{O}_X$,

$$D(ab) = aD(b) + bD(a)$$

On notera $\mathrm{Der}_S(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ l'ensemble des S-dérivations de $\mathcal{F}$

On obtient un foncteur $\mathrm{Der}_S(\mathcal{O}_X, -) : \mathcal{O}_X - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ représentable. On notera $\Omega_{X/S}$ son représentant et $d_{X/S} : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/S}$ sa dérivation universelle.

Dans la suite, nous allons voir comment construire ces deux objets :

Théorème 2.1.3.2. *Soit* S *un schéma. Soit* $X \to S$ *un* S*-schéma. Il existe un unique faisceau* $\Omega_{X/S}$ *tel que, pour tout recouvrement affine* $\{U_i\}$ *de* S *et pour tout recouvrement affine* $\{V_{ij}\}$ *de* X *tel que* $V_{ij} \subset f^{-1}(U_i)$,

$$\Omega_{X/S_{|V_{ij}}} = \widetilde{\Omega_{\mathcal{O}_X(V_{ij})/\mathcal{O}_S(U_i)}}$$

De plus, pour tout $x \in X$*, on a :*

$$\Omega_{X/S,x} = \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,f(x)}}$$

Démonstration. Soit U un ouvert de X. On note $\Omega_{X/S}(U)$ l'ensemble des familles $(s(x))_{x \in U} \in \prod_{x \in U} \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,f(x)}}$ telle qu'il existe deux ouverts affines $U \subset X$ et $V \subset X$ tels que $f(x) \in V$ et $U \subset f^{-1}(V)$, et une section $\omega \in \widetilde{\Omega_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)}}(U)$ tels que, pour tout $x' \in U, \omega_{x'} = s(x')$.

Pour $S = \mathrm{Spec}(R)$, cela correspond à la faisceautisation du préfaisceau $\mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Ab}$ défini par

$$U \mapsto \coprod_{x \in U} \Omega_{\mathcal{O}_{X,x},R}$$

On vérifie ensuite que l'on a bien défini un faisceau qui vérifie les conditions de l'énoncé et qu'il ne dépend pas du choix de recouvrement. $\square$

Construisons maintenant la différentielle universelle $d_{X/S}$:
Soit $x \in X$. On notera d_x la différentielle $d_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,f(x)}} : \mathcal{O}_{X,x} \to \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,f(x)}}$.
Soit U un ouvert de X et $s \in \mathcal{O}_X(U)$ une section. Posons

$$d_{X/S}(U)(s) = (d_x s_x)_{x \in U}.$$

On vérifie que cela définit bien une S-dérivation et qu'elle satisfait bien la propriété universelle voulue.

Exemple 2.1.3.3. Soit S un schéma et $pr_2 : X := \mathbb{A}^n_S := \mathbb{A}^n \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} S \to S$. Soit $\{U_i \simeq \mathrm{Spec}(R_i)\}$ un recouvrement affine de S. Alors,

$$pr_2^{-1}(U_i) = \mathbb{A}^n \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} U_i = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\underline{x}] \otimes_{\mathbb{Z}} R_i) = \mathrm{Spec}(R_i[\underline{x}])$$

Ainsi, comme vu dans l'exemple ,

$$\Omega_{X/S}(U_i) = \bigoplus_j R_i[\underline{x}] dx_j \simeq R_i[\underline{x}]^n$$

On en déduit que :

$$\Omega_{X/S} \simeq \mathcal{O}_X^n$$

Corollaire 2.1.3.4. *Soit $X \to S$ un S-schéma. Alors, $\Omega_{X/S}$ est quasi-cohérent et si f est localement de type fini et si S est localement noethérien alors $\Omega_{X/S}$ est cohérent.*

Proposition 2.1.3.5. *Soit $X \to S$ un S-schéma. Notons Δ le morphisme diagonal $X \to X \times_S X$. C'est un isomorphisme sur son image qui est un schéma localement fermé i.e. un sous-schéma fermé d'un ouvert W de $X \times_S X$. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal quasi-cohérent défini par $\Delta(X)$ dans W. Alors, $\Omega_{X/S} = \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ et $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/S}$ est défini localement de la même façon que dans le cas algébrique.*

Rappel : Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $S = \mathrm{Spec}(R)$ alors $X \times_S X = \mathrm{Spec}(A \otimes_R A)$ et $\Delta = \mathrm{Spec}(\mu)$

2.2 Cohomologie de de Rham algébrique

2.2.1 Complexe de de Rham

Définition 2.2.1.1. Soit $X \to S$ un S-schéma. En notant $\Omega^0_{X/S}$ le faisceau $\mathcal{O}_X$ et $\Omega^i_{X/S}$ le faiseau $\bigwedge^i \Omega_{X/S}$ pour $i \geq 1$, on définit le complexe de de Rham algébrique

$$\Omega^0_{X/S} \xrightarrow{d^0 = d_{X/S}} \Omega^1_{X/S} \xrightarrow{d^1} \Omega^2_{X/S} \xrightarrow{d^2} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \Omega^n_{X/S} \xrightarrow{d^n} \cdots$$

où les morphismes de $f^{-1}\mathcal{O}_S$-modules d^k sont définis par :

$$d^k \left(\sum g \, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \right) = \sum dg \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

où les sections $\{dx_i\}$ engendrent localement $\Omega_{X/S}$ en tant que $\mathcal{O}_X$-module.

Définition 2.2.1.2. La cohomologie de de Rham $H^\bullet(X/S)$ est l'hypercohomologie du complexe de $f^{-1}\mathcal{O}_S$-modules $\Omega^\bullet_{X/S}$.

On a une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/S}) \Rightarrow H^{p+q}_{dR}(X/S) \tag{5}$$

2.2.2 Quelques résultats

Théorème 2.2.2.1 (Deligne–Illusie, [DI87]). *Soit X un schéma lisse et propre sur un corps k de caractéristique 0. La suite spectrale* (5) *dégénère à la page E_1. On obtient donc un isomorphisme*

$$H^n_{dR}(X/\operatorname{Spec}(k)) = \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \Omega^p_{X/\operatorname{Spec}(k)})$$

Remarque 2.2.2.2.
- Une variété projective sur k est un schéma propre sur $\operatorname{Spec}(k)$
- Le cas singulier est traité par Bhargav Bhatt et nécessite des outils plus sophistiqués (c.f. [Bha12])

Théorème 2.2.2.3 ([Ser57]). *Soit X un schéma noethérien. Les conditions suivantes sont équivalentes*
- *X est affine*
- *Pour tout faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ et tout $i > 0$, $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$*

Corollaire 2.2.2.4. *Soit X un schéma affine noethérien (i.e. $X = \operatorname{Spec}(A)$ avec A noethérien). Alors, pour tout i,*

$$H^i_{dR}(X/S) = H^i(\Gamma\Omega^\bullet_{X/S}))$$

Démonstration. La page 1 de la suite spectrale d'hypercohomologie s'effronde à cause du théorème précédent (i.e. il n'y a qu'une ligne non nulle) et donc

$$H^i_{dR}(X/S) = H^i(E_1^{\bullet,0}) = H^i(H^0(X, \Omega^\bullet_{X/S})) = H^i(\Gamma(\Omega^\bullet_{X/S}))$$

□

2.2.3 Analytification

Notons $\mathbf{An}_\mathbb{C}$ la sous-catégorie pleine des espaces analytiques de la catégorie **ELA** des espaces localement annelés.

Théorème 2.2.3.1 ([GR02] exposé XII). *Soit X un schéma localement de type fini sur $\mathbb{C}$. Le foncteur $\mathbf{An}_\mathbb{C} \to \mathbf{Ens}, Y \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbf{ELA}}(Y, X)$ est représentable par un espace analytique X^{an} et un morphisme $\varphi : X^{an} \to X$. De plus, le morphisme φ est un morphisme plat et induit une bijection entre $X(\mathbb{C})$ et l'espace sous-jacent à X^{an}.*

Exemple 2.2.3.2. — L'analytifié du schéma $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_p))$ est l'espace analytique $V(f_1,\dots,f_p)\subset\mathbb{C}^n$

— L'analytifié du schéma $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ est la variété complexe $\mathbb{C}P^n$

Théorème 2.2.3.3 (Chow)**.** *Si $\mathscr{X}$ est un sous-espace analytique compact de la variété complexe $\mathbb{C}P^n$ alors il existe un sous-schéma X de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ tel que $\mathscr{X}=X^{an}$*

Le morphisme $\varphi : X^{an}\to X$ induit des morphismes entre les groupes de cohomologies :

$$\alpha_p : H^p(X,\mathscr{F})\to H^p(X^{an},\varphi^*\mathscr{F})$$

Théorème 2.2.3.4 ([GR02] corollaire 4.3)**.** *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma propre localement de type fini. Alors, pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$, les morphismes*

$$\alpha_p : H^p(X,\mathscr{F})\to H^p(X^{an},\varphi^*\mathscr{F})$$

sont des isomorphismes pour tout p

Théorème 2.2.3.5 ([GGB$^+$68] exposé IX)**.** *Soit X un $\mathbb{C}$-schéma lisse localement de type fini. Alors, pour tout i,*

$$H^i_{dR}(X/\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))=H^i(X^{an},\mathbb{C})$$

où $H^i(X^{an},\mathbb{C})$ est la cohomologie singulière de l'analytifié X^{an}

2.3 Exemples

2.3.1 Espaces affines

Proposition 2.3.1.1 (Lemme de Poincaré algébrique, [Har75])**.** *Soit k un corps de caractéristique 0 alors le complexe de de Rham suivant*

$$\Omega^0_{\mathbb{A}^n_k/\mathrm{Spec}(k)}\xrightarrow{d^0}\Omega^1_{\mathbb{A}^n_k/\mathrm{Spec}(k)}\xrightarrow{d^1}\cdots\xrightarrow{d^{n-1}}\Omega^n_{\mathbb{A}^n_k/\mathrm{Spec}(k)}\xrightarrow{d^n}\cdots$$

est exact.

Corollaire 2.3.1.2. *Soit k un corps de caractéristique 0. Les groupes de cohomologie de de Rham de $\mathbb{A}^n_k\to\mathrm{Spec}(k)$ sont $H^0_{dR}(\mathbb{A}^n_k/\mathrm{Spec}(k))=k$ et $H^p_{dR}(\mathbb{A}^n_k/\mathrm{Spec}(k))=0$ pour $p\geq 1$*

Démonstration. On utilise les deux résultats précédents □

Remarque 2.3.1.3. Ce résultat est faux pour un corps de caractéristique non nulle. Par exemple, pour $k=\mathbb{F}_p$ et $n=1$,

$$H^0_{dR}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}/\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p))=\bigoplus_{m\in\mathbb{N}}\mathbb{F}_p x^{pm},\, H^1_{dR}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p}/\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p))=\bigoplus_{m\in\mathbb{N}^*}\mathbb{F}_p x^{pm-1}$$

car, dans ce cas,

$$d_0(x^{pm})=pmd_0(x^{pm-1})=0$$

(ce qui n'arrive pas en caractéristique 0).

2.3.2 Groupe multiplicatif

Proposition 2.3.2.1. *Soit* k *un corps de caractéristique de 0. Les groupes de cohomologie de de Rham de* $\mathbb{G}_{m,k} = \mathrm{Spec}(k[x,x^{-1}]) \to \mathrm{Spec}(k)$ *sont :*
$H^0_{dR}(\mathbb{G}_{m,k}/\mathrm{Spec}(k)) = k$, $H^1_{dR}(\mathbb{G}_{m,k}/\mathrm{Spec}(k)) = k\frac{dx}{x}$ *et* $H^p_{dR}(\mathbb{G}_{m,k}/\mathrm{Spec}(k)) = 0$ *pour* $p \geq 2$

Démonstration. $H^i_{dR}(\mathbb{G}_{m,k}/\mathrm{Spec}(k)) = H^i(\Gamma\Omega^\bullet_{\mathbb{G}_{m,k}/\mathrm{Spec}(k)})) = H^i(\bigwedge^\bullet \Omega_{k[x,x^{-1}]/k})$.
Si on note $S = \{x^k, k \in \mathbb{N}\}$ alors $S^{-1}k[x] = k[x,x^{-1}]$ et

$$\Omega^i_{k[x,x^{-1}]/k} = \bigwedge^i S^{-1}\Omega_{k[x]/k} = S^{-1}\bigwedge^i \Omega_{k[x]/k} = \begin{cases} k[x,x^{-1}] \text{ si } i = 0 \\ k[x,x^{-1}]dx \text{ si } i = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Alors,

$$H^0(\mathbb{G}_{m,k}/\mathrm{Spec}(k)) = \ker(d_0 : k[x,x^{-1}] \to k[x,x^{-1}]dx) = k$$

$$H^1(\mathbb{G}_{m,k}/\mathrm{Spec}(k)) = \frac{\ker(d_1 : k[x,x^{-1}]dx \to 0)}{\mathrm{im}(d^0 : k[x,x^{-1}] \to k[x,x^{-1}]dx)} = \frac{k[x,x^{-1}]dx}{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z},n\neq -1} kx^n dx} = k\frac{dx}{x}$$

□

2.3.3 Espaces projectifs

Lemme 2.3.3.1 ([Sta18] Tag 0FUK-1) **).** *Soit* A *un anneau commutatif et* $n \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$H^p(\mathbb{P}^n_A, \Omega^q_{\mathbb{P}^n_A}) = \begin{cases} A \text{ si } 0 \leq p = q \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Proposition 2.3.3.2. *Soit* A *un anneau commutatif. Pour tout* $0 \leq i \leq n$, *les groupes de cohomologie de de Rham* $H^{2i}_{dR}(\mathbb{P}^n_A/\mathrm{Spec}(A))$ *sont isomorphes à* A *et est nul sur les autres degrés.*

Démonstration. La suite spectrale associée dégénère et donc

$$H^{2p}_{dR}(\mathbb{P}^n_A/\mathrm{Spec}(A)) = H^p(\mathbb{P}^n_A, \Omega^p_{\mathbb{P}^n_A}) = A$$

pour $p \in \{0, \ldots, n\}$

□

Références

[Bha12] Bhargav Bhatt. Completions and derived de Rham cohomology, 2012.

[BHPvdV03] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, and A. van de Ven. *Compact Complex Surfaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2003.

[BR08] L Bigalke and S Rollenske. Erratum to : The Frölicher spectral sequence can be arbitrarily non-degenerate. *Mathematische Annalen*, 341 :623–628, 07 2008.

[DI87] P. Deligne and L. Illusie. Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham. *Inventiones Mathematicae*, 89 :247, January 1987.

[GGB+68] J. Giraud, A. Grothendieck, Séminaire Bourbaki, S.L. Kleiman, M. Raynaud, and J. Tate. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*. Advanced studies in pure mathematics. North-Holland Publishing Company, 1968.

[GR02] Alexander Grothendieck and Michele Raynaud. Revêtements étales et groupe fondamental (sga 1), 2002.

[Har75] Robin Hartshorne. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 45 :5–99, 1975.

[Har13] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[Mat80] Hideyuki Matsumura. *Commutative algebra*. Mathematics lecture note series ; 56. Benjamin-Cummings Pub Co, 2nd edition edition, 1980.

[MBF+01] J. McCleary, B. Bollobas, W. Fulton, A. Katok, F. Kirwan, P. Sarnak, and B. Simon. *A User's Guide to Spectral Sequences*. A User's Guide to Spectral Sequences. Cambridge University Press, 2001.

[Ser57] Jean-Pierre Serre. Sur la cohomologie des variétés algébriques. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 36 :1–16, 1957.

[Sta18] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2018.

[Voi02] C. Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Collection SMF. Société Mathématique de France, 2002.

[Wei95] C.A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.